Оглавление

Введение

§1.Система аксиом алгебры октав, ее непротиворечивость и категоричность

1.1 Непротиворечивость системы аксиом алгебры октав

1.2 Категоричность системы аксиом алгебры октав

§2. Дополнительные сведения об октавах

2.1 Действия над октавами

2.2 Сопряженные октавы и их свойства

2.3.Некоторые тождества для октав

§3. Теорема Гурвица

3.1 Нормированные линейные алгебры

3.2 Теорема Гурвица

§4. Обобщенная теорема Фробениуса

Список литературы

Введение

Одному известному английскому философу-материалисту Д. Гартли принадлежало высказывание- "Поскольку слова могут быть сравнены с буквами, употребляемыми в алгебре, сам язык можно назвать одним из видов алгебры, и наоборот, алгебра есть не что иное, как язык, который особым образом приспособлен к объяснению величин всех родов… И вот, если все относящееся к языку имеет что-либо аналогичное в алгебре, то можно надеяться объяснить трудности, возникающие в теории языка, при посредстве соответствующих конкретных положений алгебры, в которой все ясно и признано всеми, кто сделал ее предметом своего изучения".

Предметом моего изучения является один из разделов не ассоциативной алгебры - алгебра октав.

Цель данной исследовательской работы- выявить сущность алгебры октав, а так же выявить, каким образом производятся действия над упорядоченной восьмеркой чисел, т.е. над (1, i, j, k, E, I, J, K).Не ассоциативные алгебры в настоящее время покрыты мифами экзотики. На самом деле ничего особенного, кроме потери ассоциативности, в них нет. Впрочем, эта потеря существенна. Если можно выразиться образно, то в космосе алгебр за ассоциативными уже ничего "живого" нет. Среди не ассоциативных алгебр наиболее известной является простейшая из них - алгебра октав. Или, иначе, четвертая алгебра Фробениуса, она же алгебра Кэли-Диксона.

Рассмотрим алгебраическое определение октавы.

Октавой - называется число гиперкомплексной алгебры, полученной некоммутативным удвоением по Кэли алгебры кватернионов:



Здесь обозначены:

O - октава,

Q - кватернионы,

E - мнимая единица. .



Октавы во многих случаях уместно рассматривать как существенное расширение кватернионов. Так же как и кватернионы, октавы не имеют делителей нуля, и квадрат модуля так же выражается простой квадратичной формой. Для них, так же как и для кватернионов, можно определить условное скалярное произведение. Которое и использовалось Фробениусом.

Объектом данной дипломной работы являются гиперкомплексные числа.

Для октав, как и для других гиперкомплексных чисел, определены операции сложения, вычитания, умножения и деления. Операции сложения и вычитания определены покомпонентно. Умножение октав определено таблицей произведения их мнимых единиц. Для выполнения деления производится замена операции деления на операцию умножения.

При использовании гиперкомплексных чисел и их исследовании часто встречается операция сопряжения.

Для октав определены две операции сопряжения - алгебраическое и векторное. Два других сопряжения - дуальное и скалярное не применимы в силу отсутствия в строении октав скалярной и дуальной мнимых единиц. При этом векторное и алгебраическое сопряжения совпадают. Октава, сопряженная заданной, образуется сменой знаков у компонент при всех мнимых единицах. Или, если ,обозначить октаву покомпонентно как

,



то сопряженная ей октава будет иметь вид:

.



§1. Система аксиом алгебры октав, ее непротиворечивость и категоричность

Определение. Алгеброй октав называется алгебра , если:



I. Алгебра - альтернативная линейная алгебра;



II. Тело кватернионов есть подтело алгебры ;



III. е2 = -1 и е ≠ i, е ≠ j, е ≠ k;

IV.Всякая подалгебра альтернативной линейной алгебры , содержащая тело кватернионов и элемент е, совпадает с алгеброй .



1.1 Непротиворечивость системы аксиом алгебры октав

Теорема 1. Система аксиом алгебры октав непротиворечива. Для доказательства непротиворечивости сформулированной выше системы аксиом построим следующую модель. Составим декартово произведение K x K = {(u,v)|uK vK}, где К - множество кватернионов. По определению, (u1;v1) = (u2;v2) u1 =u2 v1 = v2.



Во множестве К х K определим операции сложения и умножения по правилам:

(u1;v1) + (u2;v2) = (u1 +u2 ; v1 + v2);

(u1;v1) \* (u2;v2) = (u1u2 - v2v1 ; v2 u1 + v1 ū2).

Перейдем к проверке выполнения аксиом на построенной модели. Покажем, что алгебра есть альтернативная линейная алгебра.



Сначала покажем, что (К x К, +) есть абелева группа.

1) ((u1;v1) + (u2;v2)) + (u3;v3) = (u1 +u2 ; v1 + v2) + (u3; v3) = ((u1 +u2) + u3; (v1 + v2) + v3) = (u1 +(u2 + u3); v1 + (v2 + v3)) = ((u1; v1) + (u2+ u3;v2+ v3) = (u1; v1) + ((u2; v2) + (u3; v3)),

т.е. сложение в (К х K, +) ассоциативно.

2) (u1; v1) + (u2; v2) = (u1 +u2 ; v1 + v2) = (u2 +u1; v2 + v1) = (u2; v2) + (u1; v1),

т.е. сложение в (К х K, +) коммутативно.

3) Решим уравнение

(u; v) + (x; y) = (u; v);

(u+ x; v+ y) = (u; v) u+ x = u^ v+ y= v ; x = 0, y = 0 ,т.е. (x; у) = (0;0).



Следовательно, нейтральным элементом в (К х K, +) является пара (0; 0). Обозначим (0; 0) = 0U.

4) Решим уравнение

(u; v) + (x; y) = (0; 0):

(u+ x; v+ y) = (0; 0) u+ x = 0^ v+ y= 0 x = - u ^ y = - v, т.е. (x; у) = (- u; - v) или -(u; v) = (- u; - v).



Из 1) ,4) следует, что алгебра (К х K, +) есть абелева группа. Покажем, что алгебра (К х K, +, .) есть кольцо, но не ассоциативное и не коммутативное.

5) Покажем, что умножение в дистрибутивно относительно сложения как слева, так и справа.



С одной стороны:

((u1; v1) + (u2; v2)) (u3; v3) = (u1 +u2 ; v1 + v2) (u3; v3) = ((u1 +u2) u3 - 3(v1 + v2); v3(u1+u2)+ (v1 + v2)ū3) = (u1 u3 +u2 u3 - 3v1 - 3v2; v3u1+ v3u2+ v1 ū3 + v2ū3).



С другой стороны:

(u1; v1) (u3; v3) + (u2; v2) (u3; v3) = (u1u3 - 3v1; v3u1 + v1ū3)+(u2 u3 - 3v2; v3u2+ v2ū3)=(u1 u3 - 3v1 + u2 u3 - 3v2; v3u1 + v1ū3 + v3u2+ v2ū3).



Сопоставляя правые части полученных равенств, замечаем, что они равны. Следовательно,

((u1; v1) + (u2; v2)) (u3; v3) = (u1; v1) (u3; v3) + (u2; v2) (u3; v3),



т.е. умножение в дистрибутивно справа относительно сложения.



Аналогично устанавливается равенство:

(u3; v3) ((u1; v1) + (u2; v2)) = (u3; v3) (u2; v2) + (u3; v3) (u1; v1).



Действительно, с одной стороны:

(u3; v3) ((u1; v1) + (u2;v2)) = (u3; v3) v (u2+ u1 ; v1 + v2) = (u3 (u1 +u2); ()v3;



(v1+ v2)u3+ v3())= (u3 u1 +u3u2 -1v3 - 2v3; v1 u3 +u2 u3+ v3ū1+ v3ū2);



с другой стороны:

(u3; v3) (u1; v1) +(u3; v3) (u2; v2) = (u3 u1 - 1v3;v1 u3 + v3ū1)+ (u3 u2 - 2v3;v2 u3 + v3ū2)= (u3 u1 - 1v1 +u3 u2 - 2v3; v1 u3 + v3ū1 +v2 u3 + v3ū2).



Сопоставляя правые части полученных равенств, замечаем, что они равны. Следовательно, умножение в дистрибутивно слева относительно сложения .



6) Покажем, что умножение в не ассоциативно.



Действительно, с одной стороны:

((u1; v1) (u2; v2)) (u3; v3) = (u1 u2 - 2v1; v2 u1 + v1 ū2) (u3; v3) = ((u1 u2 - 2v1)u3 -3(v2 u1 + v1ū2);



v3(u1 u2 - 2v1)- (v2 u1 + v1ū2) ū3) = (u1 u2 u3 - 2v1u3 -3v2 u1 -3v1ū2; v3u1u2 - v32v1 - v2 u1 ū3 - v1ū2 ū3).



С другой стороны:

(u1; v1) ((u2; v2) (u3; v3)) = (u1; v1) (u2u3 - 3v2; v3u2 + v2ū3) = (u1 (u2u3 - 3v2) – v1;



v1+ (v3u2 + v2ū3) u1) = (u1u2u3 - u13v2 –v1 - u32v1; v1- v12v3 + v3u2 u1 + v2ū3 u1).



Из сопоставления правых частей этих равенств следует, что

((u1; v1) (u2; v2)) (u3; v3) ≠ (u1; v1) ((u2; v2) (u3; v3))



т.е. умножение в не ассоциативно.



7) Рассмотрим произведения:

(u1;v1) (u2;v2) = (u1u2 - 2v1 ; v2 u1 + v1 ū2);



(u2;v2) (u1;v1) =(u2u1 - 1v2 ; v1 u2 + v2 ū1).



Сравнивая правые части этих равенств, убеждаемся, что

(u1;v1) (u2;v2) ≠ (u2;v2) (u1;v1)



т.е. умножение в не коммутативно.



8) Покажем, что имеет место равенство

((u1; v1) (u2; v2)) (u2; v2) = (u1; v1) ((u2; v2) (u2; v2))



Преобразовав левую сторону этого равенства, получаем:

((u1; v1) (u2; v2)) (u2; v2) = (u1 u2 - 2v1; v2 u1 + v1 ū2) (u2; v2) = ((u1 u2 - 2v1)u2 -2(v2 u1 + v1ū2);



v2(u1 u2 - 2v1)- (v2 u1 + v1ū2) ū2) = (u1 u2 u2 - 2v1u2 -2v2 u1 -2v1ū2; v2u1u2 - v22v1 - v2 u1 ū2 - v1) = (u1 u2 u2 - 2v1 (u2 + ū2)– |v2|2 u1; v2u1 (u2 + ū2)- v1- |v2|2v1) .



Преобразовав правую сторону этого равенства, получаем:

(u1; v1) ((u2; v2) (u2; v2)) = (u1; v1) (u2 u2 - 2v2; v2 u2 + v2 ū2) = (u1(u2 u2 - 2v2) –()v1;



v1 () + (v2 u2 + v2 ū2) u1) = (u1u2 u2 - u12v2 –v1 – u22v1;



v1- v12v2 + v2 u2 u1+ v2 ū2 u1) = (u1 u2 u2 - (u2 + ū2) 2v1 – u1|v2|2; (u2 + ū2)v2u1 + v1 - v1|v2|2).



Здесь следует учитывать, что 2v2 =v22 = |v2|2 и u2 + ū2 - действительные числа. Сравнивая правые части полученных равенств, убеждаемся, что они совпадают с точностью до порядка слагаемых. Следовательно, равенство 8) справедливо.



9) Покажем, что имеет место равенство

(u2; v2) ((u2; v2) (u1; v1)) = ((u2; v2) (u2; v2)) (u1; v1).



Преобразовав левую сторону этого равенства, получаем:

(u2; v2) ((u2; v2) (u1; v1)) = (u2; v2) (u2u1 - 1v2; v1 u2 + v2 ū1) = (u2(u1 u2 - 2v1) – v2;



(v1 u2 - v2 ū1) u2 + v2 ) = (u2u1 u2 - u21v2 –v2 - u12v2; v1u2u2 + v2 ū1 u2 + v2 - v22v1) = (u2u1 u2 - u1 |v2|2 - (u2 + ū2) 1v2; v1u2u2 + v2 ū1(u2 + ū2)- |v2|2 v1).



Преобразовав правую сторону этого равенства, получаем:

((u2; v2) (u2; v2)) (u1; v1) = (u2 u2 - 2v2; v2 u2 + v2 ū2) (u1; v1) = ((u2 u2 - 2v2) u1 - 1(v2 u2 + v2 ū2);



v1(u2 u2 - 2v2) + (v2 u2 + v2 ū2) ū1) = (u2 u2 u1- 2v2 u1 - 1v2 u2 - 1v2 ū2; v1u2 u2 - v12v2 + v2 u2 ū1 + v2) = u2 u2 u1 - 1v2(u2 + ū2) - |v2|2u1; v1u2 u2 - v1 |v2|2+ v2 ū1 (u2+ ū2).



Сравнивая правые части полученных равенств, убеждаемся, что они совпадают с точностью до порядка слагаемых. Следовательно, равенство 9 справедливо.

Из равенств 8) и 9) следует, что умножение в альтернативно.



10) Для определения правого нейтрального элемента (единицы) относительно операции умножения в решим уравнение:



(u; v) (x; y) = (u; v),



в котором и и v одновременно не равны 0, так как (0; 0) = 0и и это уравнение будет иметь любое решение. Пусть u ≠ 0. Тогда:

(u; v) (х; у) = (u; v) (хu - y; уи + v) = (и; v)



Умножим обе части первого уравнения этой системы слева на u-1=,откуда:



(u-1 u) x = u-1v+ u-1ux = v =1+ уи.



Подставим полученное значение во второе уравнение системы:



v(1+ уи) + уи = vv+ v уи+ уи = vуи+уи=0 (+1)уи=0,



откуда при u ≠ 0 следует, что у = 0. Тогда = 0 и из первого уравнения системы



их = и следует, что х = 1. Итак, пара (х; у) = (1; 0) является правым единичным элементом в .



В случае, если и = 0, v ≠ 0, второе уравнение .системы имеет вид v = v, откуда сразу х = 1, а из первого уравнения системы у = 0, т.е. приходим к тому же решению.



Для определения левого нейтрального элемента (единицы) относиnельно операции умножения в решим уравнение:



(х; у) (u; v) = (u; v),



в котором опять и и v одновременно не считаем равными 0, так как (0; 0) = 0U и это уравнение будет иметь любое решение. Пусть опять u ≠ 0. Тогда:

(х; у) (и; v) = (и: v) (хи - y; vх - уū) = (и; v)



Умножим обе части первого уравнения этой системы справа на u-1=, откуда:



x(uu-1) = y+ u\*u-1 x = 1+ 2yū,



Подставим полученное значение х во второе уравнение системы:

v(1+ 2yū) + уū= vv + 2 vyū + уū= vyū+ уū= 0 (+ 1)уū =0,



откуда при u ≠ 0 следует, что у = 0 и из первого уравнения системы хu = и следует, что х = 1. Итак, пара (х; у) = (1; 0) является и левым единичным элементом в . Обозначим (1; 0) = 1U,



11) Для определения правого симметричного для (u; v) элемента решим уравнение:

(u; v) (х: у) = (1; 0) (их - v; уи+ v) = (1; 0)



Умножим обе части первого уравнения этой системы слева на u-1=2, откуда:



(u-1u) x = u-1v + u-1 x =2+2v = 2 + 2yu.



Подставим полученное значение во второе уравнение системы:



v+ + уи= 0 2 + 2 vyu + уи= 0 (|u|2 + |v|2) yu = - vu (|u|2 + |v|2) y = - v,



откуда

у = - .



Тогда из второго уравнения системы

v- u =0v- =0 = x= .



Итак, пара

(x; y) = ; -



является правым обратным элементом для элемента (u; v) в .



Для определения левого симметричного элемента для элемента (u; v) относительно операции умножения в решим уравнение:



(х; у) (u; v) = (1; 0),



в котором опять и и v одновременно не считаем равными 0. Пусть опять и ≠ 0. Тогда:

(х; у) (u; v) = (1; 0) (xu - y; vx + yū) = (1; 0)



Умножим обе части первого уравнения этой системы справа на u-1=2 откуда:



x (u u-1) = y2 + 2 x = 2 (yū + ū).



Подставим полученное значение х во второе уравнение системы:

v2(yū + + ū) + yū = 0 (|u|2 + |v|2) yū = - vū



откуда при ū ≠ 0 следует, что у = - . и, подставив это значение у в первое уравнение системы, получаем



xu - = 1,



откуда следует, что

xu= 1 - = .



Умножим это равенство справа на u-1=, тогда



x = \* =



Итак, пара

(x; y) = ; -



является и левым обратным элементом для элемента (u; v) в . Обозначим его (u, v)-1.



Левый и правый обратные элементы для (u; v) совпадают и, следовательно, каждый ненулевой элемент обратим в .



Из 1)-11) следует, что алгебра есть альтернативная линейная алгебра с делением и единицей, т.е. в данной модели первая аксиома полностью выполняется.



Проверим выполнение второй аксиомы на построенной модели.

Пусть U1 = {(u; 0)| u K}. Ясно, что U1 K x K.



Покажем, что множество U1 замкнуто относительно введенных ранее операций сложения и умножения:

(u1, 0) + (u2, 0) = (u1 + u2: 0 + 0) = (u1 + u2: 0) U1;



(u1, 0) (u2, 0) = (u1 u2 – 0; 0 u1 + 0 ū2) = (u1  u2: 0) U1.



Далее:

- (u; 0) = (- u; - 0) = ( - u; 0) U1;



(u; 0)-1 = = U1,



откуда следует, что есть под тело алгебры ,.



Покажем, что изоморфно телу кватернионов . Для этого рассмотрим отображение f : U1 → K такое, что ((u; 0) є U1) f ((u; 0)) = u, т.е. паре (и;0) ставит в соответствие кватернион и. Имеем:



f ((u1; 0) + (u2; 0)) = f ((u1 + u2: 0)) = u1 + u2 = f ((u1; 0)) + f ((u2; 0));

f (- (u; 0)) = f (( - u; 0)) = - u = - f ((u; 0));

f ((u1; 0) (u2; 0)) = f ((u1 u2: 0)) = u1 u2 = f ((u1; 0)) f ((u2; 0));



f ((u; 0)-1) = f ((; 0)) = ; 0 = u-1 = f ((u; 0)) -1,



откуда следует, что отображение f является гомоморфным отображением алгебры в тело кватернионов. Это отображение биективно, так как



f ((u1; 0)) = f ((u2; 0)) u1 = u2  (и1; 0) = (и2; 0) и f (U1) = К.



Следовательно, отображение f есть изоморфизм тела на тело кватернионов (К, +, .), т.е. тело изоморфно телу кватернионов. В этом случае мы можем рассматривать тело как лишь другую модификацию тела кватернионов, а пару (u;0) отождествлять с кватернионом и. А так как есть подтело алгебры , то и изоморфное ему тело кватернионов является подтелом алгебры .



Проверим выполнение третьей аксиомы. Для этого возьмем пару (0; 1). Имеем:

(0; 1)2 = (0; 1) (0; 1) = (00 - 1; 10+1) = (-1; 0) = -(1; 0) = -(1; 0) = - 1.



С другой стороны:

(0; i) ≠ (i; 0) = i; (0: 1) ≠ (j; 0) = j; (0; k) ≠ (k; 0) = k.

Обозначим: (0; 1) = е. Следовательно, на построенной модели выполняется и третья аксиома.

Из проверки второй и третьей аксиом следует, что любой элемент (и; v) , представим в виде u + ve, где и, v є К и е2 = -1. Действительно,



(u; v) = (u; 0) + (0: v) = (u; 0) + (v; 0) \* (0; 1) = и + ve.

Проверим выполнение четвертой аксиомы. Пусть подалгебра алгебры , содержащее в себе тело кватернионов и элемент е. Ясно, что U/ К х К. Если мы покажем, что К х K U/, то тем самым совпадает с . Так как каждый элемент алгебры имеет вид u+ve, где и, v К. е2 = - 1, то u + vjU/, так как и, v К U/, e U/ и - альтернативная алгебра (а, следовательно, замкнута относительно сложения и умножения). Итак, К х K U/, откуда U/ = К х K и, следовательно, имеет место выполнение четвертой аксиомы.



Так как на построенной модели выполняются все четыре сформулированные выше аксиомы алгебры октав, то эта система аксиом алгебры октав непротиворечива.

Мы показали, что любая октава представима в виде u+ve. где и, v К. Пусть



u = a+bi+cj+dk, v = A+Bi+Cj+Dk, a,b,c,d, a,b,c,d R.



Тогда,

и + vе = a+bi+cj+dk + (A+Bi+Cj+Dk)e = a+bi+cj+dk+ Ae+B(ie)+C(je)+D(ke).

Вычислим

ie = (i; 0) (0; 1) = (i0 - 0; 1i + 0) = (0; i);



je = (j; 0) (0; 1) = (j0 - 0; 1j + 0) = (0; j);



ke = (k; 0) (0; 1) = (k0 - 0; 1k + 0) = (0; k),



откуда следует, что ie, je, ke отличны друг от друга и от предыдущих мнимых единид i, j, k, e.

Покажем, что (ie)2 = (je)2 = (ke)2 = -1. Действительно,

(ie)2 = (i; 0) (i; 0) = (ii - 0; 0i + 0ī) = (-1; 0) = -1;



(je)2 = (j; 0) (j; 0) = (jj - 0; 0j + 0ī) = (-1; 0) = -1;



(ke)2 = (k; 0) (k; 0) = (kk - 0; 0k + 0ī) = (-1; 0) = -1.



Следовательно, ie, je, ke можно выбрать в качестве новых мнимых единиц, обозначив их соответственно iе = I, je = J. ke = К и октаву w записать в виде

w = a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK,

где a,b,c,d, a,b,c,d R.



Эту форму записи октавы назовем алгебраической формой. Обозначим КхK=U и назовем U алгеброй октав.

1.2 Категоричность системы аксиом алгебры октав

Теорема 2. Система аксиом алгебры октав категорична.

Пусть (U, +, ., e) и (U1, ,, e1 ) - две модели алгебры октав и e2 = -1, e21 = Ө1.



Рассмотрим отображение Ф : U → U такое, что

Ф (u+ve) = uve1, u,v К.



Покажем, что Ф - гомоморфное отображение первой модели на вторую модель.

Пусть w1 = u1+v1e и w2 = u2+v2e. Тогда:

Ф(w1+ w2) = Ф((u1+v1e) + (u2+v2e)) = Ф((u1+u2)+(v1+v2)e) = (u1+u2)(v1+v2)e1 = (u1v1e1 ) (u2v2e1) = Ф(u1+v1e) Ф(u2+v2e) = Ф(w1)Ф(w2);



Ф(w1 w2) = Ф((u1+v1e) (u2+v2e)) = Ф((u1u2 - 2v1)+(v2u1 + v1ū2)e) = (u1u2 - 2v1) (v2u1 + v1 ū2) e) =(u1u2 Ө 2v1)(v2u1 v1ū2)e) =(u1v1e1)( u2v2e1) = Ф(u1+v1e) Ф(u2+v2e) = Ф(w1) Ф(w2);



Ф(-w) = Ф (-(u+ve)) = Ф (-u -ve) = ӨuӨve1 = Ө(uve1) = ӨФ(u+ve)= ӨФ(w);



Ф(w-1)=Ф((u+ve)-1)=Ф(Өe)= (Ө e) = Ө e = (uve1)-1 = (Ф(u+ve)Ө1) = (Ф(w)) Ө1.



Следовательно, отображение Ф есть гомоморфное отображение алгебры в (U1, ,, e1 ).



Покажем, что отображение Ф инъективно:

Ф(w1)=Ф(w2) Ф(u1+v1e) = Ф(u2+v2e) u1v1e1 = u2v2e1 u1=u2v1=v2 u1+v1e= u2+v2e w1= w2.



Сюръективность отображения Ф очевидна, так как

(qU1) (u,vK)p= uve1 (u+ve = wU) Ф(w) = p.



Итак, отображение Ф есть изоморфизм алгебры на алгебру (U1,,,e1) и, следовательно, система аксиом алгебры октав категорична ввиду изоморфности произвольных ее моделей.



§2. Дополнительные сведения об октавах

В ходе доказательства непротиворечивости системы аксиом алгебры октав мы установили, что любую октаву можно представить в виде:

w = a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK,

где a,b,c,d, a,b,c,d R и i2 = j2 = k2 = e2=I2= j2 = k2 = -1,



причем iе = I, je = J, ke = К по обозначению.

Через пары эти мнимые единицы выражались следующим образом:

i=(i; 0), j=(j; 0), k=(k; 0), e=(0; 1), I=(0; i), j=(0; j), k=(0; k).

Вычислим другие произведения мнимых единиц:

iI = (i; 0)(0; i) = (i0 – ī0; ii + 0) = (0; -1) = -(0; 1) = - e;



iJ = (i; 0)(0; j) = (i0 – 0; ji + 0) = (0; -k) = -(0; k) = - K;



iK = (i; 0)(0; k) = (i0 – 0; ki + 0) = (0; j) = J;



I i = (0; i)(i; 0) = (0i – i; 00; + iī) = (0; 1) = e;



J i = (0; j)(i; 0) = (0i – j; 00; + jī) = (0; k) = K;



K i = (0; k)(i; 0) = (0i – k; 00; + kī) = (0; -j) = - (0; j) = -J;



jI = (j; 0)(0; i) = (j0 – ī0; ij + 0) = (0; k) = K;



jJ = (j; 0)(0; j) = (j0 – 0; jj + 0) = (0; -1) = -(0; 1) = - e;



jK = (j; 0)(0; k) = (j0 – 0; kj + 0) = (0; - i) = - (0; i) = -I;



I j = (0; i)(j; 0) = (0j – i; 00 + i) = (0; -k) = -(0; k) = - K;



J j = (0; j)(j; 0) = (0j – j; 00; + j) = (0; 1) = e;



K j = (0; k)(j; 0) = (0j – k; 00; + k) = (0; i) = I;



kI = (k; 0)(0; i) = (k0 – ī0; ik + 0) = (0; -j) = - (0; j) = -J;



kJ = (k; 0)(0; j) = (k0 – 0; jk + 0) = (0; i) = I;



kK = (k; 0)(0; k) = (k0 – 0; kk + 0) = (0; -1) = - (0; 1) = - e;



I k = (0; i)(k; 0) = (0k – i; 00; + i) = (0; j) = J;



J k = (0; j)(k; 0) = (0k – j; 00; + j) = (0; - i) = - (0; i) = -I;



K k = (0; k)(k; 0) = (0k – k; 00; + k) = (0; 1) = e;



e i = (0; 1)(i; 0) = (0i – 1; 00; + 1ī) = (0; - i) = - (0; i) = -I;



e j = (0; 1)(j; 0) = (0j – 1; 00; + 1) = (0; -j) = - (0; j) = -J;



e k = (0; 1)(k; 0) = (0k – 1; 00; + 1) = (0; -k) = - (0; k) = - K;



I e = (0; i)(0; 1) = (00 – i; 10; + i) = (-i; 0) = - (i; 0) = - i;



J e = (0; j) (0; 1) = (00 – j; 10; + j) = (- j; 0) = - (j; 0) = - j;



K e = (0; k) (0; 1) = (00 – k; 10; + k) = (- k; 0) = - (k; 0) = - k;



e I = (0; 1)(0; i) = (00 –ī1; i0; + 1) = (i; 0) = i;



e J = (0; 1)(0; j) = (00 –1; j0; + 1) = (j; 0) = j;



e K = (0; 1)(0; k) = (00 –1; k0; + 1) = (k; 0) = k;



I J = (0; i)(0; j) = (00 –i; j0 + i) = (- k; 0) = - (k; 0) = - k;



I K = (0; i)(0; k) = (00 –i; k0 + i) = (j; 0) = j;



J K = (0; j)(0; k) = (00 –j; k0 + j) = (- i; 0) = - (i; 0) = - i;



J I = (0; j)(0; i) = (00 –īj; i0 + j) = (k; 0) = k;



K I = (0; k)(0; i) = (00 –īk ; i0+ k) = (- j; 0) = - (j; 0) = - j;



K J = (0; k)(0; j) = (00 –k ; j0 + k) = (i; 0) = i.

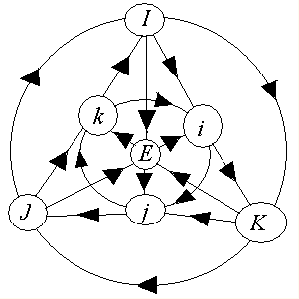


При умножении на мнимые единицы кватернионов образуются дополнительно три несоставных мнимых единицы. Правило произведения мнимых единиц (1,i,j,k,E,I,J,K) может быть представлено таблицей 1.

При пользовании этой таблицей первым сомножителем следует брать элемент, занимающий строку, а вторым сомножителем - элемент, занимающий столбец.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | i | j | k | E | I | J | K |
| 1 | 1 | i | j | k | E | I | J | K |
| i | i | -1 | -k | -j | -I | E | K | -J |
| j | j | k | -1 | i | -J | -K | E | I |
| k | k | -j | -i | -1 | -K | J | -I | E |
| E | E | I | J | K | -1 | -i | -j | -k |
| I | I | -E | K | -J | i | -1 | k | -j |
| J | J | -K | -E | I | j | -k | -1 | i |
| K | K | J | -I | -E | k | j | -i | -1 |

Или диаграммой взаимных произведений:



При получении вышеприведенной таблицы произведений мы исходили из правого закона произведения мнимых единиц кватернионов (внутренний круг диаграммы), правого закона произведения новых единиц (внешний круг диаграммы) и правого закона произведения мнимых единиц исходных кватернионов на мнимую единицу E (радиальные линии диаграммы). Так же можно использовать определение октав с левыми правилами произведения. В дальнейшем мы будем полагать, что используются правые правила.

§3.Действия над октавами

Так как по доказанному пара вида (и; v), где u = a+bi+cj+dk, v = A+Bi+Cj+Dk K, есть и u+ ve, или в алгебраической форме



a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK,

то сложение двух октав осуществляется как сложение двух многочленов по правилу:

p+ q= (a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK) +(a1+b1i+c1j+d1k+ A1e+B1I+C1J+D1K) =

= a+a1+(b+b1)i +(c+c1)j +(d+d1)k +(A+ A1)e +(B+B1)I +(C+C1)J +(D +D1)K.

Умножение октав выполняется так; же, как умножение двух многочленов с учетом порядка, умножения мнимых единиц, представленного в вышеприведенной таблице.

Упражнения: 1. Приведите полное представление произведения двух октав

w= a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK

и w1 =a1+b1i+c1j+d1k+ A1e+B1I+C1J+D1K

в алгебраической форме.

(a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK)( a1+b1i+c1j+d1k+ A1e+B1I+C1J+D1K)=a a1+ab1 i+ ac1j+ad1k+aA1E+aB1I+aC1J+aD1K+bia1+bib1i+bic1j+bid1k+diA1E+biB1I+biC1J+

biD1K+cja1+cjb1i+cjc1j+cjd1k+cjA1E+cjB1I+cjC1J+cjD1K+dka1+dkb1i+dkc1j+dkd1k+dkA1E+dkB1I+dkC1J+dkD1K+AEa1+AEb1i+AEc1j+AEd1k+AEA1E+AEB1I+AEC1J+AED1K+ BIa1+BIc1j+BId1k+BIA1E+BIB1I+BIC1J+BID1K+CJa1+Cjb1i+CJc1j

+CJd1k+CJA1E+CJB1I+CJC1J+CJD1K+Dka1+DKb1i+DKc1j+DKd1k+DKA1E+DKB1I+DKC1J+DKD1K=aa1+ab1i+ac1j+ad1k+aA1E+aB1I+aC1J+aD1K+bia1-bb1+bc1k-bd1j-bA1I+bB1E+bC1K+bD1J+cja1-cb1k-cc1+cd1i-cA1J+cB1K-Cc1E +cD1I+dka1+db1j-c1di-dd1+dA1K-dB1J+dC1I-dD1E+AEa1-Ab1I-Ac1J-Ad1K-AA1+Ab1i+AC1j+AD1k+Bia1+Bb1E-Bc1K+Bd1J-Ba1i-BB1-BC1k+BD1j+CJa1+Cb1K-Cc1E-Cd1I-CA1j+CB1k-CC1-CD1i+DK1a-Db1J-Dc1I+Dd1E-DA1k-DB1j+DC1i-DD1=aa1-bb1-cc1-dd1-AA1-BB1-CC1-DD1+i(ab1+ba1+cd1-dc1+AB1-BA1- -cD1+Dc1)+j(ac1-bd1+ca1+db1+AC1+BD1-CA1-DB1)+k(ad1+bc1-cb1+da1+AD1-BC1+CB1-Da1)+E(aA1-bB1-cC1-dD1+Aa1+Bb1+Cc+Dd1)+I(aB1+bA1-Cd1+dC1-Ab1+Ba1-Cd1-Dc1)+J(ac1+bD1+cA1-dB1-Ac1+Bd1+Ca1-Db1)+K(aD1-bC1+cB1+Da1-Ad1-Bc1+ Cb1 +Da1).

Этот результат можно записать в матричной форме:

,



.



Решение примеров:

Пример 1.

Сложить кватернионы:

(1+i-2j+15E-17J)+(-2+5j-17E+20K)= -1+i+3j-2E-17J+20K.

Пример 2.

Выполнить умножение:

(1+3K)(2-i+3j+2E+2K)=2-i+3j+2E+2K+6K-3Ki+9Kj+6KE-6=2-i+3j+2E+8K+3J-9I+6K-6=-4-i+2E-9I+14K.

Пример 3.

Решить уравнение:

(1-2i+4K)x=(2-3j+J)(3-5k+E)-5J+8k.

В правой части приведем подобные слагаемые.

(2-3j+J)(3-5k+E)-5J+8k=6-10k+2E-9j+15jk-3jE+3J-5Jk+JE-5J+8k=6-10k+2E-9j+15i-3J+3J-5I-j-5J+8k=6+15i-10j-2k+2E-5I-5J.

x=(1-2i+4K )-1(6+15i-10j-2k+2E-5I-5J);

x=((1+2i-4K )(6+15i-10j-2k+2E-5I-5J))/21=1/21(6+15i-10j-2k+2E-5I-5J+12i-30-20k+4j-4I-10E-10K-24K-60J-40I-8E-8K+20J-20I)=1/21(-24+27i-6j-22k-16E-69I-45J-442K)



§4. Сопряженные октавы и их свойства

Определение. Если дана октава

w= a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK,

то октава

= a-bi-cj-dk- Ae-BI-CJ-DK



называется сопряженным ему. В случае, когда октава w выражена через кватернионы и и v как u+ ve, то сопряженная ей октава равна = ū- ve.



Свойства сопряженных октав:

1. р + = 2а R (выводится непосредственным сложением октавы



р=a+bi+cj+dk+Ae+BI+CJ+DK

с сопряженной ей октавой).

(a+bi+cj+dk+Ae+BI+CJ+DK)+ (a-bi-cj-dk-Ae-BI-CJ-DK)=2a.

2) w=w = a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2.



В самом деле:

w=(u+ ve)(ū- ve) = (uū –(-)v)+(-vu+vu)e = (uū+ )+(-vu+vu)e =(|u|2 + |v|2) + 0e = |u|2 + |v|2.



Здесь и и v кватернионы

u = a+bi+cj+dk, v = A+Bi+Cj+Dk.

А так как

|u|2 = a2 + b2 + c2 + d2, |v|2 = A2 + B2 + C2 + D2,

то w=|u|2 + |v|2 = a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2.



Аналогично доказывается равенство

w = a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2.



3) w= w= а R.



4) =+



(вычисление левой и правой частей равенства дает

одинаковые значения).

В самом деле:

w1+ w = (a+bi+cj+dk+( Ae+BI+CJ+DK))+ (a1+b1i+c1j+d1k+ A1e+B1I+C1J+D1K);

левая часть:

=(a-bi-cj-dk-Ae-BI-CJ-DK)+(a1-b1i-c1j-d1k- A1e-B1I-C1J-D1K);



правая часть:

= (a-bi-cj-dk-Ae-BI-CJ-DK);



=( a1-b1i-c1j-d1k- A1e-B1I-C1J-D1K);



+=(a-bi-cj-dk-Ae-BI-CJ-DK)+(a1-b1i-c1j-d1k-A1e-B1I-C1J-D1K).



Отсюда следует, что

:= +.



5) =.



Пусть

w = u+ ve, w1 = u1+ v1e,

где u, u1 v, v1 - кватернионы.

Так как

w w1= (u+ ve) ( u1+ v1e) = (uu1 - v) + (v1u+vū1)e,



то

= + (v1u+vū1)e= (ū1ū -v) - (v1u+vū1)e.



С другой стороны:

= (ū1 - v1e) (ū - ve) = (ū1 ū -(- (-v1))+(- vū1 -v1) = (ū1ū -v1) - (vū1 +v1u)e.



В силу совпадения правых частей полученных равенств и следует тождество 5.

6) w+w1=2 (aa1+bb1+cc1+dd1+A A1+BB1+CC1 +DD1) R,



Если

w= a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK, w1 =a1+b1i+c1j+d1k+ A1e+B1I+C1J+D1K.

Пусть

w = u+ ve, w1 = u1+ v1e,

где u, u1 v, v1 - кватернионы. Так как

w=(u+ ve) (ū1 - v1e) = (u ū1+v)+(- v1u+ v1)e = (u ū1+v)(vu1 –v1u)e



а w1=( u1+ v1e) (ū - ve) = (u1ū+ v1) + (-vu1+v1u)e,



то сложив эти два равенства, получим:

w+ w1= (u ū1+v+u1ū+ v1) + (- v1u+ vu1 - vu1+v1u)e= (u ū1+u1ū +v + v1) + 0e = u ū1+u1ū +v + v1 .



В силу свойства 6) сопряженных кватернионов имеют место:

u ū1+u1ū =2 (aa1+bb1+cc1+dd1),

v + v1 = 2 (A A1+BB1+CC1 +DD1),



u = a+bi+cj+dk, u1 = a1+b1i+c1j+d1k,

v = A+Bi+Cj+Dk, v1 = A1+B1i+C1j+D1k.

Тогда из последних равенств следует

w+ w1= 2 (aa1+bb1+cc1+dd1+A A1+BB1+CC1 +DD1).



4.1 Модуль октавы

Определение. Модулем октавы

w=a+bi+cj+dk+Ae+BI+CJ+DK

называется



Модуль октавы w обозначается |w|. Следовательно,

|w| = .



Из свойства 2) сопряженных октав следует |w|2 = w=w. Модуль октавы обладает свойствами:



1) |w| ≥ 0 и |w| = 0 w=0;



2) |w w1| = |w|\*|w1|.

Действительно,

|w w1|2 = (w w1)() = (w w1) () = w(w1\*)= w|w1|2= |w1|2 w= |w1|2|w|2,



Откуда

|w w1| = |w||w1|



Равенство |pq| = |p| |q| после возведения обеих частей в квадрат в развернутом виде имеет вид:



|w w1| = |w| \* |w1|.

(a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2) () = (aa1 - bb1 - cc1 - dd1 - AA1 -BB1 - CC1 - DD1)2 +(ab1 + a1b + cd1 -c1d - A1B + B1A + C1D - CD1)2 +(ac1 + a1c - bd1 + b1d - a1c + ac1 - b1d + bd1)2 +(ad1 + a1d+ bc1 - b1c - a1d + ad1 + b1c - bc1)2 +(a1a - b1b - c1c -d1d + Aa1 + Bb1 + Cc1 + Dd1)2 +



(a1b+ b1a + c1d-d1c - Ab1 + Ba1 - Cd1 + Dc1)2 +(a1c+ c1a - b1d+ d1b - ac1 + ca1 + bd1 - db1)2 +(a1 d+ d1a+ b1c- c1b - ad1 + da1 - bc1 + cb1)2.

Это равенство можно сформулировать так: произведение суммы квадратов восьми действительных чисел на сумму квадратов других восьми действительных чисел равно сумме квадратов восьми действительных чисел.

Если

w/= bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK

- чисто мнимая октава, то

w/2= (bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK) (bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK) = b2 - c2 - d2 - A2 - B2 - C2 - D2 = -(b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2) ≤ 0,

т.е. квадрат чисто мнимой октавы w/ есть неположительное действительное число.

Можно показать и обратное: если квадрат октавы есть неположительное действительное число, то эта октава - чисто мнимая. Действительно, если октаву w= a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK представить в виде w = а + w/, где w/ - чисто мнимая октава

bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK, a, aR, то



w2 = (а + w/)(а + w/) = a2+ w/2+2a w/ =a2- b2 - c2 - d2 - A2 - B2 - C2 - D2 +2a w/.

Если это выражение есть действительное число и а ≠ 0, то w/= 0. Но тогда w=а, и следовательно, w2 = а2 не может быть ≤ 0. Следовательно, только октавы вида

w/= bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK

могут обладать тем условием, что их квадраты являются неположительными действительными числами. С учетом этого, октаву можно представить в виде w = а + w/ где a ,aR, w/2≤ 0. Тогда сопряженная ей октава = а –p /.



В ходе доказательства непротиворечивости системы аксиом алгебры октав мы получили, что

(u; v)-1 = ; -.



Так как (и; v) = и + ve, то тогда

(и + ve)-1 = -.



Если

u = a+bi+cj+dk, v = A+Bi+Cj+Dk,

это означает, что

(a+bi+cj+dk+Ae+BI+CJ+DK)-1== ,



если

w = и + ve = a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK.

Итак, октава, обратная октаве w, есть октава .



Покажем, что в алгебре октав имеет место равенство:

(ww1) 1 = w(w11).



Пусть w = u+ ve, w1 = u1+ v1e, где u, u1 v, v1 K, Тогда:



(ww1)1 = ((u+ ve)( u1+ v1e))(ū1 - v1e) = ((uu1 -v)+ (v1u+ v ū1)e)(ū1 - v1e) = ((uu1 -v)ū1+ (v1u+ v ū1))+(-v1(uu1 -v)+ (v1u+ v ū1)1)e = (uu1 ū1 -vū1+ v1u+ vū1) +(-v1uu1 +v1v + v1u u1+ vū1u1)e = (u|u1|2 + |v1|2u)+(v|v1|2 + |u1|2v)e = u(|u1|2+ |v1|2)+ v(|v1|2 + |u1|2)e = (|u1|2+ |v1|2)( u+ ve) = |w1|2w.



< ><С другой стороны,

w(w11) = w|w1|2.



Сравнивая правые части этих равенств, получаем:

(ww1) 1 = w(w11).



Покажем также, что в алгебре октав имеет место равенство:

1(w1w) = (1w1)w).



Действительно,

1(w1w) = (ū1 - v1e)((u1+ v1e)(u+ve)) = (ū1 - v1e) ((u1u-v1 )+(vu1+ v1ū)e) = (ū1(u1u--v1 ) – ()(-v1))+((vu1+ v1ū)ū1 - v1())e = (ū1(u1u-v1 ) + (ū1+ u)v1) + ((vu1+ v1ū)ū1 - v1(ū ū1 - v))e= (ū1u1u- ū1v1 + ū1v1+ uv1) + (vu1 ū1+ v1ūū1 - v1ūū1 - v1v)e =(|u1|2u + u|v1|2)+(v|u1|2 + |v1|2v)e = (|u1|2+ |v1|2)u + (|u1|2 + |v1|2)ve = (|u1|2+ |v1|2)( u+ ve) = |w1|2w..



С другой стороны,

(1w1)w = |w1|2w.



Сравнивая правые части этих равенств, получаем:

1(w1w) = (1w1)w.



Рассмотрим уравнение wх = w1, где

w = и + ve = a+bi+cj+dk+ Ae+BI+CJ+DK,

w1 =a1+b1i+c1j+d1k+ A1e+B1I+C1J+D1K.

- известные октавы, а х - неизвестная октава. Умножим слева это уравнение на , w ≠ 0. Тогда:



(wх) = w1 (w)х = w1 |w|2 х = w1  х = w1 .



В этом случае октава х называется левой частной от деленияоктавы w1ww на октаву w.

Аналогично, решением уравнения yw = w1 является

yy y = w1,



называемый правым частным от деления октавы w1ww на октаву w.

Найдем квадратный корень из октавы

ww w = a + bi + cj + dk + Ae + BI + CJ + DK.

Значение квадратного корня из этой октавы будем искать как октаву

θ= x + yi + zj + tk +Xe + YI + ZJ + TK ,

где x, y, z, t, X, Y, Z, T R, удовлетворяющий условию θ 2 = w. Следовательно,



(x + yi + zj + tk +Xe + YI + ZJ + TK)( x + yi + zj + tk +Xe + YI + ZJ + TK) = a + bi + cj + dk + Ae + BI + CJ + DK x2 – y2 – z2 – t2 -X2 – Y2 – Z2 – T2+ 2xyi + 2xzj + 2xtk + 2xXe + 2 xYI +2xzj + 2xtk = = a + bi + cj + dk + Ae + BI + CJ + DK



Если x ≠ 0, тo из первого уравнения системы следует, что

4х4 - 4ах2 – (b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2) = 0



x2= (a± ) = (a± |w|).



Так как х2 ≥ 0, то х2 = (a± |w|), откуда x=± .Определив х, значения y, z, t, X, Y, Z, T находим из равенств



y = , z = , t = , X = , Y = , Z = , T = .



Из рассмотрения свойств кватернионов и октав можно заметить, что у этих числовых систем много общего. Алгебраические формы записи элементов этих числовых систем представляют собой некоторые многочлены от действительного числа и мнимых единиц с действительными коэффициентами. Одинаковым образом вводится понятие элемента сопряженного данному элементу. Свойства сопряженных элементов одни и те же, в некоторых случаях лишь с поправкой на число мнимых единиц. Понятие модуля кватерниона и октавы вводится одинаковым образом и обладает одинаковыми свойствами. То, что квадрат чисто мнимого кватерниона или октавы есть неположительное действительное число, дает для них возможность записи в виде а + t, где а R и t2 ≤ 0. Формула извлечения корня квадратного как из кватерниона, так и из октавы одна и та же, опять-таки с учетом количества мнимых единиц. При внимательном подходе к аксиоматическому определлллению этих числовых систем так же можно заметить общий подход к построению моделей этих числовых систем. Это так называемый метод удвоения, который заключается в том, что при введении нового числового множества мы строим декартов квадрат предыдущего чисссслового множества и новые числа рассматриваем как упорядоченные пары из чисел предыдущего числового множества. Так, удвоением множества действительных чисел получили множество комплексных чисел, удвоением множества комплексных-чисел - множество кватернионов, удвоением множества кватернионов - множество октав, причем операции сложения и умножения в построенных моделях определялись совершенно одинаково. Такими же свойствами обладает и множество комплексных чисел, однако, в силу того, что их. свойства хорошо изучены на младших курсах, здесь ограничились лишь аксиоматическим построением этой числовой системы.



Теорема Фробениуса, которую мы рассмотрели в , поле комплексных чисел и тело кватернионов анализирует с общей точки зрения, как частные случаи ассоциативной линейной алгебры с делением и содержащей единицу. В дальнейшим мы попытаемся установить общий подход к таким числовым системам, как поле комплексных чисел, тело кватернионов и алгебра октав.

4.2 Алгебраическое сопряжение

Определение. Алгебраическим сопряжением называется сопряжение, которое в сочетании с операцией умножения позволяет в любой алгебре получать действительное число. Как видим, различий относительно сопряжения по мнимой единице два - во-первых, отсутствует требование использования операции сложения и во-вторых в сочетании с произведением требуется получение числа именно алгебры действительных чисел, а не одной из предшествующих удвоению.

.



Или, алгебраическое сопряжение используется для определения модуля числа алгебры.

Для того, чтобы получить действительное число в случае произвольной гиперкомплексной алгебры, следует придумать процедуру, с помощью которой можно отбросить все мнимые единицы. Наиболее простой операцией сопряжения, при этом похожей на определенное выше сопряжение, является операция смены знаков сразу у всех мнимых единиц числа, безотносительно способа их получения и их свойств:

.



Сменив знаки при всех мнимых единицах, получим:

.



Естественно, что столь вольное обращение с мнимыми единицами не может гарантировать, что является действительным числом. Но при этом отметим, что сумма как раз является действительным числом. Таким образом, нам нужно отображение, которое произведению в одной области сопоставляет сложение в другой и наоборот. Такой операцией является пара отображений - логарифмирование и потенцирование. Еще раз напомним их свойства:



,



,



в случае, если a и b коммутируют по умножению.

Таким образом, для получения числа, алгебраически сопряженного заданному, нужно найти его логарифм, сменить знаки у всех мнимых единиц и потенцировать.

Любое число любой гиперкомплексной алгебры естественным образом коммутирует как само с собой, так и с действительным числом, поэтому

.



Или, если

, то .



Среди свойств алгебраического сопряжения отметим весьма важные:

- сопряженное произведения равно обратному произведению сопряженных:

,



,



- в некоторых алгебрах алгебраическое сопряжение совпадает по результату с сопряжением по действительных чисел, все виды сопряжения в ней совпадают. Сопряжение по мнимой единице:

.



a) Алгебраическое сопряжение:

;



,



то есть смена знаков мнимых единиц после логарифмирования эквивалентна смене знака у мнимой единицы самого числа:

.



Здесь одинаково обозначены сопряжение по мнимой единице и алгебраическое. Полагаю, пока нет совмещения сопряжений в одной формуле, разночтений возникнуть не должно.

б) кватернионы.

Кватернионы имеют строение:



и получены некоммутативным удвоением алгебры комплексных чисел:

.



Мнимая единица удвоения j не коммутирует с единицей i, поэтому сопряжение по ней требует сопряжения также и по i и по k:

.



Алгебраическое сопряжение в кватернионах, также как в комплексных числах, просто меняет знак у компонент при мнимых единицах:

.



То есть в кватернионах сопряжение по мнимой единице и алгебраическое сопряжение так же совпадают.

§5 .Некоторые тождества для октав

Приведем основные тождества, применимые к октавам. Тождества базируются на понятии ассоциатора, коммутатора и йорданова произведения.

()=- ассоциатор;



- коммутатор;



- йорданово произведение.



Линеаризуя тождества, несложно получить, что

& .



Таким образом, ассоциатор есть кососимметрическая функция от x, y, z. В частности:.



.



Алгебры, удовлетворяющие этому условию, называются эластичными. Таким образом, алгебра октав эластична. Покажем на основе эластичности тождество:

,



.



В силу того, что для октав всегда есть действительное число, а в силу эластичности, получаем:



.



Таким образом, для эластичной алгебры справедливо:

.



Функция Клейнфелд:

.



Лемма1. - кососимметрическая, для любой пары равных аргументов



.



В силу правой альтернативности

.



Во всякой алгебре справедливо тождество:

.



Достаточно раскрыть все ассоциаторы. Обозначив левую часть этого равенства через , получим:



Поменяв местами: получим: .



Используя , получим, что при любых одинаковых аргументах. Из этого следуют тождества:



1) ;



2) ;



3) ;



4) .



Тождества Муфанг.

Правое тождество Муфанг: ;



Левое тождество Муфанг: ;



Центральное тождество Муфанг: .



Вопросы о строении простых алгебр в том или ином многообразии являются одними из главных вопросов теории колец. Мы уже знаем один пример простой неассоциативной альтернативной алгебры - это алгебра Кэли-Диксона. Оказывается, что других простых неассоциативных альтернативных алгебр не существует. Этот результат доказывался с нарастанием общности на протяжении нескольких десятков лет разными авторами: вначале для конечномерных алгебр (Цорн, Шафер), затем для алгебр с нетривиальным идемпотентом (Алберт), для альтернативных тел (Брак, Клейнфелд, Скорнаков), для коммутативных альтернативных алгебр (Жевлаков) и т. д. Наибольшее продвижение было получено Клейнфелдом, доказавшим, что всякая простая альтернативная неассоциативная алгебра, не являющаяся ниль-алгеброй характеристики 3, есть алгебра Кэли-Диксона. Окончательное описание простых альтернативных алгебр осуществилось после появления теоремы Ширшова о локальной нильпонентности альтернативных ниль-алгебр с тождественными соотношениями.

§6. Теорема Гурвица

6.1 Нормированные линейные алгебры

Пусть -линейная алгебра ранга п над полем действительных чисел и х, у А. Если e1, e2, ..., еn - базис А, то:



х = х1е1 + х2е2 + .... + хпеп, у = y1е1 + y2е2 + .... + yпеп. .

Определение. Скалярным произведением элементов х, у А называется сумма х1у1 + х2у2 + ... + хпуп.



Обозначение скалярного произведения:

(х, у) = х1у1 + х2у2 + ... + хпуп.

В частности:

(х, х) = ++… +.



Скалярное произведение элементов х, уА должно удовлетворять общим условиям скалярного произведения в линейных пространствах:



1)для любых х, у А (х, у) ≥ 0 и (х, х) = 0 тогда и только тогда, когда х = 0;



2)для любых х, у А имеет место (х, у) = (у, х);



3)для любых х, у А и А R имеет место (λх, у) = (х, λу) = λ(х, у):



4)для любых х, у, z А имеет место (х, у + z) = (х, у) + (х, z).



Определение. Линейная алгебра называется нормированной, если в ней можно ввести скалярное произведение для любых х, у А таким образом, чтобы выполнялось равенство:



(ху, ху) = (х, х)(у, у) . ()



Если положим =|х|. то равенство () записывается в виде:



|ху| = |х| |у|.



Из (ху, ху) = (х, х)(у, у) следует, что если ху = 0, то либо х = 0, либо у = 0. В самом деле, тогда

(0, 0) = (х, х)(у, у) (х, х)(у, у) = 0,



откуда либо (х, х) = 0, либо (у, у) = 0. А тогда либо х = 0, либо у =0.

Лемма 1. Любой элемент линейной алгебры молено разложить на два слагаемых, одно из которых пропорционально какому-либо ненулевому элементу, а другое ортогонально ему.

Пусть e А, и ue, а - произвольный элемент из А. Покажем, что найдется такое k R, что a - kee. Тогда:



a - kee (a – ke, e) = 0 (a, e) – k(e, e) = 0.



Скалярное, произведение (е, е) ≠ 0, так как е ≠ 0. Тогда а = kе + (а - kе) = kе + u, где u = a - kee.



Следствие. Если - линейная алгебра с единицей 1, то для любого а А имеет место а = k1 + u, где u 1.



Пример 1. Пусть (C, +, .R, .) - поле комплексных чисел. Базисом в С являются 1, i. Скалярное произведение двух комплексных чисел z =а+bi и u =с+ di определим как (z, u) = (zū + u).



Так как

zū = (а+ bi)(с- di) = (ac+bd)+(bc-ad)i,

u= (с+ di)( а-bi) = (ac+bd)+(ad-cb)i,



то (z, u) = (zū + u) = ac+bd.



В частности,

(z, z) = (z + z) = z= |z|2 = a2+b2.



Так как,

zu = (ac-bd)+(ad+bc)i,

то (zu, zu) = ((zu)\*()+( zu)( ))=( zu)()=|zu|2 = (ac-bd)2+( ad+bc)2=



a2с2-2abcd + b2d2 + a2d2 + 2abcd + b2c2 = a2c2 + a2d2 + b2c2 + b2d2 =

a2 (c2 + d2) + b2 (c2 + d2) = (a2 + b2)(c2 + d2) = | z |2 | u |2 = (z, z)(u, и),



т.е. выполняется

(zu, zu) = (z, z)(u, и).

Проверим выполнение условий скалярного произведения:

1) (z, z) = | z |2 = a2 + b2 ≥ 0 и (z, z) = a2 + b2 = 0 a= 0 b= 0 z=0;



2) (z, u) = (zū + u) = ( u+zū) =(u, z);



3) (z, ku) = (z +(ku) ) = k(zū + u) =k(z, u);



4) (z, u+v) = (z +( u+v) ) = (zū+z+ u+ v) =(zū+ u)+ ( z+ v) = (z+u)+(z+v).



Итак, все условия скалярного произведения при

(z, u) = (zū + u)



выполнены для комплексных чисел z и u.

Пример 2. Пусть - тело кватернионов. Базисом в К являются 1, i, j, k. Если



р = a+bi+cj+dk, q = a1+b1i+c1j+d1k,

то по свойству 6 сопряженных кватернионов

p + q = 2(aa1 + bb1 + cc1 + dd1).



Возьмем в качестве скалярного произведения двух кватернионов р и q выражение

(p + q) = aa1 + bb1 + cc1 + dd1.



Итак,

(p, q) = (p + q).



В частности,

(p, p) = (p + p)= p = |p|2 = a2+ b2 + c2 + d2.



Проверим выполнение условий скалярного произведения:

1) (p, p) = |p|2 = a2+ b2 + c2 + d2 ≥ 0 и (p, p) = a2+ b2 + c2 + d2 = 0 a= 0 b= 0 c= 0 d= 0 p=0;



2) (p, q) = (p + q) = ( q+ p) = (q; p);



3) (p, kq) = (p +(kq) ) = k(p + q) =k(p, q);



4) (p, q1+q2) = (p +(q1+q2) ) = (p1+ p2+ q1+ q2) =(p1+ q1) + (p2+ + q2) = (p+q1)+(p+q2).



Проверим равенство:

(pq, pq) = (p, p)(q, q).

В самом деле,

(pq, pq) = ((pq) \* () + (pq) \* ()) = ((pq) \* () + (pq) \* ()) = (pq) \* () = p(q)= |q|2 p=|p|2 + |q|2 = (a2 + b2 + c2 + d2)\* () = (p,p ) (q, q).



Итак, все условия скалярного произведения при

(p, q) =(p + q)



выполнены для кватернионов р и q.

Пример 3. Пусть - алгебра октав. Базисом в U являются 1, i, j, k, e, I, J, K.



Если

w =и+ve =a+bi+cj+dk+Ae+BI+CJ+DK, и w1 =a1+b1i+c1j+d1k+ A1e+B1I+C1 J+D1K,

то по свойству 6) сопряженных октав

w+w1=2 (aa1+bb1+cc1+dd1+A A1+BB1+CC1 +DD1).



Возьмем в качестве скалярного произведения двух октав w и w1 выражение

(w+w1) =aa1+bb1+cc1+dd1+A A1+BB1+CC1 +DD.



Итак,

(w, w1) = (w+w1).



В частности,

(w, w) = (w+w) = w = | w |2 = a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2 .



Проверим выполнение условий скалярногопроизведения:

1) (w, w) = | w |2 = a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2 ≥ 0 и (w, w) = a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2 a= 0 b= 0 c= 0 d= 0 A = 0 b= 0 c= 0d= 0 w = 0;



2) (w, w1) = (w1+w1) = (w1+w1) =(w1, w);



3) (w, kw1) = (w(1)+(kw1)) = k(w1+w1) =k(w1, w);



4) (w, w1+ w2) = (w+(w1+w2) ) = ( w1 + w2+ w1+ w2) = (w1 + w1) +(w2+w2) = (w, w1)+( w, w2).



Проверим равенство:

(ww1, ww1) = (w, w)(w1, w1).

Действительно,

(ww1, ww1) = (( ww1)() + (ww1)()) = (( ww1)(1) + (ww1)(1)) = (ww1)(1) = w(w11) = | w1 |2\* w11 = | w |2 \*| w1 |2 = (a2 + b2 + c2 + d2 + A2 + B2 + C2 + D2) \* () = (w, w)(w1, w1).



Итак, все условия скалярного произведения при

(w, w1) = (w1+w1)



для октав w и w1 выполнены.

Лемма 2. В любой нормированной линейной алгебре имеет место тождество:



(a1b1,a2b2) + (a1b2, a2b1) = 2(а1, a2)(b1, b2). (1)

Подставим в основное тождество () данной нормированной линейной алгебры вместо х сумму a1 + а2, а вместо у - элемент b. Тогда:



((a1 + а2)b, (а1 + a2)b) = (a1 + а2, а1 + а2)(b, b)



(a1b + a2b, a1b + a2b) = (a1+a2, a1+a2)(b, b)



(a1b + a2b, a1b) + (a1b + a2b, a2b) =

(а1, a1)(b, b) + (a2, a2)(b, b) + 2(a1, a2)(b, b)



(a1b, a1b) + (a2b, a2b) + 2(а1b, a2b) =

(a1, a1)(b, b) + (a2, a2)(b, b)+2(a1, a2)(b, b). (2)

Но в силу условия ():



(a1b, a1b) = (a1, a1)(b, b); (a2b, a2b) = (a2, a2)(b, b).

Тогда из (2) следует

(a1b,a2b) = (a1, a2)(b, b). (3)

Заменим в (3) b на сумму b1 + b2:

(a1(b1 + b2), a2(b1 + b2)) = (a1, a2)(b1 + b2, b1 + b2)



(a1b1+a1b2, a2b1+a2b2) = (a1, а2)((b1, b1)+(b2, b2)+2(b1, b2))



(a1b1, a2b1) + (a1b1, a2b2) + (a1b2, a2b1) + (a1b2, a2b2) =

(a1, a2)(b1, b1) + (a1, a2)(b2, b2) + 2(a1, a2)(b1, b2). (4)

Но в силу (З):

(a1b1, a2b1) = (a1, a2)(b1, b1); (a1b2, a2b2) = (a1, a2)(b2, b2).

Тогда из (4) следует

(a1b1, a2b2) + (a1b2, a2b1) = 2(a1, a2)(b1,b2),

что и требовалось доказать.

Лемма 3. В нормированной линейной алгебре с единицей имеет место равенство



(аb) = (b, b)а. (5)



Докажем это равенство для случая b 1 . По следствию из леммы 1 тогда для любого х А имеет место х = k1 + b, откуда при х = b следует k = 0. В этом случае



= - b.



Рассмотрим элемент с = (ab) - а, где = (b, b).



В силу свойств скалярного произведения имеем:

(с, с) = ((аb) - а, (аb) - а) =((аb) , (ab) ) + 2(a, а)- 2((ab) , а). (6)



Упростим первое слагаемое в правой части равенства (6):

((аb) , (ab) ) = (ab, аb)( , ) = (а, а)(b, b)( , ) = (a, а)(b, b)2 = 2(а, а).



Для упрощения третьего слагаемого в правой части равенства (6) воспользуемся тождеством (1), записав его в виде:

(а1b1, а2Ь2) = 2(а1, a2)(b1, b2) - (a1b2, a2b1).

Положив a1 = ab, b1 = , a2 = a, b2 = 1, получим:



((аb) , a) = 2(ab, а)( , 1) - (ab, а). (7)



Так как

b1, то (, 1) = (-b, 1) = -(b, 1) = 0.



Далее:

-(ab, а) = -(ab, а(-b)) = (ab, ab) = (a, a)(b, b) = (а, а).



Тогда:

((аb) , а) = (а, а).



Отсюда в равенстве (6) получаем:

(с, с) = 2(а, а) + 2(а, а) - 22(а, а) = 0.



Так как (с, с) = 0, то с = 0, или (ab) - а = 0, откуда



(аb) = а = (b, b)a.



Если b не ортогонален 1, то b = k1 + b/, где b/ 1. Тогда



= k1 - b/ и (аb) = (а(k1+ b/))(k1- b/) = k2а - (ab/)b/ = k2а + (аb/)/.



Так как по доказанному выше:

(аb/)/.= (/,/)а, то (аb) = k2a + (b/, b/)a = [k2 + (b', b')]a = (b, b)a,



так как

(b, b) = (k1+ b/, k1+ b/) = k2(1, l) + (b', b')+2k(b', l) = k2 + (b', b')

в силу того, что (1, 1) = 1 и (b/ , 1) = 0, так как b/ 1.



Следствие 1. В нормированной линейной алгебре с единипей имеет место равенство



(ах)+(ау) = 2(х,у)а. (8)



Подставим в тождество (5) вместо b сумму х + y. Тогда

(а(х + у))() = (х + у, х + у)а (а(х + у))( +) = ((х, х) + (у, у) + 2(х, у))а (ах) + (ау) + (ах) + (ау) = (х, х)а+(у, у)а + 2(х, у)а.



В силу тождества (5):

(ax)= (х, х)а, (ау) = (у, у)а.



Тогда:

(ах) + (ау) = 2(х, у)а,



что и требовалось доказать.

Следствие 2. Нормированная линейная алгебра с единицей является альтернативной линейной алгеброй.



Если в равенстве (5) (ab) = (b, b)a положить а = 1, то получается b = (b, b)l = (b, b). Тогда (ab) = a(b), откуда следует, что (ab)b = a(bb).



Аналогично можно доказать, что b(ba) = (bb)a.

Отсюда следует, что алгебра является альтернативной линейной алгеброй.



п. п. 6.2 Теорема Гурвица

Пусть - линейная алгебра с единицей. Согласно Лемме 1 каждый элемент а А однозначно представляется в виде



а = k1+ а', где k R и а' 1.



В алгебре введем операпию сопряжения: элемент, сопряженный элементу а, есть элемент ā = k1- а' Если а = kl, то а' = 0 и ā = k1, т.е. ā = а. Если же а 1, то ā = - а.



Имеют место:

а) ā = а;

б) () = = = (k+l)1-(a/ + b/) = (k1 – a/)(l1 – b/).



Пусть - подалгебра алгебры ,содержащая 1 и не совпадающая с .Выберем в В базис 1, i1, i2, … in, такой, что i1  1, i2 1, … in 1. Тогда любой элемент b B имеет вид: b = bо + b1i1 + b2i2 + … + bnin , а сопряженный ему элемент b = b0 - b1i1 - b2i2 - … - bnin, откуда и В.



Пусть е - единичный элемент, ортогональный В, т.е. для любого b В имеет место e b.



Рассмотрим множество В + Be = {b1 + b2e|b1, b2 В}. Покажем, что есть снова подалгебра алгебры .



Лемма 4. Подпространства и ортогональны друг другу, т.е. для любых u1, u2 B имеет место u1u2e.



Для доказательства этого факта в тождестве (1) положим вместо

а1 = u1, b1 = u2, a2 = e, b2 = 1.

Тогда

(u1u2, e) + (u1, eu2) = 2(u1, e)(u2, 1).

Так как u1, u2 В, то u1u2 В, а тогда u1u2 e, u1 e.



Значит,

(u1, u2e) = 0, (u1, e) = 0.

Тогда:

(u1, u2e) = 0, т.е. u1 u2e.



Теорема 1.

Представление любого элемента из В + Be в виде u1+ u2e, где u1, u2 В, единственно.



Пусть

u1 + u2e = u1/ + u2/e u1 - u1/ = (u2/ - u2)e,



откуда следует, что v=u1 - u1/ принадлежит одновременно двум ортогональным подпространствам В и Be. Тогда (v, v) = 0, откуда v = 0. Следовательно, u1 - u1/ = 0 и (u2/ - u2)e = 0. Из второго равенства либо u2/ - u2 = 0, либо е = 0. Но е ≠ 0, следовательно, u2/ - u2= 0. Тогда u1 = u1/ и u2 = u2', т.е. представление элемента из В + Be в виде u1 + u2e единственно.

Лемма 5. Для любых u, v А имеет место



(ue)v = (u)e. (9)



Воспользуемся тождеством (8) из следствия к лемме 3, положив в нем а = u, х = е, у = . Тогда:



(ue)v + (u)= 2(е, )u.



Так как е, то



(е, ) = 0 и (ue)v + (u)= 0.



Но = -е, так как е 1, тогда:



(ue)v + (u)(- е) = 0 (ue)v = (u)e.



Лемма 6. Для любых u, v A имеет место



u(ve) = (vu)e. (10)

Если в том же равенстве (8) положить а = 1, х = u, у = ve, то получаем:

(1\*u)ve + 1\*()ū = 2(u, ) \* 1 u(ve) + ()ū = 2(u, ).



Так как u ve, то u , = -ve, в силу того, что из ve В следует ve 1. Следовательно,



u(ve) + (-ve)ū = 0 u(ve) = (ve)ū.



Воспользовавшись равенством (9), получаем, что (ve)ū = (vu)e. Тогда:

u(ve) = (vu)e.

Лемма 7. Для любых u, v А имеет место



(ue)(ve) = -u. (11)



Прежде всего убедимся, что если формула (11) верна при v = с и при v = d, то она имеет место и при v = c + d. Действительно, если

(uе)(се) = -u и (ue)(de) = -u, то



ue((c + d)e) = (ue)(ce + de) = (ue)(ce) + (ue)(de) = -u - u = - ( + )u.



Так как для любого v В имеет место v = k1+ v/, где v/ 1, то докажем равенство (11) по отдельности для k1 для v/. Тогда на основании сделанного выше замечания, равенство (11) будет справедливо и для v.



Итак, пусть v = k1, откуда (11) принимает вид:

k(ue)e == -ku (ue)e = -u -(ue) = -(e, e)u (uе) =u,



которое верно в силу равенства (5), если учесть, что = -е и (е, е) = 1.



Пусть теперь vl. Тогда = -v. Полагая в том же равенстве (8) а = u, х = е, у = -ve, получаем:



(ue)(ve) + (u(-ve)) = 2(е, - ve)u (ue)(ve) - (u(ve)) = -2(е, ve)u. (12)



Но (е, ve) в силу тождества (3) равно (1, v)(e, e) = 0, так как по условию v1. В ситу (10) второе слагаемое в последнем равенстве (12) равно



-(u(ve)) = -((vu)e) = -vu = u (ue)(ve) = -u.



Теорема 2. Для любых u1 +u2e В+Be и v1 + v2e В+Be имеет место равенство:



(u1 + u2e)(v1 + v2e) = (u1v1 – 2u2) + (v2u1 + u21)e. (13) (13)



Воспользовавшись равенствами (9), (10) и (11), получаем:

(u1 + u2e)(v1+ v2e) = u1v1 + (u2e)v1 + u1(v2e) + (u2e)(v2e) = u1v1 + (u21)e + (v2u1)e - 2u2 = (u1v1 - 2u2) + (v2u2 + u21)e.



Теорема З. Любая подалгебра алгебры ,содержащая единицу и не совпадающая со всей алгеброй ,ассоциативна, т.е. для любых u, v, w А имеет место (uv)w = u(vw).



Снова воспользуемся равенством (8), положив в нем а =ve, х = , у = ūe. Тогда



((ve))(-ue) + ((ve)(ūe))w = 2(, ūe)(ve).



Так как

(, ūe) = (\*1, ūe) = 0



в силу того, что \*1 ūe, то



((ve))(-ūe) +((ve)(ūe))w = 0.



Применив равенства (9) и (10), получаем:

u(vw) - (uv)w = 0, откуда (uv)w = u(vw).

Замечание: Так как алгебра содержит единицу, то в ней имеется подалгебра, состоящая из элементов вида k1, где k R. Эта подалгебра изоморфна алгебре действительных чисел, обозначим ее D. Если в предыдущих рассуждениях в качестве В взять подалгебру D, то е будет любой вектор длины 1, ортогональный к 1.



Из формулы (13) тогда следует, что

е2 = (0 +1\* е)(0 +1\* е) = (0\* 0 - \* 1) + (1\* 0 + 1\*)е = -1 + 0\* е = -1.



Отсюда можно сделать вывод, что квадрат любого вектора a1 1 равен 1, где ≤ 0.



Докажем и обратное: если квадрат какого-либо элемента равен 1, где ≤ 0, то этот элемент ортогонален 1. В самом деле, квадрат любого элемента, не ортогонального 1, т.е. элемента вида а = k1+a/ где k ≠ 0 и a/ 1, равен



(k1+ a/)(k1 + a/) = k21 + а'2 + 2ka/ = k21 + 1 + 2k a/.



Если это выражение пропорционально 1, то а/ = 0, следовательно, а = kl, но квадрат k1 не может равняться 1, где ≤ 0.



Отсюда следует, что элементы, ортогональные 1, и только они характеризуются тем свойством, что их квадраты равны 1, где ≤ 0. Тогда для произвольного элемента а А берется его единственное представление в виде



а = k1+a/, где а/2 = 1 и ≤ 0,



а сопряженный ему элемент в виде ā = k1 - a'

Теорема Гурвица. Любая нормированная линейная алгебра, с единицей над полем действительных чисел изоморфна одной из четырех алгебр: полю действительных чисел, полю комплексных чисел, телу кватернионов или алгебре октав.

Пусть - нормированная линейная алгебра с единицей над полем действительных чисел, а - ее подалгебра, содержащая 1, е B, где е - единичный вектор. Как мы показали ранее, является подалгеброй алгебры (A, +, .R, .). Из теорем 1 и 2 следует, что.изоморфна удвоенной подалгебре .



Рассмотрим подалгебру , изоморфную полю действительных чисел (R, +, .). Если она не совпадает со всей алгеброй ,то найдется единичный вектор е D. Составим подалгебру , изоморфную удвоению , а следовательно, изоморфную полю комплексных чисел. Назовем ее комплексной подалгеброй алгебры . Из того, что сказано выше о сопряжении в алгебре , вытекает , что для элементов из D + De сопряжение совпадает с обычным сопряжением комплексных чисел.



Если, в свою очередь, подалгебра ,где С = D + De, не совпадает со всей алгеброй ,то опять-таки найдется единичный вектор е/ С. Составим подалгебру изоморфную удвоению , а следовательно, и изоморфную телу кватернионов. Назовем ее кватернионной подалгеброй алгебры. Из вышесказанного о сопряжении в алгебре следует, что для элементов из С+Се/ сопряжение с впадает с обычным сопряжением в теле кватернионов.



Если, в свою очередь, подалгебра , где К = C+Ce', не совпадает со всей алгеброй , то снова найдется единичный вектор е" K. Составим подалгебру изоморфную удвоению , а следовательно, и изоморфную алгебре октав.



Но эта подалгебра , где U = К + Ке// совпадает уже c самой алгеброй ,так как по теореме 3 любая подалгебра алгебры , содержащая 1 и не совпадающая со всей алгеброй , ассоциативна. А так как умножение октав не ассоциативно, а в ее подалгебре (теле кватернионов) оно ассоциативно, то подалгебра совпадает со всей алгеброй .



Резюмируя вышеизложенное, мы получаем, что если алгебра не изоморфна ни одной из алгебр , или , то она изоморфна алгебре октав ,что и доказывает утверждение теоремы Гурвица.



§7. Обобщенная теорема Фробениуса

Теорема. Любая альтернативная линейная алгебра над полем действительных чисел с делением является нормированной линейной алгеброй.

Пусть - альтернативная линейная алгнбра с делением над полем действительных чисел R. Введем в A операцию сопряжения следующим образом: если элемент а A пропорционален 1, то ā = а; если же а не пропорционален 1. то он содержится в комплексной подалгебре . В этой подалгебре для элемента а имеется сопряженный элемент ā, который и примем за элемент, сопряженный к а в алгебре .



Из определения ā непосредственно следует, что = а, а также =kā, где k R.



Пусть а A не пропорционален 1. Рассмотрим кватернионную подалгебру (K, +, .R, .), содержащую а. В этой подалгебре для а A тоже имеется сопряженный элемент ā. Покажем, что а совпадает с ā.



Элементы а и ā, как сопряженные в комплексной алгебре, удовлетворяют условиям:

а+ā = 2а\* 1, где а R, (14)



а\* ā = d\*1, где d R. (15)



Элементы а и ā, как сопряженные в кватернионной алгебре, удовлетворяют условиям:

а+ ã = 2а1\* 1, где а1 R, (14')



а \* ã = d1 \*1, где d1 R. (15/)



Вычтем из (14) и (15) соответственно (14/) и (15'). Тогда:

ā - ã = 2(a – a1)\*1.

а (ā - ã) = (d- d1)\* 1 2(a – a1)a\*1.= (d- d1)\* 1.



Если

a(ā - ã), то a = \*1,



т.е. а пропорционален 1, что противоречит предположению.

Отсюда следует, что элемент, сопряженный к а, один и тот же, независимо от того, рассматриваем ли мы а как элемент комплексной подалгебры или же как элемент кватернионной подалгебры алгебры .



Точно так же |а|2 = аā как в случае комплексной подалгебры,так и в случае кватернионной подалгебры алгебры , так , что модуль элемента а A не зависит от того, рассматриваем мы его как элемент комплексной или кватернионной подалгебры алгебры .



Тогда для любых a, b А справедливы равенства:



=ā+ и = ā \*. (16)



Если а и b принадлежат одной комплексной подалгебре алгебры , то равенства (16) есть свойства, сопряжения в этой подалгебре. Если же они принадлежат разным комплексным подалгебрам, то они будут верны как свойства сопряжения в кватернионной подалгебре алгебры .



Из = b и из второго равенства (16) вытекает, что = bā, откуда



a + bā = с\* 1, где с R.



Определим в (A, +, .R, .) скалярное произведение (а, b) как

a + bā = 2(а, b) \* 1.



Покажем, что (а, b) удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения:

1) (а, а) > 0 при а ≠ 0 и (0, 0) = 0.

В самом деле,

(а, а) \* 1 = (аā + аā) = аā = |а|\* 1,



а модуль комплексного числа, так же как модуль кватерниона, сторого положителен при а ≠ 0 и равен 0 при а = 0.

2) (a, b) = (b. а), так как

a + bā = 2(a, b)\* 1, bā + a = 2(b, a)\* 1,



но

a + bā = bā + a, тогда (a, b) = (b, a).



3) (a, kb) = k(a, b) при k R.



Действительно,

(a, kb) = (a() + kbā) = (a(k) + kbā) = k(a + bā) = k(a, b).



4) (a, b1 + b2) = (a, b1) + (a, b2)

следует из определения скалярного произведения и первого равенства (16).

Из (а, а) = |а|2 1 следует, что = |а|, т.е. норма элемента a А совпадает с модулем а как комплексного числа, так и кватерниона.



Так как любые два элемента а и b из алгебры принадлежат одной комплексной или одной кватернионной подалгебре, то



|ab|2 = |a|2 |b|2 (ab, ab) = (a, a)(b, b).



Следовательно, все свойства скалярного произведения для (а, b) выполняются. Отсюда следует, что алгебра есть нормированная линейная алгебра.



Обобщенная теорема Фробениуса. Любая альтернативная линейная алгебра над полем действительных чисел с делением и единицей изоморфна одной из четырех алгебр: полю действительных чисел, полю комплесных чисел, телу кватернионов или алгебре октав.

Так как по доказанному в предыдущей теореме альтернативная линейная алгебра над полем действительных чисел с делением и единицей является нормированной линейной алгеброй, а последняя по теореме Гурвица изоморфна либо полю действительных чисел, либо полю комплексных чисел, либо телу кватернионов, либо алгебре октав, то отсюда следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996, 477с.
2. Власова Е.А. Ряды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002, 608с.
3. Воробьев Н.Н. Теория рядов: Учебное пособие для втузов. М.: Наука, 1986, 408с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы высшей математики. М.: Наука, 1986, 364с.
5. Зайцев В.В., Рыжов В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. М.: Наука, 1984, 400с.
6. Никольский С.М. курс математического анализа: Учеб. для вузов: В 2 т. Т.1. М.: Наука, 1990, 528с.; Т.2. М.: Наука, 1991, 544с.
7. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. М.: Высш.шк., 1983, 176с.