**Федеральное агентство по образованию**

**Государственное общеобразовательное учреждение высшего профессионального образования**

**Вятский государственный гуманитарный университет**

**Математический факультет**

**Кафедра алгебры и геометрии**

**Выпускная квалификационная работа**

**«Целочисленные функции»**

Выполнила: студентка   
V курса математического факультета Мошкина Т.Л.

Научный руководитель: старший преподаватель Семёнов А.Н.

Рецензент:

Допущена к защите в ГАК

Зав. кафедрой Вечтомов Е.М.

« »

Декан факультета Варанкина В.И.

« »

**Киров**

**2005**

**Содержание**

Введение 3

Глава 1. Целочисленные функции (теоретические факты) 4

I. Определения 4

II. Связь с непрерывными функциями 5

III. Количество целых чисел в интервалах: [*α*, *β*], [*α*, *β*), (*α*,*β*), (*α*, *β*] 7

IV. Спектры. 8

V. ‘Mod’: бинарная операция 9

Глава 2. Целочисленные функции (применение к решению задач) 11

Литература 28

**Введение**

Целые числа составляют костяк дискретной математики, и на практике часто приходится округлять дробные или произвольные вещественные числа до целых.

До недавнего времени для обозначения целой части вещественного числа использовалась запись . Но в начале 60-х годов Кеннет Э.Айверсон предложил в этом случае писать и дал удачное название этому обозначению: «пол». Для обозначения верхнего целого он предложил запись и назвал её «потолком», а для квадратных скобок нашёл новое применение. Предложенная Айверсоном нотация оказалась настолько удачной, что за рубежом старое обозначение уже практически не встречается. С появлением русского издания книги Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник «Конкретная математика» эта нотация становится популярной и в России.



Цель данной работы — получить представление и навыки в обращении с «полом» и «потолком».

Задачи работы:

1. Осветить теоретические аспекты данной темы:
   * Дать определение функций «пол», «потолок»;
   * Рассмотреть некоторые свойства этих функций;
   * Установить связь с непрерывными функциями;
   * Подсчитать количество целых чисел в заданных интервалах;
   * Рассмотреть определение спектра и его свойства;
   * Дать определение бинарной операции «mod» и рассмотреть приложение этой операции;
   * Рассмотреть на примере, как можно вычислить сумму, содержащую «полы».
2. Показать, как теория применяется на практике при решении задач.

# Глава 1. Целочисленные функции (теоретические факты)

1. Определения.

Договоримся через обозначать множество всех натуральных чисел, т.е. множество всех целых положительных чисел. Определим для любого вещественного числа x функции наибольшего и наименьшего целого:



⎣*x*⎦ — наибольшее целое, меньше или равное *x*;

⎡*x*⎤ — наименьшее целое, больше или равное *x*.

Из определения ясно, что , . Отсюда следует, что



(1)



В целых точках неубывающие функции и совпадают, т.е. *⇔* — целое ⇔ . А если они не совпадают, то они отличаются на 1, т.е.



[− не целое] (2)



Эта формула связывает все три обозначения Айверсона. Здесь и далее квадратные скобки используются для произвольного высказывания P в таком смысле:



Функции и являются отображениями друг друга относительно координатных осей, т.е.



, (3)



Из определений «пола» и «потолка» легко следуют свойства этих функций: и



(4)



Разность между и называется дробной частью *x* и обозначается



Иногда называется целой частью , поскольку .



Докажем следующее свойство рассматриваемых функций:

(5)



Так как равно либо 0, либо 1, то равно либо , либо .



1. Связь с непрерывными функциями.

Пусть — некоторая непрерывная монотонно возрастающая функция, обладающая тем свойством, что — целое число ⇒ — целое число. Тогда



(6)



и

(7)



всякий раз, когда определены функции,,.



Докажем, что



Случай 1: если , тогда .



Случай 2: если , тогда (в силу того, что функция монотонно возрастающая), а так как функция «пол» — не убывающая, то . Предположим, что , тогда существует такое число , что и (в силу непрерывности функции). Из условия следует, что — целое число. Это противоречит тому, что между и нет целых чисел. Значит, .



Докажем, что



Случай 1: если , то .



Случай 2: если , то (в силу того, что функция монотонно возрастающая), а так как функция «потолок» — не убывающая, то . Предположим, что , тогда существует такое число , что и (в силу непрерывности функции ). Из условия следует, что — целое число. Это противоречит тому, что между и нет целых чисел. Значит, .



Рассмотрев , получаем полезное свойство:



и (8)



Например, при и получаем , т.е. троекратное деление на 10 с последовательным отбрасыванием цифр остатка — это то же самое, что и непосредственное деление на 1000 с последующим отбрасыванием всего остатка.



1. Количество целых чисел в интервалах: [α, β], [α, β), (α,β), (α, β].

Будем рассматривать указанные интервалы при условии .



Если *α* и *β* — целые числа, тогда интервал [*α*, *β*) содержит ровно целых чисел: *α*, *α*+1, …, , аналогично интервал (*α*, *β*] содержит целых чисел, но *α* и *β* — произвольные вещественные числа. Из (4) следует



, когда — целое число



Поэтому интервал [*α*, *β*) содержит ровно целых чисел, а интервал (*α*, *β*] содержит ровно целых чисел.



Рассмотрим промежуток [*α*, *β*]. Имеем (на основании свойств (4)). Отсюда следует, что рассматриваемый промежуток содержит ровно целых чисел: , , …, , .



Рассмотрим (*α*, *β*), причём . Имеем . Отсюда следует, что рассматриваемый интервал содержит ровно целых чисел: , , …, , . Если не вводить дополнительное ограничение то получим, что пустой интервал (*α, α*) содержит ровно целых чисел.



Подытожим установленные факты:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Интервал | Количество целых чисел | Ограничение |
| [*α, β*] | ⎣*β*⎦ − ⎡*α*⎤ + 1 | *α ≤ β* |
| [*α, β*) | ⎡*β*⎤ − ⎡*α*⎤ | *α ≤ β* |
| (*α, β*] | ⎣*β*⎦ − ⎣*α*⎦ | *α ≤ β* |
| (*α, β*) | ⎡*β*⎤ − ⎣*α*⎦ −1 | *α < β* |

(9)

1. Спектры.

Спектр некоторого вещественного числа *α* определяется как бесконечное мультимножество целых чисел:

Spec (*α*) = {, , ,…} (10)



Если , то Spec (*α*)≠Spec (*β*), т.е. нет двух одинаковых спектров.



Действительно, если предположить, что , то найдётся некоторое положительное целое число , такое, что . Следовательно, и . Таким образом, Spec(*β*) содержит менее чем *m* элементов не больших , тогда как Spec(*α*) содержит по меньшей мере *m*.



Пусть . Число элементов в Spec(), которые не превосходят , равно



(11)



Говорят, что спектры образуют разбиение всех целых положительных чисел, если любое число, отсутствующее в одном спектре, присутствует в другом; но никакое число не содержится одновременно в обоих. Пусть и — вещественные положительные числа, тогда Spec() и Spec() образуют разбиение натуральных чисел тогда и только тогда, когда . Интересное свойство спектров будет доказано в задаче 10. В задаче 17 будет показана связь между мультимножествами Spec() и Spec, где — некоторое положительное число.



1. ‘Mod’: бинарная операция.

Если *m* и *n* — целые положительные числа, то неполное частное от деления *n* на *m* равно . Для того, чтобы было удобно работать с остатками, введём определение остатка:



.



Это определение можно распространить на произвольные вещественные числа:

(12)



при . Положим .



Дробную часть числа *x* можно представить как .



Самым важным алгебраическим свойством операции ‘mod’ является распределительный закон:

(13)



Доказательство следует из (11):

.



*Приложение операции ‘mod’:* разложение *n* предметов на *m* групп как можно более равномерных. Решение этого вопроса даёт тождества, справедливые при целых и натуральных .



— выражает разбиение *n* на *m* как можно более равных частей в невозрастающем порядке. (14)



— выражает разбиение n на m как можно более равных частей в неубывающем порядке. (15)



Доказательство этих фактов можно найти в книге Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник «Конкретная математика» на с.106-108. Если в (15) заменить *n* на ⎣*mx*⎦и применить правило (8), то получим тождество, которое справедливо при любом вещественном *x* и натуральном :



(16)



# Глава 2. Целочисленные функции (применение к решению задач)

**Задача 1.**

Всякое натуральное число представимо в виде: , где . Приведите явные формулы для *l* и *m* как функций от *n*.



**Решение:**



Тогда



Ответ: , .



**Задача 2.**

Как выглядит формула для ближайшего целого к заданному вещественному числу *x*? В случае «равновесия» — когда *x* лежит ровно посередине между целыми числами — приведите выражение, округляющее результат:

1. в сторону увеличения, т.е. до ⎡*x*⎤;
2. в сторону уменьшения, т.е. до ⎣*x*⎦.

**Решение:**

Пусть вещественное число округляется до .



1. В этом случае до округляются числа , удовлетворяющие неравенству:



⇔ (по свойству (4)).



1. В этом случае до округляются числа , удовлетворяющие неравенству:



⇔ (по свойству (4)).



Ответ: a) ; b)



**Задача 3.**

Вычислите , если *m* и *n* — натуральные числа, а — иррациональное число, большее *n*.



**Решение:**

= = = = = (так как и ).



Ответ: .



**Задача 4.**

Докажите, что .



**Доказательство:**

.



Отсюда , так как *n* — натуральное число.



Итак, . Что и требовалось доказать.



**Задача 5.**

Доказать, что если *f*(*x*) — непрерывная, монотонно убывающая функция и *f*(*x*) — целое ⇒ *x* — целое, тогда .



**Доказательство:**

1 случай: если , то .



2 случай: если , то , так как *f* – убывающая функция; (в силу того, что функция «пол» — неубывающая).



Если , то существует такое число , что и (так как *f* непрерывна). Поскольку *f*(*y*) целое, то по условию целое. А это противоречит тому, что между *x* и ⎡*x*⎤ не может быть никакого целого числа. Следовательно, .



Что и требовалось доказать.

**Задача 6.**

Решите рекуррентность при целом



при ,



при .



**Решение:**

Покажем, что методом математической индукции по .



База: : из того, что , следует, что , тогда и , поэтому для выполняется .



Переход: пусть для некоторого номера и для меньших номеров утверждение верно: .



Докажем, что .



=.



Что и требовалось доказать.

**Задача 7.**

Докажите принцип ящиков Дирихле: если *n* предметов размещены по *m* ящикам, то некоторый ящик должен содержать не меньше чем ⎡*n/m*⎤ предметов, а некоторый ящик должен содержать не более чем ⎣*n/m*⎦.

**Решение:**

Предположим, что каждый ящик содержит меньше, чем ⎡*n/m*⎤ предметов. Тогда наибольшее количество предметов в каждом ящике — это предметов. Следовательно, наибольшее количество предметов, размещённых по ящикам — это ⇒ ⇒ . Это противоречит тому, что .



Значит, существует ящик, который содержит не менее чем ⎡*n/m*⎤ предметов.

Предположим, что нет ящика, в котором не более, чем ⎣*n/m*⎦ предметов, т.е. каждый ящик содержит более чем ⎣*n/m*⎦ предметов. Тогда наименьшее количество предметов в каждом ящике — . Следовательно, наименьшее количество предметов, размещённых по ящикам — это ⇒ ⇒ . Это противоречит тому, что .



Значит, существует ящик, который содержит не более чем ⎣*n/m*⎦ предметов.

Что и требовалось доказать.

**Задача 8.**

Покажите, что выражение всегда равно либо ⎣*x*⎦, либо ⎡*x*⎤. При каких условиях получается тот или иной случай?



**Решение:**

1 случай: *x* = (4*k−*1)/2, *k*∈Z

Тогда , так как − целое число.



Получим ====



2 случай: *x ≠* (4*k*-1)/2, *k* ∈ Z, тогда .



Получим ==



Итак, данное выражение округляет числа до ближайшего целого; в случае «равновесия» — когда *x* лежит ровно посередине между целыми числами — данное выражение округляет число в сторону чётного.

**Задача 9.**

Докажите, что при любом целом *n* и любом целом положительном *m*.



**Доказательство:**

Пусть .



Покажем, что .



Имеем ⇔



⇔ (по свойствам (4)) ⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔



Что и требовалось доказать.

**Задача 10.**

Пусть *α* и *β* — вещественные положительные числа. Докажите, что Spec(*α*) и Spec(*β*) образуют разбиение всех целых положительных чисел тогда и только тогда, когда *α* и *β* иррациональны и .



**Решение:**

Пусть *α* и *β* — вещественные положительные числа.

Докажем, что если Spec(*α*) и Spec(*β*) образуют разбиение всех целых положительных чисел, то *α* и *β* — иррациональные числа и .



Spec(*α*) и Spec(*β*) образуют разбиение всех целых положительных чисел, тогда .



⇒



⇒ ⇒



⇒ ⇒



⇒ ⇒



⇒



Рассмотрим ⇒



⇒ .



Докажем, что *α* и *β* иррациональны. Так как , то числа *α* и *β* либо оба рациональны, либо оба иррациональны.



Если *α* и *β* оба рациональны, т.е. существует такое целое число *m*, что и , где и — натуральные числа, тогда ∈Spec(*α*) и ∈Spec(*β*).



Но никакое число не содержится одновременно в двух спектрах, образующих разбиение всех целых положительных чисел. Следовательно, *α* и *β* — иррациональны.

Докажем обратное: если *α* и *β* иррациональны и , то Spec(*α*) и Spec(*β*) образуют разбиение всех целых положительных чисел.



⇒



Так как и — иррациональны, то и — не целые числа, то



и



Отсюда получаем:



(так как и и — иррациональны, то ).



Получаем, что. Отсюда Spec(*α*) и Spec(*β*) образуют разбиение всех натуральных чисел.



Что и требовалось доказать.

**Задача 11.**

Докажите, что при целом *n*.



**Доказательство:**

* если ( или ), то ,



тогда .



Получаем верное равенство .



* если , тогда .



Правая часть имеет вид: .



Преобразуем левую часть:



.



Получили, что при любом целом . Что и требовалось доказать.



**Задача 12.**

Имеется ли аналогичное (16) тождество, в котором вместо «полов» используются «потолки»?

**Решение:**

Тождество (16) получается из тождества (15) заменой *n* на ⎣*mx*⎦.



Аналогичное тождество для потолков получается из тождества (14) заменой *n* на ⎡*mx*⎤:



⎡*mx*⎤ ==



==



Итак, получили тождество аналогичное данному:

⎡*mx*⎤ =.



**Задача 13.**

Докажите, что . Найдите и докажите аналогичное выражение для вида , где *ω* – комплексное число .



**Доказательство:**

При делении числа на 2 возможны только два различных остатка: либо 0, либо 1.

* если , то и .



* если , и .



Следовательно, равенство верно для любого натурального *n*. Что и требовалось доказать.



Найдём аналогичное выражение для , т.е. найдём коэффициенты *a*, *b*, *c*.



Поскольку — есть корень третьей степени из 1, то и .



Так как , то .



При делении числа на 3 возможны только три различных остатка: либо 0, либо 1, либо 2.

Если , то .



Если , то .



Если , то .



Решая систему , находим *a*, *b*, *c*.



, , .



Итак, получаем следующую формулу:

.



**Задача 14.**

Какому необходимому и достаточному условию должно удовлетворять вещественное число , чтобы равенство выполнялось при любом вещественном ?



**Решение:**

При любом вещественном и равенство выполняется ⇔ *b* — целое число.



Если *b* — целое число, то функция непрерывная, возрастающая функция (так как ). Пусть — целое число, т.е. . Тогда , так как и . Выражая через , получим — целое, как натуральное число в неотрицательной целой степени. Поэтому можно применить формулу (6) и получить равенство .



Если *b* — не целое число, то при равенство не будет выполняться, так как



Итак, если , то равенство выполняется при любом вещественном тогда и только тогда, когда *b* — целое число.



Ответ: *b* — целое число.

**Задача 15.**

Найдите сумму всех чисел, кратных *x*, в замкнутом интервале [*α*, *β*], при .



**Решение:**

Числа, кратные имеют вид , где . Нужно просуммировать те из чисел , для которых . Учитывая, что и (4), имеем



⇔ ⇔ .



Нам нужно вычислить следующую сумму:

.



В этой сумме можно вынести за скобки, а в скобке останется сумма всех чисел от до включительно. Применяя формулу арифметической прогрессии получаем:



.



**Задача 16.**

Покажите, что *n*-й член последовательности 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,… равен. (Каждое число *m* входит в данную последовательность *m* раз.)



**Решение:**

В этой последовательности чисел меньших будет , а чисел не превосходящих будет . Поэтому, если *xn=m*, то



Оценим *n*:

⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔ ⇒



⇒ .



Следовательно, .



**Задача 17.**

Найдите и докажите связь между мультимножествами Spec(*α*) и Spec(*α*/(*α*+1)), где *α* — некоторое положительное вещественное число.

**Решение:**

Число элементов в Spec(*α*), которые не превосходят *n*:

.



Число элементов в Spec(*α*/(*α*+1)), которые не превосходят *n*:

.



Итак, получили, что.



Покажем на основе этого, что чисел равных в Spec будет на 1 больше, чем в Spec().



При если , тогда .



Пусть в Spec() элементов не превосходящих будет , тогда число элементов в Spec() равных будет . Подсчитаем количество элементов в Spec равных :



Что и требовалось доказать.

Ответ: чисел равных в Spec будет на 1 больше, чем в Spec().



**Задача 18.**

На шахматной доске клеток симметрично начерчена окружность с диаметром единиц. Через сколько клеток доски проходит данная окружность?



**Решение:**

Радиус окружности равен .



Горизонтальных прямых, не являющихся сторонами квадрата — ().



Вертикальных прямых, не являющихся сторонами квадрата — ().



Окружность каждую из указанных прямых пересекает в двух точках. Она не проходит через углы клеток. Действительно, если предположить, что данная окружность проходит через какой-нибудь угол клетки, то существуют такие целые числа и , для которых выполняется теорема Пифагора: , но — целое число, а — не целое. Получили противоречие. Следовательно, окружность не проходит через углы клеток.



Каждую клетку окружность пересекает в двух точках, а каждая точка пересечения принадлежит двум клеткам. Следовательно, окружность проходит через столько клеток доски, сколько имеется точек пересечения её с прямыми: .



Ответ: клеток.



**Задача 19.**

Говорят, что *f*(*x*) является репликативной функцией, если

*f*() = *f*() + *f*  + … + *f*



при каждом целом положительном *m*. Укажите, какому необходимому и достаточному условию должно удовлетворять вещественное число *c*, чтобы функция *f*(*x*) = *x*+*c* являлась репликативной.

**Решение:**

*f*(*x*) = *x*+*c* — репликативна ⇔

⇔ ⇔



⇔ ⇔



⇔ = 0 ⇔ .



Ответ: .



# 

# Литература

Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник. Конкретная математика. М.: «Мир» 1998. С 88 − 124.