ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НЕФТЕКАМСКИЙ ФИЛИАЛ

Экономико-математический факультет

Кафедра математического моделирования

ДИПЛОМНАЯ работа

на тему:

Диагностирование характеристик вала с дисками

по собственным частотам его крутильных колебаний

Нефтекамск 2008

Содержание

Введение

1.Определение собственных частот крутильных колебаний вала с дисками

1.1 Постановка прямой спектральной задачи Колебания вала с одним диском

1.2 Решение прямой задачи для вала с n-дисками

1.3 Колебания вала с тремя дисками

1.4 Колебания вала с четырьмя дисками

1.5 Применение метода решения прямой задачи, программная реализация решения

2.Диагностирование характеристик вала с дисками по спектру частот колебаний

2.1 Постановка обратной спектральной задач

2.2 Диагностирование коэффициентов жесткостей участков вала между дисками

2.3 Диагностирование моментов инерции масс дисков

2.4 Применение метода решения обратной задачи, программная реализация решения

Заключение

Список литературы

Введение

Диагностирование характеристик вала с дисками по спектру частот его колебаний является актуальной в связи с необходимостью решений задач акустической диагностики составляющих технических конструкций и виброзащиты механических систем.

Задачи же акустической диагностики важны в связи с увеличением техногенных катастроф и опасностями, связанными с изношенностью основных фондов. С увеличением размеров и скоростей современных машин в инженерных расчетах становится все более и более важным решение задач, связанных с колебаниями. Хорошо известно, что только на основе теории колебаний могут быть полностью выяснены такие практически важные проблемы, как уравновешивание машин, крутильные колебания валов и зубчатых передач, колебания турбинных лопаток и турбинных дисков, прецессия вращающихся валов, колебания рельсового пути и мостов под действием движущихся грузов, колебания фундаментов. Лишь при помощи этой теории можно установить наиболее удачные пропорции конструкций, отодвигающие эксплуатационные условия работы машин возможно дальше от условий возникновения больших колебаний.

Другое важное использование задач определения характеристик вала с дисками – виброзащита механических систем, составляющими которых являются валы с дисками. Колебания валов приводят порой к дребезжанию, лишнему шуму. Связано это с тем, что спектры частот колебаний иногда находятся в опасном для здоровья человека диапазоне. Для изменения частот колебаний вала не всегда бывает целесообразно менять его длину или же прикреплять сосредоточенные массы. Поэтому возникает задача определения таких жесткостей участков валов на кручении или моментов инерции масс дисков, которые обеспечивали бы нужный диапазон частот колебаний вала. Эта проблема связана с научными задачами шумоподавления, акустической диагностики и теории обратных задач математической физики. Решению подобной проблемы и посвящена представленная работа. Прямая задача по определению спектра частот колебаний вала с дисками рассмотрена в учебниках по теории колебаний. Но обратная задача по диагностированию характеристик вала с дисками не исследована.

Задачам технической диагностики посвящено большое количество работ. Процессы, протекающие в механизмах и двигателях, являются источником шума. Наука, изучающая возможности распознавания характеристик элементов механической системы по его шуму, носит название виброакустической диагностики. Задачи виброакустической диагностики могут быть различными. В работе Кузьмина Р.В. [14], например, рассматривались задачи обнаружения дефектов в судовых механизмах по шуму, вызываемому упругими колебаниями от соударения сопряженных деталей. Аналогичные задачи обнаружения неисправностей решены в работах Бухтиярова И.Д., Аллилуева В.А.[9], но уже для поиска дефектов в автотракторных двигателях. В трудах Биргера И.А. [8], Артоболевского И.И., Бобровницкого Ю.И., Генкина М.Д.[1], Павлова Б.В.[16] также решались задачи акустической диагностики механизмов.

Большое количество работ по виброакустической диагностике посвящено не только выявлению состояния двигателя по его шуму, но и также вопросам шумоподавления, это работы, например, Зинченко В. И.[12], Лапина А.Д. [15]. Близкие проблемам виброакустической диагностики задачи возникали также и в других работах. Так в работе Kас М.[26] ставился вопрос: можно ли по звучанию барабана установить его форму? Статья W. U. Qunli и F. Fricke [27] посвящена определению размера объекта и его положения в камере по сдвигам собственных частот его колебаний, а статья Васильева Н.А., Дворникова С.И. [10] – способу обнаружения шпал, потерявших плотный контакт с балластом насыпи, при помощи ударного возбуждения колебаний и анализа акустических сигналов. В работах Frikha S., Coffignal G., Trolle J.L.[24, 25] исследовались условия на входе и выходе выхлопных труб и трубопроводных систем, в трудах Аксенова А.Л., Тукмакова И.Б. [21,22] – задачи идентификации объектов по их акустическому отклику. Задачи акустической диагностики закреплений по одному спектру для струн, мембран, стержней, пластин рассматривались А.М. Ахтямовым [2–6, 23], а Г.Ф. Сафиной [18–20] – для полых труб и трубопроводов с жидкостью. В отличие от всех работ по диагностике, в представленной работе отыскиваются не форма области, размеры объекта, его местоположение или состояние, а коэффициенты упругих закреплений и моменты инерции масс дисков. Такая задача для вала с дисками ставится впервые.

Целью научной работы является нахождение собственных частот крутильных колебаний вала с дисками и диагностирование по спектру частот моментов инерции масс дисков и жесткости участков вала на кручении. В соответствие с целью были поставлены и решены задачи:

* исследование задачи определения собственных частот крутильных колебаний вала с различным количеством дисков (с двумя, тремя, четырьмя, n- дисками) по известным моментам инерции масс дисков и жесткости участков вала на кручении;
* исследование задачи диагностирования моментов инерции масс дисков по собственным частотам колебаний вала;
* исследование задачи диагностирования жесткости участков вала на кручении по собственным частотам колебаний вала.
* разработка математических моделей решения поставленных задач; аналитическое и численное исследование моделей.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что впервые исследованы и решены задачи диагностирования по спектру частот колебаний вала с дисками таких характеристик, как моменты инерции масс дисков и жесткости участков вала на кручении.

Практическая значимость результатов состоит в том, что разработанные методы решения задач относятся к акустической диагностике недоступных для визуального осмотра элементов механических систем и технических конструкций, составляющими которых являются валы с дисками. Поскольку изменения величин коэффициентов жесткости участков вала или моментов инерции дисков могут характеризовать степень изношенности, неисправности и т.п., то полученные результаты по решению обратных задач применимы для диагностирования указанных характеристик вала с дисками без дорогостоящей разборки всей механической системы

Полученные результаты можно также использовать для сохранения заданного диапазона частот колебаний вала с дисками. В работе предложено сохранение диапазона частот с помощью изменений значений моментов инерции масс дисков или коэффициентов жесткости участков вала на кручении.

Результаты исследований по решению прямой спектральной задачи докладывались на секции «Дифференциальные уравнения и теория операторов» Всероссийской школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», которая проходила с 30 октября по 3 ноября 2007 года на базе Башкирского государственного университета. Есть две публикации по теме исследования.

Первая глава работы посвящена прямой задаче определения собственных частот крутильных колебаний вала с дисками по известным моментам инерции масс дисков и коэффициентов жесткости участков вала на кручении. Решение сводится к системе n - обыкновенных уравнений относительно неизвестных собственных частот крутильных колебаний вала. Из этой системы получены частотные уравнения для вала с двумя, тремя, четырьмя дисками. Сделаны соответствующие вычисления, составлена программа в математическом пакете Maple.

Во второй главе приведена постановка обратной спектральной задачи диагностирования характеристик вала с дисками по спектру частот его колебаний. Алгоритм диагностирования сведен к решению систем алгебраических уравнений. Рассмотрены диагностирования моментов инерции масс дисков по собственным частотам колебаний вала. Задача решена для вала с тремя, четырьмя дисками. В этой же главе диагностируются коэффициенты жесткостей участков вала при кручении между дисками. Для решения обратных задач составлены программы в математическом пакете Maple.

В заключение работы сделаны выводы по полученным результатам решений прямой и обратной задач. Проанализирована практическая значимость полученных результатов задачи диагностирования.

# 1. Определение собственных частот крутильных колебаний вала с дисками

## 1.1 Постановка прямой спектральной задачи Колебания вала с одним диском

Прямая задача: Определить собственные частоты крутильных колебаний вала, состоящего из п (п =1, 2, 3, 4,…) дисков с известными моментами инерции масс, укрепленных на стальном валу с известными жесткостями.

Рассмотрение крутильных колебаний начнем с простейшего случая круглого вала постоянного сечения, несущего на свободном конце диск, верхний конец вала заделан (рис. 1).

Пусть в силу каких-либо причин диск (маховик), изображенный на чертеже, получил в плоскости вращения, которой является плоскость, перпендикулярная чертежу, перемещения на угол . На тот же угол повернется и жестко связанный с диском вал. Представленная самой себе такая система будет совершать колебания, поддерживаемые силами упругости вала, заключающиеся в повторных вращательных движениях.

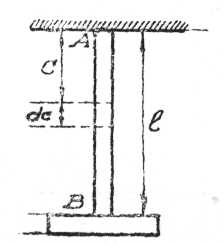


Рис. 1 Вал с одним диском

Известно, что колебания, представляющие ряд повторных вращательных перемещений от положения равновесия, называются колебаниями кручения или, крутильными.

Установим величину нагрузки, вызывающей единицу статической деформации вала. Статической деформацией вала в данном случае будет угол закручивания, определяемый по известной формуле сопротивления материалов

(1.0)



где М — крутящий момент;

—длина вала;



Ip —полярный момент инерции вала;



— модуль касательной упругости.



Нагрузкой, вызывающей единицу статической деформации, т. е. угол закручивания, равный одному радиану, будет из формулы (1.0) некоторый момент; будем обозначать этот момент буквой k и называть жесткостью вала на кручение.

(1.1)



Если вал повернется на угол , то в нем возникнет момент внутренних сил упругости, равный



(1.1а)



Этот момент по принципу Даламбера должен быть равен моменту сил инерции диска. (Массой вала мы пренебрегаем.) Если угловое ускорение обозначить



и момент инерции диска относительно продольной вертикальной оси вала

,



где Q —вес диска, D—его диаметр, g— ускорение силы тяжести.

В случае кольцевого диска (шкив, колесо)



то момент сил инерции диска будет равен

(1.1b)



Уравнение движения тогда будет иметь вид:



Освобождаясь от коэффициента при дифференциале



и обозначая

(1.2)



получим

(1.3)



Решение этого уравнения может быть представлено в виде:

(1.4)



по аналогии получаем:

(1.5)



Очевидно, что мы в данном случае получили простое гармоническое колебание.

Круговая частота этого колебания (равная угловой скорости) будет

(1.2а)



и период колебания

(1.6)



Формулы (1.2а) и (1.6) справедливы в окончательном виде только для сплошного диска постоянной толщины, в случае какого-либо другого диска частоту и период следует определять по формулам:

(1.2)



и

. (1.)



Вычисляем в них соответствующий момент инерции диска по формулам теоретической механики.

Рассмотрим теперь случай колебаний вала с диском (рис. 1), с учетом массы вала. Помимо полярного момента инерции сечения вала, воспользуемся выражением для экваториального момента инерции (массы) вала, известным из теоретической механики.



где I0 — экваториальный момент инерции,

W — собственный вес вала,

r —радиус вала.

Если вес единицы объема вала, т. е. его удельный вес, обозначить , то I0 для круглого вала можно представить в виде:



(2.b)



и экваториальный момент единицы длины вала

(2.c)



Для решения стоящей перед нами задачи удобнее всего воспользоваться уравнениями движения Лагранжа, поэтому, прежде всего, найдем кинетическую и потенциальную энергию нашей системы.

Кинетическая энергия системы будет слагаться из кинетической энергии диска и кинетической энергии вала. Кинетическая энергия диска



Для нахождения кинетической Энергии вала сначала найдем кинетическую энергию элемента его dc. Если угол закручивания в сечении с обозначить , то кинетическая энергия элемента dc будет



так как если — момент инерции единицы длины, то I0'dc момент инерции элемента dc.



Найдем зависимость между углом закручивания в сечении с-и в сечении



и



откуда



или



и



Подставляя полученное значение в выражение кинетической энергии элемента dc, получим:



Полную кинетическую энергию вала найдем интегрированием:



Или заменяя на основе формул (b) и (с) на получим окончательно:



Полная кинетическая энергия системы



Потенциальная энергия системы



где M — крутящий момент, приложенный к валу. Для крутящего момента имеем выражение:

(1.1а)



Подставляя это значение в выражение для потенциальной энергии, получим:

(2.1)



Теперь можем составить дифференциальное уравнение колебательного движения нашего вала, что удобнее всего сделать в форме Лагранжа. В нашем случае за обобщенную координату необходимо принять угол закручивания , тогда уравнение Лагранжа примет вид:



в этом уравнении



Находим значения частных производных, входящих в это уравнение:



Подставим полученные значения в уравнение Лагранжа



Освобождаясь от коэффициента при дифференциале и полагая



получим



т. е. известное нам уравнение (1.3), решение которого

.



Частота этого колебательного движения



И период

(2.2)



Следовательно, для учета собственной массы вала, имеющего колебания, необходимо к моменту инерции диска, сидящего на валу, прибавить одну треть момента инерции вала.

Рассмотрим случай вала, лежащего в двух подшипниках (влияние которых на колебания мы, в виду незначительности, не учитываем), несущего на концах два диска (маховика, шкива и т. д.) (рисунок 2).

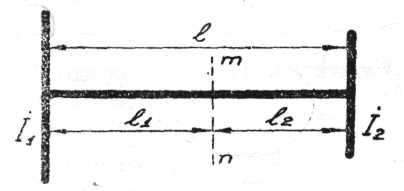


Рис. 2 Вал с двумя дисками

Вал будет испытывать крутильные колебания только при условии вращения дисков в разные стороны, что может быть достигнуто приложением к дискам двух равных и прямо противоположных моментов. После удаления моментов в системе, состоящей из вала и двух; дисков, возникнут крутильные колебания. В каждый момент времени угловые скорости дисков будут направлены противоположно друг другу. Левый диск и некоторая часть вала, примыкающая к нему, будет вращаться, допустим, по часовой стрелке, а правый диск и его часть вала против часовой стрелки. В таком случае на валу обязательно должно быть сечение, в котором нет никакого вращения. Вал можно рассматривать как жестко заделанный в сечении, пт, причем, в нашем примере, левая часть вращается по часовой и правая против часовой стрелки.

Сечение, остающееся во время колебания системы неподвижным, называется узлом колебания.

Периоды колебаний одинаковые для обеих частей одного и того же вала могут быть найдены из формулы (1.6),

(2.3)



Задача, таким образом, сводится к определению расположения узла колебаний по длине вала, т. е. длин l1 и l2. Уравнение (2.3) показывает, что узел колебания делит вал обратно пропорционально моментам инерции дисков, т. е.

или



Второе уравнение для определения положения узла колебаний будет



Из уравнений получим

и



и период колебания примет вид

(2.4)



частота колебаний будет:

(2.5)



Для изучения случаев колебания валов с большим числом дисков, чем два, удобнее в отличие от вышеприведенных случаев вала с одной и двумя массами найти уравнения движения вала с произвольным количеством масс и затем применять его для любого частного случая.

## 1.2 Решение прямой задачи для вала с n-дисками

Рассмотрим вал, несущий п- дисков. Пусть углы закручивания вала в местах насадки диска будут соответственно Жесткости I, II,..., n-1 участков вала, т. е. на основе обозначения (1.1) моменты, которые могут вызвать угол закручивания данного участка равный одному радиану, обозначим: k1, k2,…, kп-1. Моменты инерции дисков по-прежнему обозначим I1,I2,..,In. Для получения уравнения колебательного движения рассматриваемой нами системы применим уравнения Лагранжа, при пользовании которыми необходимо знать выражение для кинетической и потенциальной энергии системы. Кинетическая энергия диска, имеющего момент инерции I и угол закручивания , выражается формулой



Кинетическая энергия нашей системы слагается из суммы кинетической энергии всех дисков (кинетическую энергию вала мы тут не учитываем, считая момент инерции диска большим по сравнению с моментом инерции вала).

Кинетическая энергия всей системы

(2.6)



Для нахождения потенциальной энергии системы, являющейся в данном случае энергией кручения, необходимо пользоваться формулой

,



где М - крутящий момент, действующий на данном участке, а - угол закручивания того же участка. Найдем крутящий момент и угол закручивания для первого участка нашей системы.



Если в месте насадки первого диска угол закручивания , а в месте насадки второго диска — 2, то угол закручивания на участке вала между дисками будет:



(2.7)



Для того чтобы вызвать угол закручивания первого участка вала величиной в I радиан, необходимо приложить крутящий момент величины k1, если же, как в нашем случае угол закручивания имеет 1-2 радиан, то на валу действует крутящий момент величины



В нашем случае углы закручивания для участков вала будут:

(2.8)



и крутящие моменты:

(2.9)



Теперь можем составить выражение для потенциальной энергии системы, суммируя потенциальную энергию участков.

(2.10)



(так как то, подставляя значения 1 из (2.8) и M1 из (2.9) и аналогично для других участков получим формулу (2.10)).



В данном случае система имеет п степеней свободы, чему соответствует п обобщенных координат. Обобщенными координатами являются углы закручивания вала в местах насадки дисков. Уравнение Лагранжа, очевидно, придется составить по числу степеней свободы, т. е. также п. Для пользования уравнением Лагранжа в виде

(2.11)



необходимо найти частные производные от кинетической и потенциальной энергии системы, по обобщенным координатам и частные производные от кинетической энергии по дифференциалам обобщенных координат:



Дифференцируя уравнение (2.6) найдем:

;



и дифференцируя уравнение (2.10)

; ;



;……;



Дифференцируя уравнение (2.6) по получим:



Полученные уравнения необходимо продифференцировать по времени



Располагая найденными выше величинами, можем составить систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы.

(2.12)



Для решения полученной системы дифференциальных уравнений полагаем, что каждое колебательное движение системы (их будет столько же, сколько и степеней свободы, т. е. п) будет простым гармоническим. Частные решения системы (2.12), можно представить в виде:

. (2.13)



В этих уравнениях по-прежнему М амплитуда колебания, и р частота. Находим вторую производную от по времени:



.



Аналогично,



Подставляя значения и в уравнения системы (2.12), получим систему обыкновенных уравнений со многими неизвестными для определения частоты колебания р.



Сокращая в данных уравнениях на получим окончательно



(2.14)



Последовательно исключая неизвестные , получим уравнение для определения частоты р. Уравнение для определения частоты собственных колебаний, полученное в результате исключения из уравнений (2.14), называется характеристическим. Уравнения (2.14) могут быть применены для определения числа собственных крутильных колебаний системы с произвольным числом дисков. В тех случаях, когда получившееся характеристическое уравнение имеет высокую степень относительно р2 (что бывает при системе со многими дисками), оно может быть решено графически либо каким-нибудь приближенным методом.



## 1.3 Колебания вала с тремя дисками

Рассмотрим колебания вала с тремя дисками (рис. 3). Здесь I1 , I2 ,I3 моменты инерции дисков, k1 и k2 жесткости участков вала на кручении, по аналогии с формулой (1.1) равные:

и

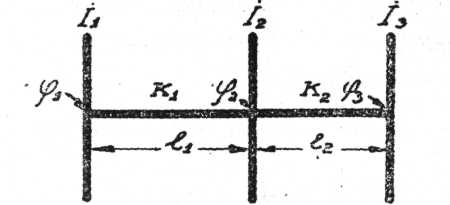


Рис. 3 Вал с тремя дисками

Если амплитуды колебаний дисков обозначить то уравнения (2.14) для данного случая примут вид:



. (2.15)



Складывая эти уравнения получим



откуда

,



или

.



Квадрат частоты колебаний р2 нулю равен быть не может, поэтому:

. (2.16)



Выразим М1 и М3 через М2 , что может быть сделано из уравнения (2.15)



Подставим полученные значения М1 и М3 в уравнение (2.16)



Сокращая на М2 и приводя к общему знаменателю получим:



или



Делаем группировку



Освобождаясь от коэффициента при р4 и делая преобразование в круглых скобках получим окончательно:

(2.17)



Получили биквадратное уравнение для определения частоты. Корни этого уравнения и соответствуют двум главным видам колебаний: низшему, имеющему один узел колебаний (два соседних диска вращаются в одну сторону), и высшему, имеющему два узла колебания (крайние диски вращаются в одну сторону).



## 1.4 Колебания вала с четырьмя дисками

Рассмотрим крутильные колебания вала с четырьмя дисками. Пусть I1 , I2 ,I3,,I4 — моменты инерции дисков, k1 ,k2,,k3 — жесткости участков вала на основе формулы (1.1) равные:

; ;



Амплитуды колебаний дисков обозначим по-прежнему: М1,М2,,М3,,М4.

Тогда уравнения (2.14) для данного случая примут вид:

(2.18)



Складывая полученные уравнения найдем:



Учитывая подобные слагаемые, получим



или



Квадрат частоты - р2 нулю не равен, следовательно:

(2.19)



Выразим М1,М3 и М4 через М2, что может быть сделано с помощью уравнений (2.18).

С помощью первого уравнения из (2.18) найдем:

(2.а)



Из второго уравнения нижеследующими действиями найдем:

,



или подставляя вместо М1 его значение из (2.а)

,



,



,



. (2.d)



Из уравнения четвертого найдем



Подставив значение М3 из (2.d)

(2.е)



Найденные значения М1, М3 и М4 подставим в уравнение (2.19)



Сокращаем полученное уравнение на М2 и приводим левую часть уравнения к общему знаменателю, который и отбрасываем. Общим знаменателем, очевидно, будет выражение:



Делаем группировку



Освобождаясь от коэффициента при р6, приведем наше уравнение к виду:



(2.20)



Таким образом, были рассмотрены формулы для нахождения собственных частот колебания вала с различным количеством дисков. Определив частоты, можно рассчитать критические скорости прямых валов, а, зная эти скорости можно предупредить поступление разного рода нарушения нормального хода машины, которые обычно выражаются в появлении биений вала или вибрации всей установки в целом.

## 1.5 Применение метода решения прямой задачи, программная реализация решения

Рассмотрим применение метода решения прямой задачи по определению собственных частот крутильных колебаний вала с дисками на конкретных примерах.

Пример 1

Определить собственные частоты системы, состоящей из трех дисков с моментами инерции масс: , укрепленных на стальном валу с жестокостями и .



При подстановке данных значений в уравнение (2.17) получаем биквадратное уравнение:

р4-3.5p2+2.0=0.

Корни данного уравнения, найденные в пакете Maple, имеют вид:

p1=-1.667566013, p2=1.667566013, p3=-0.8480705122, p4=0.8480705122

Но нас интересуют только положительные величины, так как частоты отрицательные значения принимать не могут.

Пример 2

Определить собственные частоты системы, состоящей из трех дисков с моментами инерции масс: , укрепленных на стальном валу с жестокостями и .



При данных значениях физических величин решение уравнения (2.17) имеет вид:

p1=-1,370821968, p2=-0,7879385321, p3=1,370821968, p4=0,7879385321

Пример 3

Определить собственные частоты системы, состоящей из четырех дисков с моментами инерции масс: , укрепленных на стальном валу с жестокостями , и .



При данных значениях физических величин решение уравнения (2.20) имеет вид:

p1=-2,417091066, p2=-1,581138830, p3=2,417091066, p4=1,581138830

Приведем программную реализацию решения прямой спектральной задачи, использующую команды математического пакета MAPLE

Решение примера 1:

> I1:=0.2;



> I2:=0.3;



> I3:=0.1;



> k1:=0.1;



> k2:=0.2;



> y:=p^4-(k1\*(I1+I2)/(I1\*I2)+k2\*(I2+I3)/(I2\*I3))\*p^2+((I1+I2+I3)/(I1\*I2\*I3))\*k1\*k2=0;



Подставим данные значения в уравнение (2.17)

> y:=p^4-(k1\*(I1+I2)/(I1\*I2)+k2\*(I2+I3)/(I2\*I3))\*p^2+((I1+I2+I3)/(I1\*I2\*I3))\*k1\*k2=0;



> solve(y,p);



Решение примера 3:

> restart;

> i1:=0.2;



> i3:=0.3;



> i2:=0.1;



> i4:=0.2;



> k1:=0.1;

> k2:=0.2;



> k3:=0.3;



Подставим данные значения в уравнение (2.20)

> y:=p^6-(k1\*(i1+i2)/(i1\*i2)+k2\*(i2+i3)/(i2\*i3)+k3\*(i3+i4)/(i3\*i4))\*p^4+(k1\*k2\*(i1+i2+i3)/(i1\*i2\*i3)+k2\*k3\*(i2+i3+i4)/(i2\*i3\*i4)+k1\*k3\*(i1+i3+i4)/(i1\*i3\*i4))\*p^2+k1\*k2\*k3(i1+i2+i3+i4)/(i1\*i2\*i3\*i4)=0;



> fsolve(y,p);



# 2. Диагностирование характеристик вала с дисками по спектру частот колебаний

## 2.1 Постановка обратной спектральной задач

Поставим теперь к задаче определения частот крутильных колебаний вала с дисками обратную спектральную задачу.

Поскольку изменения величин моментов инерции масс дисков и коэффициентов жесткости участков вала на кручении могут характеризовать степень изношенности дисков, налипание к валу инородных предметов и так далее, то обратная задача состоит в диагностировании характеристик вала с дисками по собственным частотам колебаний вала. Известно, что изменения указанных значений характеристик вала проявляются в изменениях значений собственных частот его колебаний, что в свою очередь может привести к ненужным вибрациям, увеличению шума и т. п.

Поэтому возникает также задача сохранения заданного (безопасного) диапазона частот крутильных колебаний вала. Подобную проблему мы предлагаем решить также при рассмотрении обратной задачи.

Итак, известны собственные частоты р крутильных колебаний вала с дисками. Необходимо определить характеристики вала с дисками по спектру частот его колебаний. К диагностируемым характеристикам мы отнесем моменты инерции масс дисков и коэффициенты жесткости участков вала на кручении.

Остановимся на диагностировании этих характеристик подробнее.

## 2.2 Диагностирование коэффициентов жесткостей участков вала между дисками

При исследовании задачи о колебаниях вала с тремя дисками получено следующее частотное уравнение (2.17):



Здесь, по-прежнему, k1, k2. – коэффициенты жесткостей участков вала между дисками, р. – собственная частота крутильных колебаний вала, I1, I2, I3.. – моменты инерции масс трех дисков соответственно.

Обратная задача: Известны собственные частоты колебаний вала, моменты инерции дисков. Неизвестны коэффициенты жесткости участков вала между дисками.

Преобразуем уравнение (2.17) к виду

.



Если рассмотреть две собственные частоты р1 и р2, то последние уравнения представляют собой систему алгебраических уравнений с двумя неизвестными k1, k2 .

(3.1)



Вычитая из первого уравнения системы (3.1) второе, получим

.



Разделим обе части последнего равенства на :



Выразим :



, (3.2)



и подставим его в первое уравнение системы (3.1):



Преобразуем последнее равенство к виду:



Решая последнее уравнение относительно , получим



, (3.3)



где



Таким образом, формулы (3.2) и (3.3) однозначно определяют коэффициенты жесткости участков вала на кручении для вала с тремя дисками.

Поставим теперь подобную обратную задачу для вала с четырьмя дисками, частотное уравнение для крутильных колебаний которого имеет вид (2.20):



Здесь, снова, k1, k2. k3 – коэффициенты жесткостей участков вала между дисками, р. – собственная частота крутильных колебаний вала, I1, I2, I3, I4. – моменты инерции масс четырех дисков.

Обратная задача: Известны собственные частоты колебаний вала, моменты инерции дисков. Неизвестны коэффициенты жесткости участков вала между дисками.

Рассмотрим снова две собственные частоты р1 и р2 крутильных колебаний вала, тогда уравнения (2.20) представляют собой систему алгебраических уравнений с двумя неизвестными k1, k2 при известном коэффициенте k3. Вычисления, проведенные в пакете MAPLE, показывают, что из системы (3.4) можно однозначно определить коэффициенты жесткости двух любых участков вала между дисками при известном коэффициенте жесткости одного из трех участков. Причем все эти коэффициенты упругих закреплений определяются по двум собственным частотам крутильных колебаний вала.



## 2.3 Диагностирование моментов инерции масс дисков

Рассмотрим снова частотное уравнение (2.17), полученное для вычисления частот крутильных колебаний вала с тремя дисками.

Обратная задача. Пусть известны собственные частоты р колебаний вала, коэффициенты жесткости k1, k2 участков вала между дисками. Необходимо определить неизвестные моменты инерции масс двух дисков при известном моменте инерции третьего диска.

Пусть, например, известен момент инерции второго диска. Тогда, если рассмотреть снова две собственные частоты р1 и р2 колебаний вала, то уравнения (2.17) представляют собой систему алгебраических уравнений с двумя неизвестными I1, I3.

(3.5)



Подставляя выражение из второго уравнения системы (3.5) в первое уравнение, получим



.



Из последнего равенства выразим через :



(3.6)



Здесь .



Подставим теперь выражение (3.6) в первое уравнение системы (3.5). После преобразований имеем

(3.7)



где .



Решая уравнение (3.7) относительно неизвестной , получим квадратное уравнение



дискриминант которого имеет вид

.



Тогда

. (3.8)



Таким образом, моменты инерции масс двух дисков находятся однозначно по формулам (3.7) и (3.8). Подобные формулы можно получить для моментов инерции любых двух дисков при известном моменте инерции одного из трех дисков.

Аналогичная задача диагностирования решаема и для вала с четырьмя дисками, частотное уравнение которого получено нами в виде (2.20).

Вычисления, проведенные в пакете MAPLE, показывают, что из системы (3.4) можно однозначно определить коэффициенты жесткости двух любых участков вала между дисками при известном коэффициенте жесткости одного из трех участков. Причем все эти коэффициенты упругих закреплений определяются по двум собственным частотам крутильных колебаний вала.

## 2.4 Применение метода решения обратной задачи, программная реализация решения

Рассмотрим применение метода решения обратной задачи по определению характеристик вала с дисками на конкретных примерах.

Пример 4

Известны собственные частоты крутильных колебаний вала с тремя дисками: , . Момент инерции массы первого диска коэффициенты жесткости участков вала между дисками , .Найти моменты инерции масс второго и третьего дисков.



Решение.

Подставляя значения , в уравнение (2.20), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными . Решение системы, найденное в пакете Maple, имеет вид: . Значения определены верно, так как по решению прямой задачи именно этим моментам инерции соответствуют данные значения собственных частот.



Пример 5

По двум собственным частотам , крутильных колебаний вала с тремя дисками и известным моментам инерции диагностировать коэффициенты жесткости участков вала на кручении.



Решение

Уравнение (2.17) при заданных значениях , представляет собой следующую систему:



из которой получаем, что , . Эти же значения коэффициентов получаются при подстановке значений собственных частот в аналитические формулы (3.2) и (3.3). Коэффициенты продиагностированы верно, так как именно этим коэффициентам при решении прямой задачи соответствовали заданные значения собственных частот.



Пример 6

Рассматривается вал с четырьмя дисками, для которого известны , ,. По частотам определить моменты инерции масс первых трех дисков.



Решение

Подставляя значения в уравнение (2.20), получим систему трех уравнений с тремя неизвестными . Решение системы имеет вид .Значения определены верно, так как по решению прямой задачи именно этим моментам инерции соответствуют данные значения собственных частот.



Рассмотрим программные реализации решений обратных задач.

Решение примера 4

> restart;

> i1:=0.2;



> k1:=0.1;

> k2:=0.2;



> p:=.8480705122;



> p:=1.667566013;



> p:=-1.667566013;



> t1:=.5172825777-.7192235937e-1\*(i1+i2)/i1/i2-.1438447187\*(i2+i3)/i2/i3+.2e-1\*(i1+i2+i3)/i1/i2/i3 = 0;



> t2:=7.732717430-.2780776408\*(i1+i2)/i1/i2-.5561552816\*(i2+i3)/i2/i3+.2e-1\*(i1+i2+i3)/i1/i2/i3 = 0;



> t3:=7.732717430-.2780776408\*(i1+i2)/i1/i2-.5561552816\*(i2+i3)/i2/i3+.2e-1\*(i1+i2+i3)/i1/i2/i3 = 0;



> solve({t1,t2,t3},{i2,i3});



Решение примера 5

> restart;

> i1:=0.2;



> i2:=0.3;



> i3:=0.1;



> p:=.8480705122;



> p:=1.667566013;



> t1:=p^4-(k1\*(i1+i2)/(i1\*i2)+k2\*(i2+i3)/(i2\*i3))\*p^2+k1\*k2\*(i1+i2+i3)/(i1\*i2\*i3)=0;



> t2:=p^4-(k1\*(i1+i2)/(i1\*i2)+k2\*(i2+i3)/(i2\*i3))\*p^2+k1\*k2\*(i1+i2+i3)/(i1\*i2\*i3)=0;



> solve({t1,t2},{k1,k2});



Решение примера 6

> restart;

> i4:=0.2;



> k1:=0.1;

> k2:=0.2;



> k3:=0.3;



> p:=1.581138830;



> p:=2.417091066;



> p:=-1.581138830;



> t1:=p^6-(k1\*(i1+i2)/(i1\*i2)+k2\*(i2+i3)/(i2\*i3)+k3\*(i3+i4)/(i3\*i4))\*p^4+(k1\*k2\*(i1+i2+i3)/(i1\*i2\*i3)+k2\*k3\*(i2+i3+i4)/(i2\*i3\*i4)+k1\*k3\*(i1+i3+i4)/(i1\*i3\*i4))\*p^2+k1\*k2\*k3(i1+i2+i3+i4)/(i1\*i2\*i3\*i4)=0;



> t2:=p^6-(k1\*(i1+i2)/(i1\*i2)+k2\*(i2+i3)/(i2\*i3)+k3\*(i3+i4)/(i3\*i4))\*p^4+(k1\*k2\*(i1+i2+i3)/(i1\*i2\*i3)+k2\*k3\*(i2+i3+i4)/(i2\*i3\*i4)+k1\*k3\*(i1+i3+i4)/(i1\*i3\*i4))\*p^2+k1\*k2\*k3(i1+i2+i3+i4)/(i1\*i2\*i3\*i4)=0;



> t3:=p^6-(k1\*(i1+i2)/(i1\*i2)+k2\*(i2+i3)/(i2\*i3)+k3\*(i3+i4)/(i3\*i4))\*p^4+(k1\*k2\*(i1+i2+i3)/(i1\*i2\*i3)+k2\*k3\*(i2+i3+i4)/(i2\*i3\*i4)+k1\*k3\*(i1+i3+i4)/(i1\*i3\*i4))\*p^2+k1\*k2\*k3(i1+i2+i3+i4)/(i1\*i2\*i3\*i4)=0;



> solve({t1,t2,t3},{i1,i2,i3});



# Заключение

В работе исследована и решена прямая задача определения собственных частот крутильных колебаний вала с дисками по известным моментам инерции масс дисков и коэффициентов жесткости участков вала на кручении. Решение сведено к системе n обыкновенных уравнений относительно неизвестных собственных частот крутильных колебаний вала. Из этой системы получены частотные уравнения для вала с двумя, тремя, четырьмя дисками. Сделаны соответствующие вычисления, составлена программа в математическом пакете Maple.

Впервые приведена постановка обратной спектральной задачи диагностирования характеристик вала с дисками по спектру частот его колебаний. Алгоритм диагностирования сводится к решению систем алгебраических уравнений. Рассмотрены диагностирования моментов инерции масс дисков по собственным частотам колебаний вала. Задача решена для вала с тремя, четырьмя дисками. Эти характеристики однозначно определяются для двух дисков вала с тремя дисками при известном моменте инерции массы третьего диска. Показано, что для вала с тремя дисками достаточно знание двух собственных частот колебаний вала. Причем, численные решения показывают возможность определения моментов инерции масс любых двух дисков (при известном моменте третьего диска), независимо от их взаимного расположения.

Аналогичная задача решена для вала с четырьмя дисками.

Диагностируются также коэффициенты жесткостей участков вала при кручении между дисками. Для вала с тремя дисками коэффициенты жесткостей восстанавливаются по двум собственным частотам. Для решения обратных задач составлены программы в математическом пакете Maple. Полученные результаты обратных задач подтверждают справедливость решений прямых задач.

# Список литературы

1. Введение в акустическую динамику машин: учеб.пос./ И.И. Артоболевский [и др]. - М.: Наука, 1979. - 295c.
2. Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. - 2001. - Вып. 2. C. 290-298.
3. Ахтямов, А.М. Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний / А.М. Ахтямов // Известия РАН. МТТ. - 2003. - №6. - C.137-147.
4. Ахтямов, А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи / А.М. Ахтямов // Дифференциальные уравнения. - 2003. - №8. - C. 1011-1015.
5. Ахтямов, А.М. Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний / А.М. Ахтямов // Известия РАЕН. Серия МММИУ. Т.5. -2001. - №3. - C. 103-110.
6. Бабаков, И.В. Теория колебаний /И.В. Бабаков - М: Дрофа, 2004.
7. Биргер, И.А. Техническая диагностика /И.А. Биргер - М.: Машиностроение, 1978. - 239с.
8. Васильев, Н.А. Экспериментальные исследования колебательных характеристик железнодорожных шпал /Н.А.Васильев// Акустический журнал. - 2000. - №3. - C. 424-426.
9. Вибрации в технике: Справочник. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина, 1978.
10. Снижение шума на судах: учеб.пос. / В.И. Зинченко [и др]. - Л.: Судостроение, 1968.
11. Коллатц. Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями): учеб.пос./Л. Коллатц – М.: Наука, 1968.
12. Кузьмин Р.В. Дифектация судовых механизмов. - М.: Транспорт, 1967. - 174с.
13. Лапин, А.Д. Резонансный поглотитель изгибных волн в стержнях и пластинах /А.Д.Лапин// Акустический журнал. - 2002. - №2. - C. 277-280.
14. Павлов, Б.В. Акустическая диагностика механизмов /Б.В.Павлов - М.: Машиностроение, 1971.
15. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. /Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. - М: Машиностроение, 1968.
16. Сафина, Г.Ф. Диагностирование закреплений трубопровода с жидкостью /Г.Ф. Сафина// Управление. Контроль. Диагностика. -2006. -№ 3.
17. Сафина, Г.Ф. Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний /Г.Ф. Сафина// / Контроль. Диагностика. - 2005. - №12. - С. 55-59.
18. Сафина, Г.Ф. Определение относительной жесткости упругих краевых ребер трубопровода, наполненного жидкостью /Г.Ф.Сафина// Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2005. - Т.12, вып.2. - С. 503-504.
19. Тукмаков, А.Л. О распознавании объектов на основе анализа акустического отклика при помощи функции числа состояний динамической системы /А.Л. Тукмаков// Авиационная техника. - 2003. - №1. - C. 62-67.