**Содержание**

Введение 3

1 Марковские цепи с конечным числом состояний и дискретным временем 4

2 Марковские цепи с конечным числом состояний и непрерывным временем 8

3 Процессы рождения и гибели 11

4 Основные понятия и классификация систем массового обслуживания 14

5 Основные типы открытых систем массового обслуживания 20

5.1 Одноканальная система массового обслуживания с отказами 20

5.2 Многоканальная система массового обслуживания с отказами 21

5.3 Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди 23

5.4 Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью 26

5.5 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью 27

5.6 Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью 30

5.7 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью и ограниченным временем ожидания в очереди 32

6 Метод Монте-Карло 36

6.1 Основная идея метода 36

6.2 Разыгрывание непрерывной случайной величины 36

6.3 Случайная величина с экспоненциальным распределением 38

7 Исследование системы массового обслуживания 40

7.1 Проверка гипотезы о показательном распределении 40

7.2 Расчет основных показателей системы массового обслуживания 45

7.3 Выводы о работе исследуемой СМО 50

8 Исследование видоизмененной СМО 51

Заключение 53

Список использованных источников 54

# **Введение**

Темой моей дипломной работы является исследование системы массового обслуживания. В своем изначальном состоянии рассматриваемая мной СМО представляет собой один из классических случаев, а конкретно M/M/2/5 по принятому обозначению Кэндалла. После исследования системы были сделаны выводы о неэффективности ее работы. Были предложены методы оптимизации работы СМО, но с этими изменениями система перестает быть классической. Основная проблема при исследовании систем массового обслуживания заключается в том, что в реальности они могут быть исследованы с использованием классической теории массового обслуживания только в редких случаях. Потоки входящих и исходящих заявок могут оказаться не простейшими, следовательно, нахождение предельных вероятностей состояний с использованием системы дифференциальных уравнений Колмогорова невозможно, в системе могут присутствовать приоритетные классы, тогда расчет основных показателей СМО также невозможен.

Для оптимизации работы СМО была введена система из двух приоритетных классов и увеличено число обслуживающих каналов. В таком случае целесообразно применить методы имитационного моделирования, например метод Монте-Карло. Основная идея метода заключается в том, что вместо неизвестной случайной величины принимается ее математическое ожидание в достаточно большой серии испытаний. Производится разыгрывание случайной величины (в данном случае это интенсивности входящего и исходящего потоков) изначально равномерно распределенной. Затем осуществляется переход от равномерного распределения к показательному распределению, посредством формул перехода. Была написана программа на языке Visual Basic, реализующая этот метод.

# **1 Марковские цепи с конечным числом состояний и дискретным временем**

Пусть некоторая система S может находиться в одном из состояний конечного (или счетного) множества возможных состояний S1, S2,…, Sn, а переход из одного состояния в другое возможен только в определенные дискретные моменты времени t1, t2, t3, называемые шагами.

Если система переходит из одного состояния в другое случайно, то говорят, что имеет место случайный процесс с дискретным временем.

Случайный процесс называется марковским, если вероятность перехода из любого состояния Si в любое состояние Sj не зависит от того, как и когда система S попала в состояние Si (т.е. в системе S отсутствует последствие). В таком случае говорят, что функционирование системы S описывается дискретной цепью Маркова.

Переходы системы S в различные состояния удобно изображать с помощью графа состояний (рис. 1).

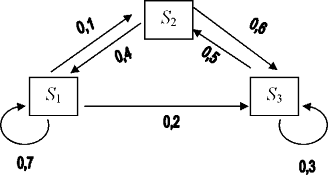


Рисунок 1 – Пример размеченного графа состояний

Вершины графа S1, S2, S3 обозначают возможные состояния системы. Стрелка, направленная из вершины Si в вершину Sj обозначает переход ; число, стоящее рядом со стрелкой, обозначает величину вероятности этого перехода. Стрелка, замыкающаяся на i-той вершине графа, обозначает, что система остается в состоянии Si с вероятностью, стоящей у стрелки.

Графу системы, содержащему n вершин, можно поставить в соответствие матрицу NxN, элементами которой являются вероятности переходов pij между вершинами графа. Например, граф на рис. 1 описывается матрицей P:



называемой матрицей вероятностей переходов. Элементы матрицы pij удовлетворяют условиям:

 (1)

 (2)

Элементы матрицы pij – дают вероятности переходов в системе за один шаг. Переход

Si – Sj за два шага можно рассматривать как происходящий на первом шаге из Si в некоторое промежуточное состояние Sk и на втором шаге из Sk в Si. Таким образом, для элементов матрицы вероятностей переходов из Si в Sj за два шага получим:



В общем случае перехода  за m шагов для элементов  матрицы вероятностей переходов справедлива формула:

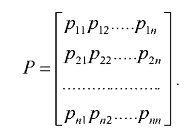
 (3)

Получим два эквивалентных выражения для :





Пусть система S описывается матрицей вероятностей переходов Р:



Если обозначить через Р(m) матрицу, элементами которой являются рi вероятности переходов из Si в Sj за m шагов, то справедлива формула

,

где матрица Рm получается умножением матрицы P саму на себя m раз.

Исходное состояние системы характеризуется вектором состояния системы Q(qi) (называемым также стохастическим вектором).



где qj - вероятность того, что исходным состоянием системы является Sj состояние. Аналогично (1) и (2) справедливы соотношения

Обозначим через



вектор состояния системы после m шагов, где qj – вероятность того, что после m шагов система находится в Si состоянии. Тогда справедлива формула



Если вероятности переходов Pij остаются постоянными, то такие марковские цепи называются стационарными. В противном случае марковская цепь называется нестационарной.

# 

# **2. Марковские цепи с конечным числом состояний и непрерывным временем**

Если система S может переходить в другое состояние случайным образом в произвольный момент времени, то говорят о случайном процессе с непрерывным временем. В отсутствии последействия такой процесс называется непрерывной марковской цепью. При этом вероятности переходов  для любых i и j в любой момент времени равны нулю (в силу непрерывности времени). По этой причине вместо вероятности перехода  вводится величина - плотность вероятности перехода из состояния  в состояние , определяемая как предел:

Если величины  не зависят от t, то марковский процесс называется однородным. Если за время  система может изменить свое состояние не более чем один раз, то говорят, что случайный процесс является ординарным. Величину  называют интенсивностью перехода системы из Si в Sj. На графе состояний системы численные значения  ставят рядом со стрелками, показывающими переходы в вершины графа.

Зная интенсивности переходов можно найти величины p1(t), p2(t),…, pn(t) – вероятности нахождения системы S в состояниях S1, S2,…, Sn соответственно. При этом выполняется условие:



Распределение вероятностей состояний системы, которое можно характеризовать вектором , называется стационарным, если оно не зависит от времени, т.е. все компоненты вектора  являются константами.

Состояния Si и Sj называются сообщающимися, если возможны переходы .

Состояние Si называется существенным, если всякое Sj, достижимое из Si, является сообщающимся с Si. Состояние Si называется несущественным, если оно не является существенным.

Если существуют предельные вероятности состояний системы:

,

не зависящие от начального состояния системы, то говорят, что при  в системе устанавливается стационарный режим.

Система, в которой существуют предельные (финальные) вероятности состояний системы, называется эргодической, а протекающий в ней случайный процесс эргодическим.

Теорема 1. Если Si – несущественное состояние, то  т.е. при  система выходит из любого несущественного состояния.

Теорема 2. Чтобы система с конечным числом состояний имела единственное предельное распределение вероятностей состояний, необходимо и достаточно, чтобы все ее существенные состояния сообщались между собой.

Если случайный процесс, происходящий в системе с дискретными состояниями является непрерывной марковской цепью, то для вероятностей p1(t), р2(t),…, pn(t) можно составить систему линейных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Колмогорова. При составлении уравнений удобно пользоваться графом состояний системы. В левой части каждого из них стоит производная вероятности какого-то (j-го) состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых возможен переход в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного (j-го) состояния, умноженная на вероятность данного (j-го) состояния.

# 

# **3 Процессы рождения и гибели**

Так называется широкий класс случайных процессов, происходящих в системе, размеченный граф состояний которой изображен на рис. 3.

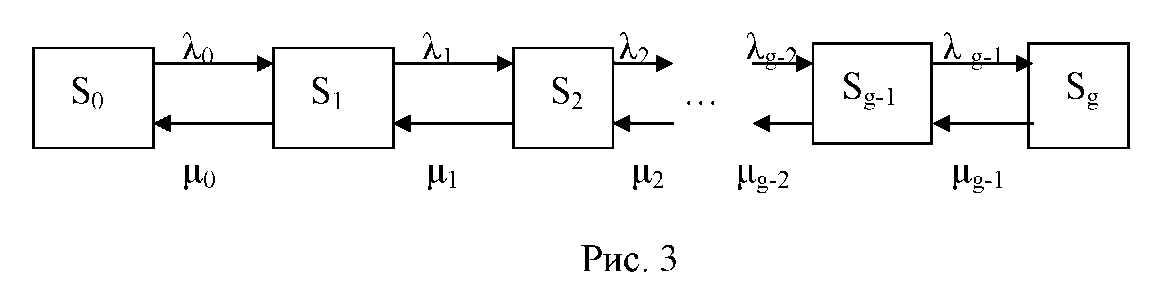


Рисунок 2 – Граф состояний для процессов гибели и размножения

Здесь величины , ,…,  – интенсивности переходов системы из состояния в состояние слева направо, можно интерпретировать как интенсивности рождения (возникновения заявок) в системе. Аналогично, величины ,,…, – интенсивности переходов системы из состояния в состояние справа налево, можно интерпретировать как интенсивности гибели (выполнения заявок) в системе.

Поскольку все состояния являются сообщающимися и существенными, существует (в силу теоремы 2) предельное (финальное) распределение вероятностей состояний. Получим формулы для финальных вероятностей состояний системы.

В стационарных условиях для каждого состояния поток, входящий в данное состояние должен равняться потоку, исходящему из данного состояния. Таким образом, имеем:

Для состояния S0:



Следовательно:



Для состояния S1:



Следовательно:



С учетом того, что :





Аналогично получаем уравнения для остальных состояний системы. В результате получим систему уравнений:



Решение этой системы будет иметь вид:

 (4)

, ,…,  (5)

# 

# **4. Основные понятия и классификация систем массового обслуживания**

Заявкой (или требованием) называется спрос на удовлетворение какой-либо потребности (далее потребности предполагаются однотипными). Выполнение заявки называется обслуживанием заявки.

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система для выполнения заявок, поступающих в неё в случайные моменты времени.

Поступление заявки в СМО называется событием. Последовательность событий, заключающихся в поступлении заявок в СМО, называется входящим потоком заявок. Последовательность событий, заключающихся в выполнении заявок в СМО, называется выходящим потоком заявок.

Поток заявок называется простейшим, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) отсутствие последействия, т.е. заявки поступают независимо друг от друга;

2) стационарность, т.е. вероятность поступления данного числа заявок на любом временном отрезке [t1; t2] зависит лишь от величины этого отрезка и не зависит от значения t1, что позволяет говорить о среднем числе заявок за единицу времени, λ, называемом интенсивностью потока заявок;

3) ординарность, т.е. в любой момент времени в СМО поступает лишь одна заявка, а поступление одновременно двух и более заявок пренебрежимо мало.

Для простейшего потока вероятность pi(t) поступления в СМО ровно i заявок за время t вычисляется по формуле:

 (6)

т.е. вероятности распределены по закону Пуассона с параметром λt. По этой причине простейший поток называется также пуассоновским потоком.

Функция распределения F(t) случайного интервала времени T между двумя последовательными заявками по определению равна . Но , где  – вероятность того, что следующая после последней заявки поступит в СМО по истечении времени t, т.е. за время t в СМО не поступит ни одна заявка. Но вероятность этого события находится из (6) при i = 0. Таким образом:



 (7)

Плотность вероятности f(t) случайной величины T определяется формулой:

 , 

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T равны соответственно:



Каналом обслуживания называется устройство в СМО, обслуживающее заявку. СМО, содержащее один канал обслуживания, называется одноканальной, а содержащее более одного канала обслуживания – многоканальной.

Если заявка, поступающая в СМО, может получить отказ в обслуживании (в силу занятости всех каналов обслуживания) и в случае отказа вынуждена покинуть СМО, то такая СМО называется СМО с отказами.

Если в случае отказа в обслуживании заявки могут вставать в очередь, то такие СМО называются СМО с очередью (или с ожиданием). При этом различают СМО с ограниченной и неограниченной очередью. Очередь может быть ограничена как по количеству мест, так и по времени ожидания. Различают СМО открытого и замкнутого типа. В СМО открытого типа поток заявок не зависит от СМО. В СМО замкнутого типа обслуживается ограниченный круг клиентов, а число заявок может существенно зависеть от состояния СМО (например, бригада слесарей – наладчиков, обслуживающих станки на заводе).

СМО могут также различаться по дисциплине обслуживания.

Если в СМО нет приоритета, то заявки отбираются из очереди в канал по различным правилам.

* Первым пришел – первым обслужен (FCFS – First Came – First Served)
* Последним пришел – первым обслужен (LCFS – Last Came – First Served)
* Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью обслуживания (SPT/SJE)
* Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей длительностью дообслуживания (SRPT)
* Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью обслуживания (SEPT)
* Первоочередное обслуживание требований с кратчайшей средней длительностью дообслуживания (SERPT)

Приоритеты бывают двух типов – абсолютный и относительный.

Если требование в процессе обслуживания может быть удалено из канала и возвращено в очередь (либо вовсе покидает СМО) при поступлении требования с более высоким приоритетом, то система работает с абсолютным приоритетом. Если обслуживание любого требования, находящегося в канале не может быть прервано, то СМО работает с относительным приоритетом. Существуют также приоритеты, осуществляемые с помощью конкретного правила или набора правил. Примером может служить приоритет, изменяющийся с течением времени.

СМО описываются некоторыми параметрами, которые характеризуют эффективность работы системы.

 – число каналов в СМО;

 – интенсивность поступления в СМО заявок;

 – интенсивность обслуживания заявок;

 – коэффициент загрузки СМО;

 – число мест в очереди;

 – вероятность отказа в обслуживании поступившей в СМО заявки;

 – вероятность обслуживания поступившей в СМО заявки (относительная пропускная способность СМО);

При этом:

 (8)

А – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО в единицу времени (абсолютная пропускная способность СМО)

 (9)

 – среднее число заявок, находящихся в СМО

 – среднее число каналов в СМО, занятых обслуживанием заявок. В тоже время это  – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО за единицу времени. Величина  определяется как математическое ожидание случайного числа занятых обслуживанием n каналов.

, (10)

где  – вероятность нахождения системы в Sk состоянии.

 – коэффициент занятости каналов

 – среднее время ожидания заявки в очереди

 – интенсивность ухода заявок из очереди

 – среднее число заявок в очереди. Определяется как математическое ожидание случайной величины m – числа заявок, состоящих в очереди

 (11)

Здесь  – вероятность нахождения в очереди i заявок;

 – среднее время пребывания заявки с СМО

 – среднее время пребывания заявки в очереди

Для открытых СМО справедливы соотношения:

 (12)

 (13)

Эти соотношения называются формулами Литтла и применяются только для стационарных потоков заявок и обслуживания.

Рассмотрим некоторые конкретные типы СМО. При этом будет предполагаться, что плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями в СМО имеет показательное распределение (7), а все потоки являются простейшими.

# 

# **5. Основные типы открытых систем массового обслуживания**

# 

# **5.1 Одноканальная система массового обслуживания с отказами**

Размеченный граф состояний одноканальной СМО представлен на рисунке 3.

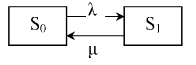


Рисунок 3 – Граф состояний одноканальной СМО

Здесь  и  – интенсивность потока заявок и выполнения заявок соответственно. Состояние системы So обозначает, что канал свободен, а S1 – что канал занят обслуживанием заявки.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для такой СМО имеет вид:



где po(t) и p1(t) – вероятности нахождения СМО в состояниях So и S1 соответственно. Уравнения для финальных вероятностей po и p1 получим, приравнивая нулю производные в первых двух уравнениях системы. В результате получим:

 (14)

 (15)

Вероятность p0 по своему смыслу есть вероятность обслуживания заявки pобс, т. к. канал является свободным, а вероятность р1 по своему смыслу является вероятностью отказа в обслуживании поступающей в СМО заявки ротк, т. к. канал занят обслуживанием предыдущей заявки.

# **5.2 Многоканальная система массового обслуживания с отказами**

Пусть СМО содержит n каналов, интенсивность входящего потока заявок равна , а интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна . Размеченный граф состояний системы изображён на рисунке 4.

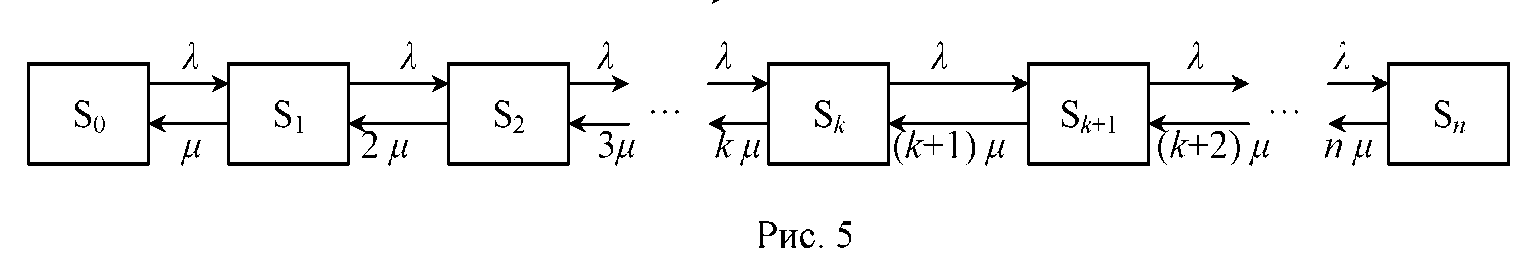


Рисунок 4 – Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Состояние S0 означает, что все каналы свободны, состояние Sk (k = 1, n) означает, что обслуживанием заявок заняты k каналов. Переход из одного состояния в другое соседнее правое происходит скачкообразно под воздействием входящего потока заявок интенсивностью  независимо от числа работающих каналов (верхние стрелки). Для перехода системы из одного состояния в соседнее левое неважно, какой именно канал освободится. Величина  характеризует интенсивность обслуживания заявок при работе в СМО k каналов (нижние стрелки).

Сравнивая графы на рис. 3 и на рис. 5 легко увидеть, что многоканальная СМО с отказами является частным случаем системы рождения и гибели, если в последней принять  и

 (16)

При этом для нахождения финальных вероятностей можно воспользоваться формулами (4) и (5). С учётом (16) получим из них:

 (17)

 (18)

Формулы (17) и (18) называются формулами Эрланга – основателя теории массового обслуживания.

Вероятность отказа в обслуживании заявки ротк равна вероятности того, что все каналы заняты, т.е. система находится в состоянии Sn. Таким образом,

 (19)

Относительную пропускную способность СМО найдём из (8) и (19):

 (20)

Абсолютную пропускную способность найдём из (9) и (20):



Среднее число занятых обслуживанием каналов можно найти по формуле (10), однако сделаем это проще. Так как каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем  заявок, то  можно найти по формуле:



# **5.3 Одноканальная система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди**

В СМО с ограниченной очередью число мест m в очереди ограничено. Следовательно, заявка, поступившая в момент времени, когда все места в очереди заняты, отклоняется и покидает СМО. Граф такой СМО представлен на рисунке 5.

S0

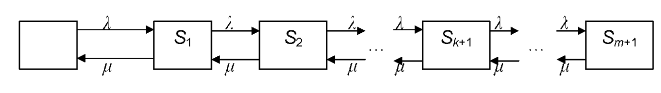


Рисунок 5 – Граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью

Состояния СМО представляются следующим образом:

S0 – канал обслуживания свободен,

S1 – канал обслуживания занят, но очереди нет,

S2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка,

Sk+1 – канал обслуживания занят, в очереди k заявок,

Sm+1 – канал обслуживания занят, все m мест в очереди заняты.

Для получения необходимых формул можно воспользоваться тем обстоятельством, что СМО на рисунок 5 является частным случаем системы рождения и гибели, представленной на рисунке 2, если в последней принять  и

 (21)

 (22)

 (23)

Выражения для финальных вероятностей состояний рассматриваемой СМО можно найти из (4) и (5) с учётом (21). В результате получим:

При р = 1 формулы (22), (23) принимают вид

При m = 0 (очереди нет) формулы (22), (23) переходят в формулы (14) и (15) для одноканальной СМО с отказами.

Поступившая в СМО заявка получает отказ в обслуживании, если СМО находится в состоянии Sm+1, т.е. вероятность отказа в обслуживании заявки равна:





Относительная пропускная способность СМО равна:



Абсолютная пропускная способность равна:



Среднее число заявок, стоящих в очереди Lоч, находится по формуле



и может быть записано в виде:

 (24)

При  формула (24) принимает вид:



 – среднее число заявок, находящихся в СМО, находится по формуле(10)



и может быть записано в виде:

 (25)

При , из (25) получим:



Среднее время пребывания заявки в СМО и в очереди находится по формулам (12) и (13) соответственно.

# 

# **5.4 Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью**

Примером такой СМО может служить директор предприятия, вынужденный рано или поздно решать вопросы, относящиеся к его компетенции, или, например, очередь в булочной с одним кассиром. Граф такой СМО изображён на рисунке 6.

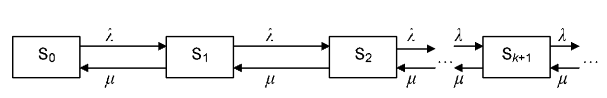


Рисунок 6 – Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

Все характеристики такой СМО можно получить из формул предыдущего раздела, полагая в них . При этом необходимо различать два существенно разных случая: а) ; б) . В первом случае, как это видно из формул (22), (23), р0 = 0 и pk = 0 (при всех конечных значениях k). Это означает, что при  очередь неограниченно возрастает, т.е. этот случай практического интереса не представляет.

Рассмотрим случай, когда . Формулы (22) и (23) при этом запишутся в виде:





Поскольку в СМО отсутствует ограничение на длину очереди, то любая заявка может быть обслужена, т.е. относительная пропускная способность равна:



Абсолютная пропускная способность равна:



Среднее число заявок в очереди получим из формулы (24) при :



Среднее число обслуживаемых заявок есть:



Среднее число заявок, находящихся в СМО:



Среднее время пребывания заявки в СМО и в очереди определяются формулами (12) и (13).

# **5.5 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью**

Пусть на вход СМО, имеющей  каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью . Интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна , а максимальное число мест в очереди равно .

Граф такой системы представлен на рисунке 7.

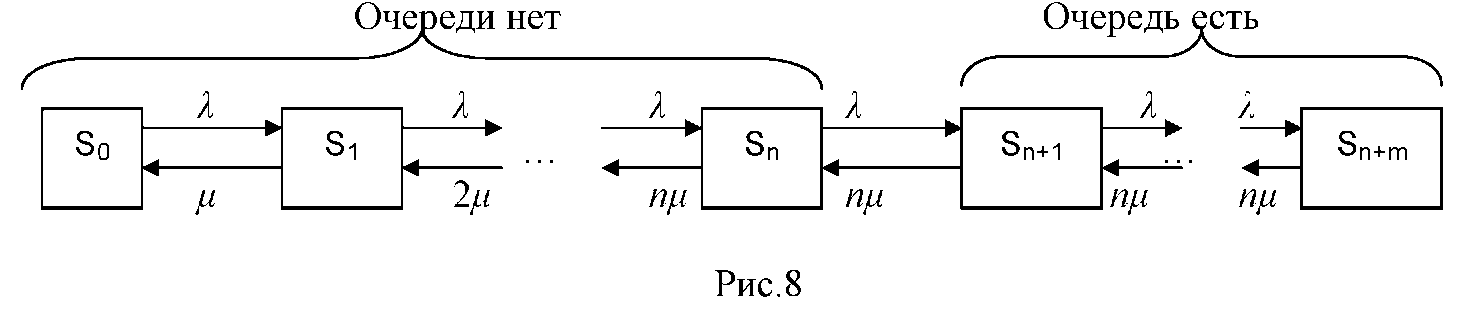


Рисунок 7 – Граф состояний многоканальной СМО с ограниченной очередью

 – все каналы свободны, очереди нет;

 – заняты *l* каналов (*l* = 1, n), очереди нет;

- заняты все n каналов, в очереди находится *i* заявок (*i* = 1, m).

Сравнение графов на рисунке 2 и рисунке 7 показывает, что последняя система является частным случаем системы рождения и гибели, если в ней сделать следующие замены (левые обозначения относятся к системе рождения и гибели):





Выражения для финальных вероятностей легко найти из формул (4) и (5). В результате получим:

 (26)



Образование очереди происходит, когда в момент поступления в СМО очередной заявки все каналы заняты, т.е. в системе находятся либо n, либо (n+1),…, либо (n + m – 1) заявок. Т.к. эти события несовместны, то вероятность образования очереди pоч равна сумме соответствующих вероятностей :

 (27)

Отказ в обслуживании заявки происходит, когда все m мест в очереди заняты, т.е.:



Относительная пропускная способность равна:



Абсолютная пропускная способность:



Среднее число заявок, находящихся в очереди, определяется по формуле (11) и может быть записано в виде:

 (28)

Среднее число заявок, обслуживаемых в СМО, может быть записано в виде:



Среднее число заявок, находящихся в СМО:



Среднее время пребывания заявки в СМО и в очереди определяется формулами (12) и (13).

# **5.6 Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью**

Граф такой СМО изображен на рисунке 8 и получается из графа на рисунке 7 при .

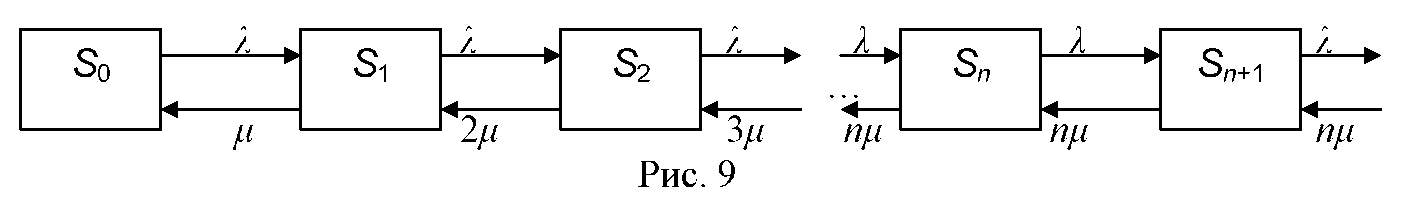


Рисунок 8 – Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью

Формулы для финальных вероятностей можно получить из формул для n-канальной СМО с ограниченной очередью при . При этом следует иметь в виду, что при  вероятность р0 = р1=…= pn = 0, т.е. очередь неограниченно возрастает. Следовательно, этот случай практического интереса не представляет и ниже рассматривается лишь случай . При  из (26) получим:



Формулы для остальных вероятностей имеют тот же вид, что и для СМО с ограниченной очередью:



Из (27) получим выражение для вероятности образования очереди заявок:



Поскольку очередь не ограничена, то вероятность отказа в обслуживании заявки:



Относительная пропускная способность:



Абсолютная пропускная способность:



Из формулы (28) при  получим выражение для среднего числа заявок в очереди:



Среднее число обслуживаемых заявок определяется формулой:



Среднее время пребывания в СМО и в очереди определяется формулами (12) и (13).

# **5.7 Многоканальная система массового обслуживания с ограниченной очередью и ограниченным временем ожидания в очереди**

Отличие такой СМО от СМО, рассмотренной в подразделе 5.5, состоит в том, что время ожидания обслуживания, когда заявка находится в очереди, считается случайной величиной, распределённой по показательному закону с параметром , где  – среднее время ожидания заявки в очереди, а  – имеет смысл интенсивности потока ухода заявок из очереди. Граф такой СМО изображён на рисунке 9.

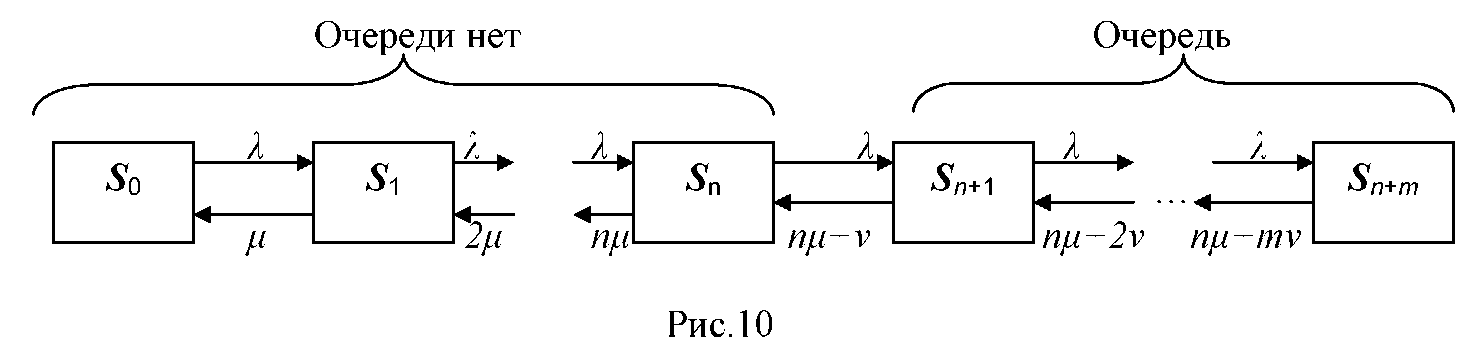


Рисунок 9 – Граф многоканальной СМО с ограниченной очередью и ограниченным временем ожидания в очереди

Остальные обозначения имеют здесь тот же смысл, что и в подразделе.

Сравнение графов на рис. 3 и 9 показывает, что последняя система является частным случаем системы рождения и гибели, если в ней сделать следующие замены (левые обозначения относятся к системе рождения и гибели):



 (29)

Выражения для финальных вероятностей легко найти из формул (4) и (5) с учетом (29). В результате получим:





,

где . Вероятность образования очереди определяется формулой:



Отказ в обслуживании заявки происходит, когда все m мест в очереди заняты, т.е. вероятность отказа в обслуживании:



Относительная пропускная способность:



Абсолютная пропускная способность:



Среднее число заявок, находящихся в очереди, находится по формуле (11) и равно:



Среднее число заявок, обслуживаемых в СМО, находится по формуле (10) и равно:



Среднее время пребывания заявки в СМО складывается из среднего времени ожидания в очереди и среднего времени обслуживания заявки:



# 

# **6. Метод Монте-Карло**

# 

# **6.1 Основная идея метода**

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение *а* некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину Х, математическое ожидание которой равно а: *М(Х)=а.*

Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений Х; вычисляют их среднее арифметическое  и принимают  в качестве оценки (приближённого значения) *a\** искомого числа a:

.

Поскольку метод Монте-Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют методом статистических испытаний.

# **6.2 Разыгрывание непрерывной случайной величины**

Пусть необходимо получить значения случайной величины , распределенной в интервале  с плотностью . Докажем, что значения  можно найти из уравнения

, (30)

где  – случайная величина, равномерно распределенная на интервале .

Т.е. выбрав очередное значение  надо решить уравнение (30) и найти очередное значение . Для доказательства рассмотрим функцию:



Имеем общие свойства плотности вероятности:

 (31)

 (32)

Из (31) и (32) следует, что , а производная .

Значит, функция  монотонно возрастает от 0 до 1. И любая прямая , где , пересекает график функции  в единственной точке, абсциссу которой мы и принимаем за . Таким образом, уравнение (30) всегда имеет одно и только одно решение.

Выберем теперь произвольный интервал , содержащийся внутри . Точкам этого интервала отвечают ординаты кривой, удовлетворяющие неравенству . Поэтому, если  принадлежит интервалу , то

 принадлежит интервалу , и наоборот. Значит: . Т.к.  равномерно распределена в , то

, а это как раз и означает, что случайная величина , являющаяся корнем уравнения (30) имеет плотность вероятностей .

# **6.3 Случайная величина с экспоненциальным распределением**

Простейшим потоком (или потоком Пуассона) называется такой поток заявок, когда промежуток времени  между двумя последовательными заявками есть случайная величина, распределенная на интервале  с плотностью



Вычислим математическое ожидание: 

После интегрирования по частям, получим:

.

Параметр  есть интенсивность потока заявок.

Формулу для розыгрыша  получим из уравнения (30), которое в данном случае запишется так: .

Вычислив интеграл, стоящий слева, получим соотношение . Отсюда, выражая , получим:

 (33)

Т.к. величина  распределена также как и , следовательно, формулу (33) можно записать в виде:

 (34)

**7 Исследование системы массового обслуживания**

# 

# **7.1 Проверка гипотезы о показательном распределении**

Исследуемое мной предприятие представляет собой двухканальную систему массового обслуживания с ограниченной очередью. На вход поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивности обслуживания заявок каждым из каналов μ, а максимальное число мест в очереди m.

Начальные параметры:





Время обслуживания заявок имеет эмпирическое распределение, указанное ниже и имеет среднее значение .



Мной были проведены контрольные замеры времени обработки заявок, поступающих в данную СМО. Чтобы приступить к исследованию, необходимо установить по этим замерам закон распределения времени обработки заявок.

Таблица 6.1 – Группировка заявок по времени обработки

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Количество заявок | 22 | 25 | 23 | 16 | 14 | 10 | 8 | 4 |
| Время обработки, мин | 0–5 | 5–10 | 10–15 | 15–20 | 20–25 | 25–30 | 30–35 | 35–40 |

Выдвигается гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности.

Для того чтобы, при уровне значимости  проверить гипотезу о том, что непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, надо:

1) Найти по заданному эмпирическому распределению выборочную среднюю . Для этого, каждый i – й интервал заменяем его серединой  и составляем последовательность равноотстоящих вариант и соответствующих им частот.

2) Принять в качестве оценки параметра *λ* показательного распределения величину, обратную выборочной средней:



3) Найти вероятности попадания X в частичные интервалы по формуле:



4) Вычислить теоретические частоты:

,

где - объем выборки

5) Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы , где S – число интервалов первоначальной выборки.

Таблица 6.2 – Группировка заявок по времени обработки с усредненным временным интервалом

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Количество заявок | 22 | 25 | 23 | 16 | 14 | 10 | 8 | 4 |
| Время обработки, мин | 2,5 | 7,5 | 12,5 | 17,5 | 22,5 | 27,5 | 32,5 | 37,5 |

Найдем выборочную среднюю:



2) Примем в качестве оценки параметра λ экспоненциального распределения величину, равную . Тогда:

 ()

3) Найдем вероятности попадания X в каждый из интервалов по формуле:



Для первого интервала:



Для второго интервала:



Для третьего интервала:



Для четвертого интервала:



Для пятого интервала:



Для шестого интервала:



Для седьмого интервала:



Для восьмого интервала:



4) Вычислим теоретические частоты:



Результаты вычислений заносим в таблицу. Сравниваем эмпирические  и теоретические  частоты с помощью критерия Пирсона.

Для этого вычислим разности , их квадраты, затем отношения . Суммируя значения последнего столбца, находим наблюдаемое значение критерия Пирсона. По таблице критических точек распределения  при уровне значимости  и числу степеней свободы  находим критическую точку 

Таблица 6.3 – Результаты вычислений

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 22 | 0,285 | 34,77 | -12,77 | 163,073 | 4,690 |
| 2 | 25 | 0,204 | 24,888 | 0,112 | 0,013 | 0,001 |
| 3 | 23 | 0,146 | 17,812 | 5,188 | 26,915 | 1,511 |
| 4 | 16 | 0,104 | 12,688 | 3,312 | 10,969 | 0,865 |
| 5 | 14 | 0,075 | 9,15 | 4,85 | 23,523 | 2,571 |
| 6 | 10 | 0,053 | 6,466 | 3,534 | 12,489 | 1,932 |
| 7 | 8 | 0,038 | 4,636 | 3,364 | 11,316 | 2,441 |
| 8 | 4 | 0,027 | 3,294 | 0,706 | 0,498 | 0,151 |
|  | 122 |  |  |  |  |  |

Т.к. , то нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении X по показательному закону. Другими словами, данные наблюдений согласуются с этой гипотезой.

# **7.2 Расчет основных показателей системы массового обслуживания**

Данная система представляет собой частный случай системы гибели и размножения.

Граф данной системы:

S0

S1

S2

S3

S4

S5

S6

λ

λ

λ

λ

λ

λ

μ

2μ

2μ

2μ

2μ

2μ

S7

λ

2μ

Очереди нет

Очередь есть

Рисунок 10 – Граф состояний исследуемой СМО

Поскольку все состояния являются сообщающимися и существенными, то существует предельное распределение вероятностей состояний. В стационарных условиях поток, входящий в данное состояние должен быть равен потоку, выходящему из данного состояния.

 (1)

Для состояния S0:



Следовательно:



Для состояния S1:



Следовательно:



С учетом того, что :





Аналогично получаем уравнения для остальных состояний системы. В результате получим систему уравнений:



Решение этой системы будет иметь вид:



; ; ; ; ;

; .

Или, с учетом (1):



; ; ; ; ; ;

.

Коэффициент загруженности СМО:





С учетом этого предельные вероятности перепишем в виде:

































Наивероятнейшее состояние – оба канала СМО заняты и заняты все места в очереди.

Вероятность образования очереди:



Отказ в обслуживании заявки происходит, когда все m мест в очереди заняты, т.е.:



Относительная пропускная способность равна:



Вероятность того, что вновь поступившая заявка будет обслужена, равна 0,529

Абсолютная пропускная способность:



СМО обслуживает в среднем 0,13225 заявок в минуту.

Среднее число заявок, находящихся в очереди:



Среднее число заявок в очереди близко к максимальной длине очереди.

Среднее число заявок, обслуживаемых в СМО, может быть записано в виде:



В среднем все каналы СМО постоянно заняты.

Среднее число заявок, находящихся в СМО:



Для открытых СМО справедливы формулы Литтла:

Среднее время пребывания заявки с СМО:



Среднее время пребывания заявки в очереди:



# 

# **7.3 Выводы о работе исследуемой СМО**

Наиболее вероятное состояние данной СМО – занятость всех каналов и мест в очереди. Приблизительно половина всех поступающих заявок покидают СМО необслуженными. Приблизительно 66,5% времени ожидания приходиться на ожидание в очереди. Оба канала постоянно заняты. Все это говорит о том, что в целом данная схема СМО неудовлетворительна.

Чтобы снизить загрузку каналов, сократить время ожидания в очереди и снизить вероятность отказа необходимо увеличить число каналов и ввести систему приоритетов для заявок. Число каналов целесообразно увеличить до 4. Также необходимо сменить дисциплину обслуживания с FIFO на систему с приоритетами. Все заявки теперь будут иметь принадлежность к одному из двух приоритетных классов. Заявки I класса имеют относительный приоритет по отношению к заявкам II класса. Для расчета основных показателей этой видоизмененной СМО целесообразно применить какой-либо из методов имитационного моделирования. Была написана программа на языке Visual Basic, реализующая метод Монте-Карло.

# 

# **8 Исследование видоизмененной СМО**

Пользователю при работе с программой необходимо задать основные параметры СМО, такие как интенсивности потоков, количество каналов, приоритетных классов, мест в очереди (если количество мест в очереди равно нулю, то СМО с отказами), а также временной интервал модуляции и количество испытаний. Программа преобразовывает сгенерированные случайные числа по формуле (34), таким образом, пользователь получает последовательность временных интервалов , распределенных показательно. Затем отбирается заявка с минимальным , и ставится в очередь, согласно ее приоритету. За это же время  происходит перерасчет очереди и каналов. Затем эта операция повторяется до окончания времени модуляции, задаваемого изначально. В теле программы присутствуют счетчики, на основании показаний которых и формируются основные показатели СМО. Если для увеличения точности было задано несколько испытаний, то в качестве конечных результатов принимается оценка за серию опытов. Программа получилась достаточно универсальной, с ее помощью могут быть исследованы СМО с любым количеством приоритетных классов, либо вообще без приоритетов. Для проверки корректности работы алгоритма, в него были введены исходные данные классической СМО, исследуемой в разделе 7. Программа смоделировала результат близкий к тому, который был получен с помощью методов теории массового обслуживания (см. приложение Б). Погрешность, возникшая в ходе имитационного моделирования, может быть объяснена тем, что проведено недостаточное количество испытаний. Результаты, полученные с помощью программы для СМО с двумя приоритетными классами и увеличенным числом каналов, показывают целесообразность этих изменений (см. приложение В). Высший приоритет был присвоен более «быстрым» заявкам, что позволяет быстро обследовать короткие задания. Сокращается средняя длина очереди в системе, а соответственно минимизируется средство для организации очереди. В качестве основного недостатка данной организации можно выделить то, что «долгие» заявки находятся в очереди длительно время или вообще получают отказ. Введенные приоритеты могут быть переназначены после оценки полезности того или иного типа заявок для СМО.

# **Заключение**

В данной работе была исследована двухканальная СМО методами теории массового обслуживания, рассчитаны основные показатели, характеризующие ее работу. Был сделан вывод о том, что данный режим работы СМО не является оптимальным и были предложены методы, снижающие загруженность и повышающие пропускную способность системы. Для проверки этих методов была создана программа, моделирующая метод Монте-Карло, с помощью которой были подтверждены результаты вычислений для исходной модели СМО, а также рассчитаны основные показатели для видоизмененной. Погрешность алгоритма может быть оценена и снижена путем увеличения количества испытаний. Универсальность программы позволяет использовать ее при исследовании различных СМО, в том числе и классических.

# **Список использованных источников**

1 Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. − М.: «Советское радио», 1972. − 552 с.

2 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. − М.: «Высшая школа», 2003. − 479 с.

3 Лаврусь, О.Е. Теория массового обслуживания. Методические указания/ О.Е. Лаврусь, Ф.С. Миронов. − Самара: СамГАПС, 2002.− 38 с.

4 Саакян, Г.Р. Теория массового обслуживания: лекции / Г.Р. Саакян. − Шахты: ЮРГУЭС, 2006. − 27 с.

5 Авсиевич, А.В. Теория массового обслуживания. Потоки требований, системы массового обслуживания / А.В. Авсиевич, Е.Н. Авсиевич. − Самара: СамГАПС, 2004. − 24 с.

6 Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. В 3. т. Т. 3/ В.Д. Черненко. − Санкт – Петербург: Политехника, 2003. − 476 с.

7 Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. Пер.с англ./ Пер. И.И. Грушко; под ред. В.И. Нейман. − М.: Машиностроение, 1979. − 432 с.

8 Олзоева, С.И. Моделирование и расчет распределенных информационных систем. Учебное пособие / С.И. Олзоева. − Улан-Удэ: ВСГТУ, 2004. − 66 с.

9 Соболь, И.М. Метод Монте-Карло / И.М. Соболь. − М.: «Наука», 1968. − 64 с.