**Министерство Образования Российской Федерации**

Математический факультет

***Кафедра алгебры и геометрии***

**Выпускная квалификационная работа**

 ***«Редуцированные полукольца»***

#####  Работу выполнил студент

 математического факультета

\Подпись\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 Научный руководитель:

К.физ.-мат. наук

 .

\Подпись\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Рецензент:

Д. физ.-мат. наук, профессор

.

\Подпись\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Допущен к защите в ГАК

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

 «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Декан факультета \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

 «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Киров, 2003.**

**План.**

1. Введение.
2. Основные понятия, леммы и предложения.
3. Доказательство основной теоремы.

 ***1.Введение***

**Определение 1.** Непустое множество *S* с бинарными операциями + и ⋅ называется *полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

1. (*S*, +) − коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;
2. (*S*, ⋅) − полугруппа с нейтральным элементом 1;
3. умножение дистрибутивно относительно сложения:

 *a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc*

для любых *a, b, c ∈ S;*

1. *0a = 0 = a0* для любого *a∈ S.*

Итак, по принятому нами определению полукольцо отличается от ассоциативного кольца с единицей отсутствием операции вычитания и именно это вызывает основные трудности при работе с полукольцами.

 В настоящей работе рассмотрен такой класс полуколец, как редуцированные полукольца.

**Определение 2.** Полукольцо *S* называется *редуцированным*, если для любых *a, b∈S* выполняется *a = b*, как только *a+ b= ab + ba*.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

***Теорема .*** *Для всякого редуцированного полукольца S равносильны следующие условия:*

1. *S слабо риккартово;*
2. *∀ a, b∈S (D(a)∩D(b)=∅⇒ =∅);*

1. *все идеалы Op, P∈Spec S, первичны(эквивалентно, вполне первичны, псевдопросты);*
2. *все идеалы OM, M∈ Max S, первичны (эквивалентно, вполне первичны, псевдопросты) и P ⊆ M ⇒ Op=OM для ∀ P∈ Spec S и M∈ Max S;*
3. *каждый первичный идеал полукольца S содержит единственный минимальный первичный идеал;*
4. *∀ a, b∈ S (ab = 0 ⇒ Ann a + Ann b = S);*

# Эта теорема обобщает факты, доказанные в классе колец ([1]).

#  ***2.Основные понятия, леммы и предложения***

# Для доказательства нашей теоремы нам потребуется определить некоторые понятия и вывести несколько фактов.

 **Определение 3.** Полукольцо *S* называется *симметрическим*, если для любых элементов *a, b, b′*, *c ∈ S* выполняется

 *abc = ab*′*c* ⇔ *acb = acb*′.

 **Определение 4.** Элемент *a∈S* называется *нильпотентным*, если в последовательности *a, a, a,…, a,* … встретится нуль.

**Предложение 1.** *Редуцированное полукольцо S является симметрическим полукольцом без нильпотентов*.

 **Доказательство:** Пусть *ab = ab*′. Тогда

  *baba* = *bab*′*a*  и *b*′*aba* = *b*′*ab*′*a*,

откуда

 *baba + b′ab′a = bab′a + b′aba*

или иначе

 (*ba*)+ (*b*′*a*)= *bab*′*a* + *b*′*aba*.

В силу редуцированности *ba* = b′*a*, т.е.

 *ab* = *ab*′ ⇒ *ba* = *b*′*a*. (1)

 Аналогично доказывается *ba* = *b*′*a* ⇒ *ab* = *ab*′.

 Пусть *ab* = *ab*′. Тогда с помощью (1) *ba* = *b*′*a*, откуда *bac* = *b*′*ac* и *acb* = *acb*′. Значит, имеем:

  *ab* = *ab*′ ⇒ acb = *acb*′, *ba* = *b*′*a* ⇒ *bca* = *b*′*ca.* (2)

 Пусть сейчас *abc* = *abc*′. Тогда

 *abc* = *ab*′*c* ⇒ *acbc* = *acb*′*c* ⇒ *acbac* = *acb*′*ac* ⇒ *acbacb* = *acb*′*acb* и

*acbacb*′= *acb*′*acb*′⇒ *(acb)+ (acb*′*)= acb*′*acb* + *acbacb*′ ⇒ *acb* = *acb*′.

Таким же образом доказывается другая импликация.

 Пусть *a*+ *b*= *ab* + *ba* влечёт *a* = *b*. При *b* = 0 получаем *a*= 0 ⇒ *a* = 0. Если *с*= 0 для некоторого натурального *n* > 2, то *c*= 0 для *k* ∈ *Ν* с условием n ≤ 2. Получаем, что *c*= 0, и так далее. На некотором шаге получим *c*= 0, откуда *с* = 0. Предложение доказано.

 **Пример.** Рассмотрим полукольцо *S* = {0, *a*, *b,* 1}, операции в котором заданы следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  **+** | *a b* 1 |
| *a**b*1 | *a b* 1 *b b b* 1 *b* 1 |

|  |  |
| --- | --- |
|  **•** | *a b* 1 |
| *a**b*1 | *a a a* *b b b* *a b* 1 |

 Пример этого полукольца показывает, что, во-первых, в определении симметричности полукольца импликации нужны в обе стороны, поскольку *aa* = *ab*, но *aa ≠ ba*. Во-вторых, *S* – полукольцо без нильпотентов, более того, без делителей нуля; однако симметрическим, в частности, редуцированным, оно не является. В этом проявляется отличие от колец, поскольку известно, что отсутствие нильпотентов в кольце влечёт кольцевую симметричность.

 **Определение 5.** Собственный двусторонний идеал *P* полукольца *S* называется *первичным*, если *AB* ⊆ *P* влечёт *A* ⊆ *P*  или *B* ⊆ *P* для любых идеалов *A* и *B*. Первичный идеал коммутативного полукольца называется простым.

 **Определение 6.** Правый идеал *P* полукольца *S* называется *псевдопростым*, если *ab* = 0 влечёт *a* ∈ *P* или *b* ∈ *P* для ∀*a, b* ∈ *S.*

 **Предложение 2*.*** *Идеал P полукольца S первичен тогда и только тогда, когда для любых элементов a, b ∈ S \ P найдётся элемент s ∈ S такой, что asb ∉ P. Если S − коммутативное полукольцо, то идеал P прост тогда и только тогда, когда a, b ∉ P влечёт ab ∉ P.*

 **Доказательство:** Пусть *P* первичен и элементы *a, b* ∉ *P*. Тогда главные идеалы (*a*) и (*b*) не лежат в *P*, как и их произведение. Значит, некоторый элемент *t* ∈ *aSb* не принадлежит *P*, поскольку *t* = для некоторых  *u,v,w∈* *S*, то хотя бы для одного *i* ∈ {1,…,*k*} *a vb* ∉ *P*, ибо в противном случае каждое слагаемое *uavbw* лежит в *P*, и следовательно, *t* ∈ *P*.

 Обратно. Пусть произведение идеалов *A* и *B* лежит в *P*, но *A* *P*. Тогда найдётся *a* ∈ *A \ P*. Предположим, что *B* *P*. Получим, что некоторый элемент *b* ∈ *B \ P* и по условию *asb* ∉ *P* для подходящего *s* ∈*S*. Но тогда и *AB* *P*, и следовательно, *P* − первичный идеал.

 Утверждение для коммутативного случая очевидно.

**Определение 7.** Подмножество *T* полукольца называется *m−системой*, если 0 ∉*T*, 1 ∈*T* и для любых *a, b* ∈ *T* найдётся такой *s* ∈*S*, что *asb* ∈ *T*.

**Пример.** Рассмотрим множество *T* = {*a,a*, *a*, … , *a*}, где *n ∈ Ν* и *a ≠* 0. Оно является подмножеством полукольца *R*неотрицательных действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения. 0 ∉ *T*, 1∈ *T* и для ∀*a*,*a*∈ *T* ∃*с* = 1∈*S* : *aсa*= *a*∈ *T.* Таким образом, *T* является *m−*системой.

Легко увидеть, что если *P* – первичный идеал, то *S \ P* является *m*-системой. И хотя дополнение до *m−*системы не обязано быть первичным идеалом, следующее утверждение показывает, что между ними существует глубокая связь.

**Предложение 3*.*** *Пусть T − m−система, а J − произвольный идеал полукольца S, не пересекающийся с T. Тогда любой максимальный идеал среди содержащих J и не пересекающихся с T первичен.*

**Доказательство:** Пусть *P* ⊇ *J*, *P* ∩ *T* = ∅ и *P* − максимальный в семействе идеалов, удовлетворяющих этим условиям. Допустим, что *aSb* ⊆ *P* для некоторых *a, b* ∉ *P*. Идеалы P + *SaS* и *P* + *SbS* строго содержат идеал *P*, и значит, пересекаются с *T.* Пусть *m* ∈ (*P* + *SaS*) ∩ *T*, *r* ∈ (*P* + *SbS*) ∩ *T* и *msr* ∈ *T* для некоторого *s*∈*S*. Но, с другой стороны,

 *msr* ∈ (*P* + *SaS*) ⋅ (*P* + *SbS*) ⊆ *P* +*SaSbS* ⊆ *P*.

Получили противоречие, что *P* пересекается с *T*. Значит, предположение, что *aSb* ∈ *P* неверно, и *P* − первичный идеал. Предложение доказано.

**Определение 8.** Собственный идеал *M* полукольца *S* называется *максимальным* идеалом, если *M* ⊆ *A* влечёт *M* = *A* или *A* = *S* для каждого идеала *A*.

 **Предложение 4*.*** *Максимальный идеал полукольца первичен.*

**Доказательство:** Рассмотрим нулевой идеал *J* и не пересекающуюся с ним *m*−систему *T* = {1}. Любой максимальный идеал *M* полукольца содержит *J* и не пересекается с *T*, значит, по предложению 3 он будет первичным.

**Определение 9.** Для любого *a* ∈ *S* множество

*Ann aS* = {*t* ∈ *S*: (∀*s* ∈ *S*) *ast*=0} называется *аннулятором элемента a*.

*Ann* *aS* является двусторонним идеалом полукольца *S*.

*Ann* *a* ={*s* ∈ *S*: *as* = 0} − правый идеал и *Ann* *aS* ⊆ *Ann a*.

**Определение 10.** Для любого идеала *P* множество *Op* = {*s* ∈ *S*: (∃*t*∉*P*) *sSt* = 0} = {*s* ∈ *S*: Ann *sS* *P*} называется *O−компонентой идеала P*.

 **Лемма 1.** *Op является идеалом для любого первичного идеала P*.

 **Доказательство:** Пусть *a, b* ∈ *Op*. Тогда *aSt* = 0 и *bSu* = 0 для некоторых *t, u* ∉ *P*. В силу первичности *P* *tsu* ∉ *P* для подходящего *s* ∈ *S*. Для любого *v* ∈ *S*

 (*a* + *b*)*vtsu* = (*avt*)*su* + *b*(*vts*)*u* = 0.

Далее, (*as*)*vt* = *a*(*sv*)t = 0, (*sa*)*vt* = *s*(*avt*) = *s*0 = 0, поэтому *a* + *b*, *sa,* *as* ∈ *Op*, и *Op* − идеал.

 **Лемма 2.** *Пусть P ⊆ M − первичные идеалы полукольца.*

*Тогда OM ⊆ Op ⊆ P.*

 **Доказательство:** Пусть *a* ∈ *OM*, тогда *aSt* = 0 для некоторого *t* ∉ *M*. Поскольку *t* ∉ *P*, то *a* ∈ *Op*, и значит, *OM* ⊆ *Op*. Для любого *s* ∈ *S* 0 = *ast* ∈ *P*. Поскольку *P* первичен, то *a* ∈ *P* или *t* ∈ *P*, отсюда *a* ∈ *P*, и следовательно, *Op* ⊆ *P*.

**Лемма 3.** *Для произвольных первичных идеалов P и P′ симметрического полукольца S верна импликация:*

*P ∩ P′ не содержит первичных идеалов ⇒ Op P′.*

**Доказательство:** Предположим, что *Op* ⊆ *P*′. Полагая *A* = *S \ P* и *B* = *S \ P*′, рассмотрим множество *AB* всевозможных конечных произведений элементов из *A* ∪ *B*. Покажем, что *AB* ∩ *Op* = ∅. В самом деле, если *s* ∈ *AB* ∩ *Op*, то *sb* = 0 для некоторого *b* ∈ *A*, т.е. {0} ∈ *AB*. Поскольку *s* является произведением элементов из *A* ∪ *B*, то в силу первичности идеалов *P* и *P*′ и свойства симметрических полуколец *uv* = 0 для подходящих *u* ∈ *B*, *v* ∈ *A*. Откуда *u* ∈ *Op*  *P*′ − противоречие.

Таким образом, *AB* является *m*−системой, и значит, существует первичный идеал *Q*, не пересекающийся с *AB* и содержащий *Op*. А так как *A* ∪ *B* ⊆ *AB*, то *P* ∩ *P*′ ⊇ *Q*. Получили противоречие с условием, значит наше предположение неверно, и *Op* *P*′.

 **Следствие 1.** *Для произвольных первичных идеалов P и P′ в симметрическом полукольце, если* *Op ⊆ P′ , то пересечение P и P′ содержит хотя бы один первичный идеал.*

Определим множество (*a, b*) = {*s* ∈ *S*: ∀*x*∈*S* (*axs* = *bxs*)} − идеал полукольца *S* для ∀*a*, *b* ∈ *S*.Очевидно, (*a*, 0) = *Ann* *aS*.

Для произвольного идеала *A* обозначим − пересечение первичных идеалов полукольца *S*, содержащие идеал *A*.

**Определение 11.** Полукольцо *S* называется *строго полупервичным*, если для любых элементов *a, b* ∈ *S* выполняется

 = (*a*, *b*).

**Определение 12.** Пересечение *rad S* всевозможных первичных идеалов в *S* называется *первичным радикалом* полукольца *S*.

**Определение 13.** Полукольцо называется *полупервичным*, если его первичный радикал равен нулю.

**Предложение 5*.*** *Полукольцо S полупервично тогда и только тогда, когда = Ann aS для всех a ∈ S.*

 **Доказательство:** При *a* = 1 *rad S* = = *Ann S* = 0, т.е. *S* − полупервично.

 Пусть *S* − полупервичное полукольцо и *b* ∈. Для каждого первичного идеала *P*, либо *P* содержит *Ann* *aS*, либо *Ann* *aS* не содержится в *P*. В первом случае *b* ∈ *P*, во втором случае *a* ∈ *Op* ⊆ *P*. Тогда *aSb* *rad S* = 0, откуда *b* ∈ *Ann aS*. Следовательно, ⊆ *Ann aS*. Другое включение справедливо всегда.

 **Следствие 2.** *Строго полупервичное полукольцо является полупервичным.*

 **Предложение 6*.*** *Всякое редуцированное полукольцо S строго полупервично.*

 **Доказательство:** Пусть *c* ∉(*a*, *b*) для *a*, *b* ∈ *S*. Тогда *ac* ≠ *bc* и из редуцированности *S* вытекает, что *acac* + *bcb*c ≠ *acbc* + *bcac*. Элементы *cac* и *cbc* отличны друг от друга, и значит, *ac*≠ *bc* в силу симметричности редуцированного полукольца. Аналогично *ac*≠ *bc*, и следовательно, *ac*≠ *bc*. По индукции *ac* ≠ *bc*. Значит, *T* = {1, *c*, *c*,…} − *m*−система, не пересекающаяся с (*a*, *b*), и поэтому найдётся первичный идеал *P*, содержащий (*a*, *b*), при этом *c* ∈ *S \ P*. Значит, *c* ∉, откуда ⊆ (*a*, *b*). Другое включение справедливо всегда.

Получили = (*a*, *b*) ⇒ по определению 12 *S* − строго полупервично, что и требовалось доказать.

Обозначим через *Spec S* множество всех первичных идеалов полукольца *S*. Для любого идеала *A* полукольца *S* положим

 *D*(*A*) = {*P* ∈ *Spec S*: *A* *P*}.

Множество *D*({0}) = {*P* ∈ *Spec S*: {0}*P*} = ∅, а *Spec S* = *D*(*S*).

*D*(*A*) ∩ *D*(*B*) = { *P* ∈ *Spec S*: *A* *P* ∧ *B* *P*} = { *P* ∈ *Spec S* : *AB* *P*} = *D*(*AB*).

 *Spec S* является топологическим пространством с семейством открытых множеств вида *D*(*A*).

 **Лемма 4.** *Для любого идеала A полупервичного полукольца S*

 *= {P ∈ Spec S: Ann A ⊆ P}.*

 **Доказательство:** Обозначим через *Y* правую часть доказываемого равенства. Если *P* ∈ *D*(*A*), т.е. *A* *P*, то *Ann A* ⊆ *P*, т.е. *P* ∈ *Y*. Откуда ⊆ *Y*, ибо *Y* замкнуто.

 Обратно, пусть *P* ∉. Тогда *P* лежит в некоторой окрестности *D*(*B*), где *B* − некоторый идеал в *S,* не пересекающийся с.

 *D*(*A*) ∩ *D*(*B*) = ∅, тогда *AB* ⊆ *rad S* = 0, т.е. *B* ⊆ *Ann A*.

Тогда *P* не содержит *Ann A* , иначе *P* содержал бы *B* . Следовательно, *P* ∉ *Y* . Получили *Y* ⊆ .

 **Лемма 5.** *Пусть P − первичный идеал редуцированного полукольца S. Тогда P = Op ⇔ P − минимальный первичный идеал.*

 **Доказательство:** Пусть *P* = *Op* , *P* ′∈ *Spec S* и *P* ′ ⊆ *P*. Тогда *Op* ⊆ *O*P′ ⊆ *P* ′. Поэтому *P* ′= *P*, и *P* минимален.

 Обратно, пусть дан минимальный первичный идеал *P* редуцированного полукольца *S*. Предположим, что существует *a* ∈*P \ Op*. Степени элемента a образуют *m*−систему (0 ∉{*a*}, 1∈{*a*} и для ∀*a*,*a*∈{ *a*} ∃*с* = 1∈*S* : *aсa*= *a*∈{ *a*}),не пересекающуюся с *Op.* Действительно, если *a*∈ *Op* , *n* ∈ *Ν*, то *ab* = 0 для некоторого *b* ∈*S \ P*. Но тогда (*ab*)= 0, так как редуцированное полукольцо симметрическое без нильпотентов, и значит ab = 0, то есть *a* ∈ *Op* ;противоречие. Из предложения 3 видно, что найдётся идеал *P* ′ *Op*, не содержащий a, который будет первичным. Из следствия 1 вытекает, что в *S* существует первичный идеал, лежащий в *P* ∩ *P* ′,что противоречит минимальности *P*. Значит, *P* ⊆ *Op*. Также *Op* ⊆ *P* (Лемма 2). Тогда *P* = *Op*.

 **Лемма 6.** *Любой первичный правый идеал симметрического полукольца псевдопрост.*

 **Доказательство:** В самом деле, если *a, b* ∈ *S \ P*, то *asb* ∉ *P* для подходящего *s* ∈ *S*, откуда *asb* ≠ 0 и *ab* ≠ 0.

 **Определение 14.** S – *слабо риккартово* ⇔ ∀*a* ∈ *S* ∀*b* ∈ *Ann aS*

 *Ann aS* + *Ann b* = *S*

 **Пример.** Обозначим через *N* – полукольцо всех неотрицательных целых чисел с обычными операциями сложения и умножения. Возьмём *a = 0∈ N.* Тогда *Ann aS* = *N*. В результате получим, что *Ann aS* + *Ann b* = *N*. Теперь возьмём *a ∈ N* \ {0}. Тогда *Ann aS* = {0}, а *Ann b* = *N*. В результате получим, что *Ann aS* + *Ann b* = {0} + *N* = *N* . Таким образом, *N* – слабо риккартово полукольцо. Аналогично, любое полукольцо без делителей нуля будет являться слабо риккартовым.

 ***3. Доказательство основной теоремы.***

 ***Теорема .*** *Для всякого редуцированного полукольца S равносильны следующие условия:*

1. *S слабо риккартово;*
2. *∀ a, b∈S (D(a)∩D(b)=∅⇒ =∅);*

1. *все идеалы Op, P∈Spec S, первичны(эквивалентно, вполне первичны, псевдопросты);*
2. *все идеалы OM, M∈ Max S, первичны (эквивалентно, вполне первичны, псевдопросты) и P ⊆ M ⇒ Op=OM для ∀ P∈ Spec S и M∈ Max S;*
3. *каждый первичный идеал полукольца S содержит единственный минимальный первичный идеал;*
4. *∀ a, b∈ S (ab = 0 ⇒ Ann a + Ann b = S);*

**Доказательство:** Пусть *S* − редуцированное полукольцо. Такое *S* − симметрическое (по предложению 1), поэтому *S* обладает всеми свойствами симметрических полуколец. Доказательство проведём по схеме 1)⇒3)⇒4)⇒5)⇒6)⇒1) и 2)⇔6).

 **1)⇒3).** Исходя из 1), покажем, что каждый идеал *Op* вполне первичен. Пусть *P* ∈ *Spec S* и *ab* ∈*Op* при *a, b* ∈ *S.*

Тогда ∃ *с*∈*S \ P*: *abSc* = 0,т.е. *absc* = 0 для ∀ s ∈ *S*.

Возьмём *s* = 1 ⇒ *abc* = 0 ⇒ *bc* ∈ *Ann aS* (по определению *Ann aS*). Но *Ann aS* ⊆ *Ann a* . Тогда *bc* ∈*Ann a*. По условию 1) *S* − слабо риккартово, т.е. *Ann aS* + *Ann bc* = *S* для *a* ∈*S*, *bc* ∈ *Ann aS*.

∃ *e* ∈*Ann aS*, *f* ∈*Ann bc*: *e* + *f* = 1 (1∈S).

Предположим, что *a* ∉*Op* ⇒ *Ann aS* ⊆ *P* (по определению *Ann aS*) ⇒ *e* ∈*P*.

Тогда *f* ∉*P*, т.к. в противном случае 1∈*P*. Но *P* − первичный идеал ⇒ *P* − собственный ⇒ 1∉*P*.

 *f* ∈*Ann bc* ⇒ *bcf* = 0. Т.к. *S* − симметрическое ⇒ *bScf* = 0. Но *cf* ∉*P* (т.к. *c* ∉*P*, *f* ∉*P* , а *P* − первичный идеал) ⇒ *b* ∈ *Op* .

Таким образом, получили, что все идеалы *Op* , *P* ∈ *Spec S*, вполне первичны.

 **3)⇒4).** По условию 3 все идеалы *Op* , где *P* ∈ *Spec S*, первичны. Но *M* ∈ *Max S* – является первичным идеалом (предложение 4), т.е. *M* ∈ *Spec S*. Но тогда по условию 3) данной теоремы следует, что все идеалы *OM* , где *M* ∈ *Spec S* и *M* ∈ *Max S*, первичны.

Пусть *P* ⊆ *M*. Тогда *OM* ⊆ *Op* (лемма 2).

Если *a* ∈ *Op* , т.е. *ab* = 0 при некотором *b* ∈*S \ P* и *s* = 1∈*S*, то *a* ∈*OM* , ибо *b* ∉*OM* ⊆ *P*, а *ab* = 0 ∈*OM* и *OM* псевдопрост (доказано выше). Значит и *Op* ⊆ *OM* . Тогда *Op* = *OM* .

 **4)⇒5).** Пусть *P* – первичный идеал из S и *P* ⊆ *M*. По условию 4) данной теоремы *OM* – первичный идеал и так как *P* ⊆ *M* ⇒ *Op* = *OM* . Также *Op* ⊆ *P* (Лемма 2). Докажем, что *OM* – минимальный первичный идеал в *S*, лежащий в *P*. Пусть в *P* лежит *Q* − минимальный первичный идеал полукольца *S*. Но *Q* ⊆ *M* ⇒ *OM* ⊆ *OQ* ⊆ *Q*. По условию 4) данной теоремы  *OM* = *OQ*. . Так как *Q* – минимальный первичный идеал ⇒ *OQ*  = *Q* (Лемма 5). По свойству транзитивности равенства получаем, что *Op* = OM =*Q*.

 Докажем теперь единственность такого первичного идеала. Пусть *P* ′ − произвольный минимальный первичный идеал в *S*, отличный от *Q* и лежащий в *M*. Тогда *O*P′ = *OM* (по условию 4)). Также *O*P′ = *P* ′ .

Тогда получили равенство *Q* = *OQ* = *OM* = *O*P′ = *P* ′ . Единственность доказана.

 Так как все первичные идеалы полукольца *S* содержатся в *M* ∈*Max S*, то мы получили, что каждый первичный идеал полукольца *S* содержит единственный минимальный первичный идеал.

 **5)⇒6).** Пусть *ab* = 0, но *Ann a* + *Ann b* ≠ *S* для некоторых *a, b* ∈*S*.

Тогда *Ann a* + *Ann b* ⊆ *M* для подходящего *M* ∈ *Max S*.

Рассмотрим единственный минимальный первичный идеал *P*, содержащийся в *M*. Тогда *OM* ⊆ *P* (Лемма 2). Предположим, что ∃*a* ∈ *P \ OM* . Степени элемента *a* образуют *m*−систему (0 ∉{*a*}, 1∈{*a*} и для ∀*a*,*a*∈{ *a*} ∃*с* = 1∈*S*: *aсa*= *a*∈{ *a*}),не пересекающуюся с *OM*. Действительно, если *a*∈ *OM*, *n* ∈ *Ν*, то a*b* = 0 для некоторого *b* ∈*S \ M*. Но тогда (*ab*)= 0, так как редуцированное полукольцо симметрическое и значит *ab* = 0, то есть *a* ∈*OM* ; противоречие. Из предложения 3 видно, что найдётся идеал *P* ′ *OM*, не содержащий *a*, который будет первичным.

Пусть *q, w* ∈ *S \ P* и *q, w* ∈ *S \ P* ′. Тогда ∃*s* ∈ *S*: *qsw* ∉ *P* ⇒ *qsw* ∉ *P* ∩ *P* ′ ⇒ *P* ∩ *P* ′ −первичный идеал, что противоречит минимальности *P*. Значит *P* ⊆ OM и *P* = O*M*. Первичный идеал *OM* псевдопрост, поэтому *a*∈*OM* или  *b* ∈*OM*. Откуда по определению нуль−компонент *Ann a* *M* ∨ *Ann bM* ⇒ *Ann a* + *Ann b* *M* ⇒ противоречие ⇒ *Ann a* + *Ann b* = *S*.

 **6)⇒1).** Возьмём ∀*a, b* ∈*S*: *ab* = 0 ⇒ *b* ∈ *Ann aS*.

 Из условия 6) данной теоремы вытекает равенство:

*Ann a* + *Ann b* = *S*. Так как в симметрическом полукольце *Ann aS* = *Ann a*, то *Ann aS* + *Ann b* = *S*. Таким образом, полукольцо *S*−слабо риккартово, что и требовалось доказать.

 **2)⇔6).** Пусть *a, b* ∈ *S* и *ab* = 0. *D*(*a*) ∩ *D*(*b*) = {*P*∈*Spec S*: *a*∉*P* ∧ *b*∉*P*} = { *P*∈*Spec S*: *ab* ∉ *P*} (в силу первичности) = *D*(*ab*) = *D*(0) = ∅.

Обратно, *D*(*a*) ∩ *D*(*b*) ={*P*∈*Spec S*: *a*∉*P* ∧ *b*∉*P*} ={*P*∈*Spec S*: *ab* ∉ *P*}=*D*(*ab*) =∅ ⇒ *ab* = 0, так как *D*(*x*) = ∅ ⇔ *x* = 0.

 Таким образом, *ab* = 0 ⇔ *D*(*a*) ∩ *D*(*b*) = ∅.

Так как *S* – симметрическое полукольцо на основании предложения 1, то к нему можно применить предложение 6, то есть *S* строго полупервично. По следствию 2 *S* является и полупервичным. Теперь мы можем применить лемму 4. На основании этой леммы

 = {*S*∈*Spec S*: *Ann a*⊆*P* ∧ *Ann b*⊆*P*} = ∅.

Тогда *Ann a* + *Ann b* *M* для ∀ *M* ∈ *Max S* ⊆ *Spec S* ⇒ *Ann a* + *Ann b* = *S*.

 В другую сторону, пусть *Ann a* + *Ann b* = *S* ⇒ *Ann aM* ∨ *Ann bM* для подходящего *M* ∈ *Max S* ⊆ *Spec S.*

 Тогда = {*S* ∈ *Spec S*: *Ann a* ⊆*P* ∧ *Ann b* ⊆*P*} = ∅. Таким образом, условия 2) и 6) равносильны.

**Теорема доказана полностью.**

 ***Cвойство:***

*Если редуцированное полукольцо S слабо риккартово, то для любого правого идеала A и элементов a, b полукольца S выполняется импликация:*

*ab = 0 и a + b ∈ A ⇒ a ∈ A.*

**Доказательство:** Пусть даны в *S* правый идеал *A* и такие элементы *a* и *b*, что *ab* = 0 и *a* + b∈*A*. Так как условие 6) доказанной теоремы равносильно тому, что *S* слабо риккартово, то мы можем доказать это свойство, исходя из него. Тогда *Ann a* + *Ann b* = *S*, то есть *c* + *k* = 1 при некоторых *c* ∈*Ann a* и *k* ∈*Ann b*.

 *c* ∈ *Ann a* ⇒ *ac* = 0 (по определению аннулятора).

 *k* ∈ *Ann b* ⇒ *bk* = 0.

 *a* = *a*⋅1 + 0 = *a*⋅(*c* + *k*) + *bk* = ac + *ak* + *bk* = *ac* + (*a* + *b*)⋅*k* = (*a* + *b*)⋅*k* ∈*A*.

 Получили *a* ∈*A*, что и нужно было доказать.

**Литература.**

1. Е.М. Вечтомов. «Функциональные представления колец». – М.: МПГУ им. Ленина, 1993. – 190 с.
2. В.В.Чермных. «Полукольца». Киров: Изд-во ВГПУ, 1997. − 131 с.