**Эмпирические методы познания**

К эмпирическим методам познания относятся наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Наиболее часто эти методы применяются в естественнонаучных дисциплинах (химии, биологии, астрономии, физике, географии и т. д.). Для математики эти методы не являются характерными. История развития математики свидетельствует о том, что эмпирические методы сыграли неоценимую роль в зарождении математических знаний, становлении математики как самостоятельной теоретической дисциплины. Школьное обучение математике в определенной мере повторяет ее исторический путь развития. Использование средств наглядности и технических средств обучения, как правило, предполагает применение различных эмпирических методов. Часто имеет место одновременное использование методов наблюдения, описания, измерения и эксперимента. Это помогает избежать пассивной созерцательности, активизировать действия учащихся, вовлечь их в целенаправленную работу по использованию демонстрационных наглядных пособий, приборов, моделей и т. п.

Математика не является экспериментальной наукой, и, следовательно, опытное подтверждение не может служить достаточным основанием истинности ее предложений. Это несомненно верно, если под математикой понимать совокупность готовых, уже построенных дедуктивных теорий, но это неверно, если под математикой понимать мыслительную деятельность, результатом которой являются подобные теории. В последнем случае дедуктивная теория лишь одна фаза математики. Но она имеет еще две фазы - предшествующую дедуктивной теории фазу накопления фактов (опытную, интуитивную) и следующую за ней фазу приложений. Эти две фазы независимо от того, считают ли их собственно математическими или "околоматематическими", не менее важны в обучении, чем сама дедуктивная теория: первая - для понимания этой теории, вторая - для ее оправдания.

Исходя из задач, стоящих перед школой, речь идет об обучении не только готовым знаниямно и методам познания приводящим к этим знаниям. Поэтому естественно применять в обучении и те эмпирические методы познания, с помощью которых формулируются гипотезы, подлежащие обоснованию (или опровержению) уже иными методами.

Наблюдение, опыт и измерения должны быть направлены на создание в процессе обучения специальных ситуаций и предоставление учащимся возможности извлечь из них очевидные закономерности, геометрические факты, идеи доказательства и т, д. Чаще всего результаты наблюдения, опыта и измерений служат посылками индуктивных выводов, с помощью которых осуществляются открытия новых истин. Поэтому наблюдение, опыт и измерения относят и к эвристическим методам обучения, т. е. к методам, способствующим открытиям.

Проиллюстрируем такое применение наблюдения, опыта и измерений несколькими примерами.

Если показать учащимся IV-V классов различные фигуры, в том числе окружающие нас предметы, среди которых одни обладают, а другие не обладают осевой симметрией, то наблюдение этих фигур позволяет заметить, что каждая из "симметричных" фигур делится некоторой прямой на две части так, что, если согнуть фигуру по этой прямой, одна ее часть полностью належится на другую. Для каждой же из "несимметричных" фигур такой прямой нельзя найти.

После такого наблюдения "симметричных" фигур вокруг нас (архитектурных украшений, строительных и других деталей, некоторых листьев на деревьях и т. д.) можно перейти к дальнейшему изучению осевой симметрии с помощью специального опыта (эксперимента).

Каждому ученику предлагается согнуть лист бумаги так, чтобы одна часть листа упала на другую и образовалась линия сгиба. Затем предлагается выпрямить снова лист и отметить на нем произвольную точку А, не лежащую на линии сгиба, затем снова согнуть лист по той же линии сгиба и определить, глядя на свет через согнутый лист, с какой точкой совпала при этом точка А. Пусть это точка А1 Учащимся сообщают, что точки А и А1 называются симметричными относительно прямой l (линии сгиба), называемой осью симметрии этих точек. Для другой точки В, лежащей по другую сторону от линии сгиба, чем точка А, предлагается определить (опытным путем, с помощью сгибания листа) симметричную ей точку относительно той же оси l. Замечаем, что, если взять точку С на линии сгиба, она остается неподвижной при сгибании листа, т. е. не совпадает с какойлибо другой точкой листа. Мы говорим, что любая точка оси симметрии (линии сгиба) симметрична самой себе.

Естественно возникает вопрос: чем. же характеризуется расположение относительно оси пары симметричных точек (А, А1, В, В1, как это можно описать с помощью уже известных геометрических терминов? Учащиеся замечают (возможно, с помощью учителя), что симметричные точки (если они различны) всегда лежат по разные стороны от оси симметрии. Предлагается соединить симметричные точки отрезком прямой. Учащиеся высказывают гипотезу, что симметричные точки отстоят на равных расстояниях от оси симметрии, т. е. что отрезки АА1 и ВВ1 делятся осью симметрии пополам. Это предположение подкрепляется с помощью измерения соответствующих отрезков. Если учащиеся не замечают перпендикулярности отрезка АА1 и ВВ1 к оси симметрии (обычно равенство углов не так быстро обнаруживается, как равенство отрезков), то берут две точки, равностоящие от оси по разные стороны от нее, но не на одном перпендикуляре к ней, и задают вопрос: будут ли эти точки симметричны относительно той же оси? Сопоставляя расположение этих точек с расположением симметричных точек, учащиеся обнаруживают, что последние лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии. Это пока предположение, которое также подкрепляется измерением соответствующих углов.

Если соединить отрезками точки А и В и симметричные им точки А1 и В1, то при сгибании листа бумаги по линии l отрезок АВ наложится на отрезок А1В1 т. е. обнаруживается, что расстояние между двумя точками А и В равно расстоянию между симметричными им точками А1 и В1.

Опытным же путем обнаруживается также, что каждая из полуплоскостей с границей l "накладывается" (преобразуется, отображается) на другую.

Таким образом, с помощью наблюдения, опыта и измерений формируется представление об осевой симметрии как о преобразовании плоскости, при котором каждой точке сопоставляется симметричная ей относительно оси l точка и мы получаем возможность описать осевую симметрию на уже известном учащимся геометрическом языке с помощью следующей совокупности предложений.

(П1) Каждая точка оси симметрии симметрична сама себе. Любые две различные симметричные точки лежат:

(П2) по разные стороны от оси симметрии,

(П3) на одном перпендикуляре к оси и

(П4) на одинаковом расстоянии от оси.

(П5) Расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между симметричными им точками.

(П6) Каждая из полуплоскостей с границей преобразуется в другую. Полученное описание нашего опыта не является, однако, совершенным. Во-первых, все предложения П1 - П6 "обоснованы" лишь опытным путем. Во-вторых, еще не раскрыты логические связи между ними, не выяснено, какие из этих предложений могут служить посылками для вывода из них остальных предложений этой совокупности (с помощью, возможно, и некоторых других, уже известных геометрических истин).

Однако устранение этих дефектов нашего описания требует уже применения других методов, о которых речь пойдет дальше.

Приведем пример, когда опыт способствует открытию геометрического свойства и подсказывает путь его доказательства.

Экспериментально обнаружить, что сумма углов данного треугольника равна 180°, можно сразу же, как только учащиеся научатся измерять углы с помощью транспортира.

Учащимся предлагается измерить транспортиром углы начерченного в тетради треугольника и сложить результаты измерения. У некоторых сумма углов треугольника получается меньше 180°, у других - больше, но у всех результаты близки к 180°, а у некоторых даже "точно" 180° (!). Ученики догадываются, что должно получиться 180°, а другие результаты объясняются погрешностями измерения. Они "совершают открытие": "Во всяком треугольнике сумма внутренних углов равна 180°".

Это предположение подкрепляется вторым опытом, подсказывающим идею доказательства (одного из возможных доказательств). У каждого школьника заготовлен вырезанный из бумаги треугольник. Учитель предлагает "оторвать" два угла и приложить их к третьему так, как он это делает сам на большом треугольнике. Учащиеся замечают, что получены три угла с общей вершиной А, расположенные по одну сторону от прямой. Следовательно, сумма этих углов равна 180°. С помощью этого опыта (уже без измерений) мы пришли к той же гипотезе, и всем кажется, что обнаруженное свойство достоверно. Но можно ли быть уверенным в том, что два луча, сходящиеся в точке А, образуют прямую линию? Ведь они могут образовать ломаную, так мало отличающуюся от прямой, что мы этого не заметим. Но в этом случае сумма углов уже не будет равна 180°.

Таким образом, проведенный опыт не заменяет доказательство. Он лишь подсказывает один из возможных путей доказательства открытого опытным путем свойства.

С помощью простого опыта формируется и наглядное представление о перемещении как об отображении плоскости на себя, сохраняющем расстояние между точками. На лист бумаги кладут тонкую прозрачную "o пластинку со многими отверстиями. С помощью карандаша отмечается на листе положение одного отверстия (одной точки). Пусть это точка А плоскости. Затем перемещают произвольно пластинку на листе и через это же отверстие отмечается новая точка А При этом отмечается, что так можно поступить с любой точкой плоскости. Затем отмечают острием карандаша через два отверстия пластинки точки В и С плоскости и после некоторого перемещения пластинки через те же отверстия отмечают новые точки -В1 и С1 соответственно. Так как при перемещении пластинка не растягивается и не сжимается, то расстояния между точками сохраняются, т. е.

|ВС| == | В1 С1 |

Таким образом, всякая точка Х неподвижного листа отображается точно в одну точку Х1 этого же листа. Так получается отображение плоскости на себя, при котором расстояние между любыми двумя точками равно расстоянию между их образами.

С помощью описанного опыта обнаруживаются и важнейшие свойства движения:

а) если три точки А, М, В лежат на одной прямой, то и их образы А1, М1, В1 тоже лежат на одной прямой;

б) если точка М лежит между точками А и В, то и М лежит между А1 и В1

Открытые опытным путем, эти свойства, разумеется, подлежат доказательству. Здесь опять опыт проявляется как эвристический метод.

Рассмотрим пример применения опыта для открытия алгебраической закономерности.

Допустим, что в одном, синем, мешочке имеется т синих палочек, а в другом, красном, мешочке - п красных палочек. Нужно освободить один мешочек. Мы можем это сделать двумя способами. Можно пересыпать все красные палочки из красного мешочка в синий, и тогда в нем окажется т + п палочек. Но можно пересыпать все синие палочки в красный мешочек, и тогда в нем окажется п + т палочек. Но и в одном, и в другом случае мы имеем в мешочке одно и то же множество палочек. Следовательно,

т + п =-- п + т.

Разумеется, в конкретном опыте т и п обозначают определенные числа. Поэтому полученное равенство является лишь одной из посылок, с помощью которых уже другим методом (индукцией) получают общий закон коммутативности сложения натуральных чисел:

" т +п = п+т ; для любых натуральных чисел т и п".

Подсчет двумя способами (по рядам и по столбцам) единичные квадратиков, заполняющих прямоугольник, измерения которого выражаются натуральными числами, является опытом, с помощью которого обнаруживается коммутативность умножения натуральных чисел.

Важно отметить, что с помощью эмпирических методов (наблюдения, опыта, измерений) выполняется лишь начальный этап работы по математическому описанию реальных ситуаций. Получаемый математический материал (интуитивные понятия, гипотезы, совокупности математических предложений) подлежит дальнейшей обработке уже другими методами.