**Волновое уравнение не имеет единственного решения**

Виктор Кулигин, Галина Кулигина, Мария Корнева, Исследовательская группа «Анализ»

**Теорема о нарушении единственности решения**

Теорему о существовании и единственности решения задачи Коши можно найти в [1] (стр.44...46). Логика доказательства приводит к однородному волновому уравнению (77) (см. стр.45 в [1]), решение которого должно удовлетворять нулевым начальным и граничным условиям (стр.45 в [1]). Далее идет доказательство, что решение этого уравнения тривиальное и на основании этого делается заключение о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.

Оказывается, существует множество решений задачи Коши для волнового уравнения. Мы приведем доказательство для свободного пространства (одномерный случай). Это продиктовано следующими соображениями. Во-первых, доказательство не будет перегружено дополнительными деталями. Во вторых, доказательство этого случая не нарушает общности рассуждений и его нетрудно обобщить на случай наличия граничных условий. В третьих, нас интересуют процессы в свободном пространстве (излучение и распространение волн в электродинамике), к которым это доказательство имеет прямое отношение.

**Доказательство**

Рассмотрим однородное волновое уравнение в безграничном одномерном пространстве с нулевыми начальными условиями.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Начальные условия: v = 0 и ∂v/∂t = 0 при t = 0.

Представим теперь функцию v как сумму некоторых двух функций:

|  |  |
| --- | --- |
| v = u + f | (2) |

Подставим это выражение в (1) и перенесем члены, зависящие от f в правую часть уравнения (1).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Мы можем выбрать и присвоить функции f определенное выражение. Пусть, например,

f = (cosπx·sinat)4, когда –1 < x < 1 и 0 < t < π/a;

f = 0 если x < –1 или x > 1 и t > π/a или t < 0.

Функция ограничена f в пространстве и во времени. В этом случае уравнение (3) превращается в неоднородное волновое уравнение, правая часть которого нам известна. Теперь мы можем сформулировать начальные условия для функции u.

Начальные условия:

|  |  |
| --- | --- |
| u = – f(x;0) и ∂u/∂t = – ∂f / ∂t при t = 0 | (4) |

Решение уравнения (3) с начальными условиями (4) существует (см., например, [1], стр.75, выражение (24)). Следовательно, мы имеем окончательный результат – новое, нетривиальное решение однородного волнового уравнения с нулевыми начальными условиями. Запишем общее ненулевое решение однородного волнового уравнения, удовлетворяющего задаче Коши с нулевыми начальными условиями:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5) |

где.

Функция f не должна быть решением волнового уравнения.

Мы видим, что второе решение существует и отлично от нуля при t>0. Таким образом, теорема о нарушении единственности решения задачи Коши для волнового уравнения доказана.

**Применение результатов**

Полученное доказательство служит обоснованию метода получения новых решений, описанного в [2], [3] и др. статьях авторов. Оно имеет прямую связь с калибровкой решений в электродинамике [2], [3].

Пусть мы имеем неоднородное волновое уравнение

с соответствующими начальными условиями: v=φ(x) и ∂v/∂t=ψ(x) при t=0.

Представим решение этого уравнения в форме (2): v=u+f.

Оставим в левой части волнового уравнения только члены, зависящие от u. Как и в предыдущем случае мы могли бы задать явный вид функции f (как говорят: «взяв ее с потолка») и получить решение неоднородного уравнения. Но можно поступить иначе. Мы можем наложить на f некоторое условие. Например, мы можем потребовать, чтобы функция f удовлетворяла уравнению Пуассона:

∂2f / ∂x2=F(x;t).

Если решение этого уравнения существует (функция F(x:t) интегрируема), то уравнение для функции u определено и определены начальные условия задачи Коши: u=φ(x) –f(x;0) и ∂u/∂t=ψ(x)–∂f/∂t при t=0.

Такой метод построения второго решения по существу является калибровкой решения. Иными словами, мы ищем решение как сумму выражений, имеющих различную функциональную зависимость от координат и времени (запаздывающие потенциалы, мгновеннодействующие потенциалы, потенциалы, удовлетворяющие уравнению теплопроводности и т.д.) Этот метод описан и используется в работах [2], [3].

Следствия, вытекающие из отсутствия единственности решения для электродинамики весьма существенны. Калибровочная (градиентная) инвариантность не имеет места. В общем случае калибровка Лоренца уравнений Максвелла дает решения, отличающиеся от решений в кулоновской калибровке [2], [3]. Однако существует важный частный случай, когда эти калибровки эквивалентны. Он рассмотрен в [4].

Остается добавить, что для уравнений параболического типа (уравнение теплопроводности, уравнение Шредингера и др.) можно доказать аналогичную теорему. Более того, возможно, что нарушение единственности решения имеет место также для уравнений эллиптического типа (например, для задач Дирихле, Неймана и др.).

**Список литературы**

Тихонов А.А. и Самарский Н.Н. Уравнения математической физики. – М.: ГИФМЛ, 1954.

Кулигин В.А., Кулигина Г.А., Корнева М.В. Калибровки и поля в электродинамике. / Воронеж. Ун-т. – Воронеж, 1998. Деп. в ВИНИТИ 17.02.98, № 467 – В98.

Kuligin V.A., Kuligina G.A., Korneva M.V. Analysis of the Lorentz's gauge. Canada, Montreal, 2000. – Apeiron, vol. 7, no 1...2.

Кулигин В.А., Кулигина Г.А. Корнева М.В. Однопроводные линии. / Воронеж. Ун-т. – Воронеж, 2002. Деп. в ВИНИТИ 10.06.2002, №1062 – В2002.