МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ ГОУ ВПО

ВСЕРОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА**

**по дисциплине**

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ**

**Вариант №2**

Брянск - 2009

**ЗАДАЧА 1**

**Решить графическим методом типовую задачу оптимизации**

Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества А и не менее 12 единиц питательного вещества В. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Корма  Питат. вещества | Количество питательных веществ в 1 кг корма | |
| 1 | 2 |
| А  В | 2  2 | 1  4 |
| Цена 1 кг корма, т.руб. | 0,2 | 0,3 |

**Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум и почему?**

**Решение.** Данная задача оптимизации является задачей линейного программирования. Обозначим виды кормов через *х*1 и *х*2. Целевой функцией задачи является общая стоимость кормов, затраченных на кормление животных, которая должна быть наименьшей. Число ограничений задачи равно числу питательных веществ, входящих в состав кормов - 2. Дополнительно вводится условие неотрицательности переменных. Зная цены кормов, содержание питательных веществ в них можно сформулировать математическую модель задачи линейного программирования:



Строим *область допустимых решений* задачи (см. ***рис.1***).

**Область допустимых решений задачи**

Строим вектор-градиент целевой функции задачи. За его начало принимаем точку с координатами, равными коэффициентам целевой функции по соответствующим координатным осям 0,2 (1; 1,5), тогда концом вектора-градиента будет являться точка с координатами (0; 0). Перпендикулярно вектору-градиенту строится прямая, которая характеризует поведение целевой функции:



Для определения положения точки минимума целевой функции прямая, перпендикулярная вектору-градиенту, смещается в его направлении до тех пор, пока она не покинет область допустимых решений. Предельная точка области допустимых решений при этом движении и является точкой минимума.

В нашей задаче - это точка *В*, образованная пересечением граничных прямых ограничений *I* и *II*. Ее координаты определяются решением системы

уравнений этих прямых:



откуда *x*1\*=2; *x*2\*=2 и .



Таким образом, чтобы достичь минимальных затрат, следует расходовать ежедневно на одного животного по 2 кг каждого вида корма при затратах в 1 тыс. руб.

Решение данной задачи линейного программирования на максимум лишено экономического смысла, так как затраты на корм стремятся уменьшить. Однако математически эта задача имеет решение и на максимум: наибольшее значение в области допустимых решений целевая функция принимает в точке (0; 6), и это значение равно

.



рис. 1 - Графическое решение задачи линейного программирования

ЗАДАЧА 2

**Использовать аппарат теории двойственности для экономико-математического анализа оптимального плана задачи линейного программирования**

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип сырья | Нормы расхода сырья на одно изделие | | | | Запасы  сырья |
| А | Б | В | Г |
| I  II  III | 1  0  4 | 0  1  2 | 2  3  0 | 1  2  4 | 180  210  800 |
| Цена изделия | 9 | 6 | 4 | 7 |  |

*Требуется:*

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.
3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:
   * проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
   * определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья II и III вида на 120 и 160 единиц соответственно и уменьшении на 60 единиц запасов сырья I вида;
   * оценить целесообразность включения в план изделия "Д" ценой 12 ед., на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

**Решение.**1. Данная задача оптимизации является задачей линейного программирования.

Обозначим количество выпускаемых изделий *х1, х2, х3, х4*.

Целевой функцией задачи является общая стоимость выпускаемой продукции, которая должна быть наибольшей. Число ограничений задачи равно числу ресурсов, используемых для изготовления изделий - 3.

Дополнительно вводится условие неотрицательности переменных.

Зная цены изделий, нормы их расхода и запасы ресурсов, формулируем математическую модель исходной задачи линейного программирования:



Задачу оптимизации решаем с помощью надстройки «*Поиск решения*» табличного процессора EXCEL (меню «*Сервис*»):

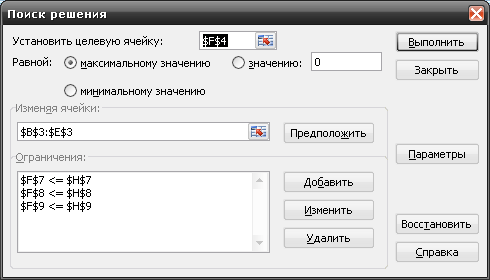


рис. 2 - Надстройка «Поиск решения»

Использование надстройки позволило получить значения переменных оптимального плана выпуска изделий: *Х*\*=(95; 210; 0; 0). Целевая функция имеет наибольшее для данных условий задачи значение *f*(*X*\*)=2115 (***прил. 1***).

Таким образом, для получения наибольшей выручки от реализации продукции следует производить *x*1\*=95 изделий *А*, *x*2\*=210 изделий *Б* и не производить изделия *В* (*x*3\*=0) и *Г* (*х4*\*=0).

2. Обозначим двойственные оценки ресурсов *I, II, III* как *y*1, *y*2, *y*3 соответственно. Целевой функцией двойственной задачи является общая стоимость запасов ресурсов в двойственных оценках, которая должна быть наименьшей. Число ограничений двойственной задачи равно числу переменных исходной задачи - 4. Математическая модель двойственной задачи имеет вид:



При решении исходной задачи с помощью EXCEL одновременно определяется и оптимальное решение двойственной задачи. В «*Отчете по устойчивости*» (***прил. 2***) приводятся теневые цены ресурсов: *y*1\*=0; *y*2\*=1,5; *y*3\*=2,25.

Наименьшее значение целевой функции двойственной задачи



совпадает с наибольшим значением целевой функции исходной задачи *f*(*X*\*). Следовательно, оптимальный план двойственной задачи определен верно.

3. Выпуск изделий *В* и *Г* невыгоден для данных условий задачи. Это объясняется тем, что затраты по ним превышают цену на 0,5 и 5 соответственно:



Таким образом, выпуск изделий *В* и *Г* убыточен и поэтому эти изделия не вошли в оптимальный план (*x*3\*=0) и (*х4*\*=0).

4. Проанализируем использование ресурсов в оптимальном плане. Для этого подставим в ограничения исходной задачи значения переменных оптимального плана *Х*\*=(95; 210; 0; 0) и проверим выполнение неравенств:



Видно, что ресурсы *II* и *III* используются в оптимальном плане полностью и являются дефицитными, т.е. сдерживающими рост целевой функции. Они имеют отличные от нуля оценки *y2\**=1,5 и *y3\**=2,25.

Увеличение объема ресурса *II* на одну единицу при неизменных объемах других ресурсов ведет к росту наибольшей выручки на 1,5 руб., а увеличение объема ресурса *III* на единицу - на 2,25 руб.

Ресурс *I* имеет нулевую двойственную оценку (*y1*\*=0) и является недефицитными, т. е. избыточным в оптимальном плане. Увеличение объемов этого ресурса не повлияет на оптимальный план выпуска продукции и не увеличит ее общую стоимость.

Определим, насколько изменится выручка выпускаемой продукции при заданных изменениях запасов сырья. Из «*Отчета по устойчивости*» видно, что эти изменения происходят в пределах устойчивости (см. «*Допустимое увеличение*»и«*Допустимое уменьшение*» правых частей ограничений в ***прил. 2***), что дает возможность сразу рассчитать изменение наибольшей выручки от реализации выпускаемой продукции, не решая новую задачу линейного программирования:



При этом «новая» наибольшая выручка составит:

руб.



Изменение запасов ресурсов привело не только к изменению значения целевой функции на 540 тыс. руб., но и к изменению плана выпуска. При этом структура плана не изменилась: изделия, которые были убыточны, не вошли и в новый план выпуска, т.к. цены на сырье не изменялись. Новый план выпуска составляет 75 единиц изделий *А* и 330 ед. изделий *Б*.

Для определения целесообразности включения в план выпуска еще и изделия *Д* с заданными характеристиками, рассчитаем стоимость ресурсов на изготовление единицы этого изделия в теневых ценах и сравним это значение с ценой реализации:



Следовательно, продукцию *Д* выпускать выгодно, так как затраты на нее меньше, чем ее стоимость.

**ЗАДАЧА 3**

**Исследовать динамику экономического показателя на основе анализа одномерного временного ряда**

В течение девяти последовательных недель фиксировался спрос *Y(t)* (млн. р.) на кредитные ресурсы финансовой компании. Временной ряд *Y(t)* этого показателя приведен ниже в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| *t* | *yt* |
| 1 | 43 |
| 2 | 47 |
| 3 | 50 |
| 4 | 48 |
| 5 | 54 |
| 6 | 57 |
| 7 | 61 |
| 8 | 59 |
| 9 | 65 |

*Требуется:*

1) Проверить наличие аномальных наблюдений.

2) Построить линейную модель *,* параметры которой оценить МНК ( - расчетные, смоделированные значения временного ряда).



3) Построить адаптивную модель Брауна с параметром сглаживания α= 0,4 и α= 0,7; выбрать лучшее значение параметра сглаживания α.



4) Оценить адекватность построенных моделей, используя свойства независимости остаточной компоненты, случайности и соответствия нормальному закону распределения (при использовании R/S-критерия взять табулированные границы 2,7-3,7).

5) Оценить точность моделей на основе использования средней относительной ошибки аппроксимации.

6) По двум построенным моделям осуществить прогноз спроса на следующие две недели (доверительный интервал прогноза рассчитать при доверительной вероятности р = 70%).

7) Фактические значения показателя, результаты моделирования и прогнозирования представить графически.

Вычисления провести с одним знаком в дробной части. Основные промежуточные результаты вычислений представить в таблицах (при использовании компьютера представить соответствующие листинги с комментариями).

**Решение.** 1. Для выявления аномальных наблюдений используем метод Ирвина. Для каждого уровня временного ряда рассчитывается статистика

,



где - стандартное отклонение уровней ряда.



Стандартное отклонение определяется с помощью встроенной функции EXCEL «СТАНДОТКЛОН»: *Sy*=7,29 млн. руб. Расчет значений *t* для всех уровней ряда, начиная со второго. Табличное значение критерия Ирвина для уровня значимости α=0,05 и длины временного ряда *n*=9 составляет λ=1,5. Видно, что ни одно из значений λ*t* не превышает критического значения, что свидетельствует об отсутствии аномальных наблюдений.

2. Линейную трендовую модель строим с помощью надстройки EXCEL «*Анализ данных… Регрессия*»:



Уравнение линейного тренда имеет вид (см. «*Коэффициенты*»):

.



Угловой коэффициент показывает, что спрос на кредитные ресурсы финансовой компании за одну неделю возрастает в среднем на 2,58 млн. руб.

Коэффициент детерминации уравнения *R*2≈0,941 превышает критическое значение для α=0,05 и *n*=9, что свидетельствует о статистической значимости линейной модели и наличии устойчивого линейного тренда во временном ряду. Само значение *R*2 показывает, что изменение спроса во времени на 94,1 % описывается линейной моделью.



3. Построение адаптивной модели Брауна**.** Модель Брауна строится в несколько этапов.

1) По первым пяти точкам временного ряда методом наименьших квадратов оцениваем параметры *а*0 и *а*1 линейной модели

.



Получаем начальные значения параметров модели Брауна и , которые соответствуют моменту времени *t*=0 (определены с помощью функций EXCEL «*ОТРЕЗОК*» и «*НАКЛОН*» соответственно.



2) Находим прогноз на первый шаг (*t*=1):

.



3) Определяем величину отклонения расчетного значения от фактического:

.



4) Скорректируем параметры модели для параметра сглаживания =0,4 по формулам:



;



,



где - коэффициент дисконтирования данных, отражающий степень доверия к более поздним наблюдениям; - параметр сглаживания (=); - отклонение (остаточная компонента).



По условию =0,4, следовательно значение β равно:



.



Получим:

;



,



5) По модели со скорректированными параметрами *a*0(*t*) и *a*1(*t*) находим прогноз на следующий момент времени:

.



Для *t*=2:

.



6) Возвращаемся к пункту 3 и повторяем вычисления до конца временного ряда.

7) Вычислим среднюю относительную ошибку для данного параметра сглаживания:



8) Корректировка параметров модели для =0,7 и =0,3:



;



9) Средняя относительная ошибка для данного параметра:



Таким образом, судя по средней относительной ошибке при =0,4 и =0,7, в первом случае =4,1%, а во втором случае =5,0%. Следовательно, =0,4 – лучшее значение параметра сглаживания, т.к. средняя относительная ошибка меньше.



4. Оценим адекватность линейной модели. Рассчитанные по модели значения спроса , остатки и их график были получены вEXCEL одновременно с построением модели (см. «*ВЫВОД ОСТАТКА*» в ***прил. 4***).



Случайность остаточной компоненты проверим по критерию поворотных точек. В нашем случае общее число поворотных точек в ряду остатков составляет *p*=4.

Критическое число поворотных точек для α=0,05 и *n*=9 определяется по формуле



Так как , остатки признаются случайными.



Проверим независимость остатков с помощью критерияДарбина–Уотсона (отсутствие автокорреляции).Для расчета *d*‑статистики используется выражение, составленное из встроенных функций EXCEL:

*d*‑статистика имеет значение (см. ***прил. 4***):

;



;



Критические значения *d*‑статистики для α=0,05 и *n*=9 составляют: *d*1=0,82; *d*2=1,32. Так как выполняется условие

,



то нет достаточных оснований сделать тот или иной вывод о выполнении свойства независимости. Проверим независимость остатков по коэффициенту автокорреляции первого порядка, который равен (см. ***прил. 4***):

.



Для расчета коэффициента автокорреляции использовалось выражение, составленное из встроенных функций EXCEL:

Критическое значение коэффициента автокорреляции для α=0,05 и *n*=9 составляет 0,666. Так как коэффициент автокорреляции не превышает по абсолютной величине критическое значение, то это указывает на отсутствие автокорреляции в ряде динамики. Следовательно, модель по этому критерию адекватна.

Проверим равенство нулю математического ожидания уровней ряда остатков. Среднее значение остатков равно нулю: (определено с помощью встроенной функции «*СРЗНАЧ*»; см. ***прил. 4***). Поэтому гипотеза о равенстве математического ожидания значений остаточного ряда нулю выполняется.



Нормальный закон распределения остатков проверяем с помощью *R*/*S*-критерия, определяемого по формуле

,



где *e*max; *e*min - наибольший и наименьший остатки соответственно (определялись с помощью встроенных функций «*МАКС*» и «*МИН*»); - стандартное отклонение ряда остатков (определено с помощью встроенной функции «*СТАНДОТКЛОН*»; см. ***прил. 4***).



Критические границы *R/S*-критерия для α=0,05 и *n*=9 имеют значения: (*R*/*S*)1=2,7 и (*R*/*S*)2=3,7. Так как *R*/*S*-критерий попадает в интервал между критическими границами, то ряд остатков признается соответствующим нормальному закону распределения вероятностей. Модель по этому критерию адекватна.

Таким образом, выполняются все пункты проверки адекватности модели: модель признается адекватной исследуемому процессу.

Оценим адекватность построенной модели Брауна: с параметром сглаживания (*см.* ***таблица 2***):



Таблица 2 - Анализ ряда остатков модели Брауна

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Проверяемое свойство* | *Используемые статистики* | | *Граница* | | *Вывод* |
| *наименование* | *значение* | *нижняя* | *верхняя* |
| Независимость | *d*–критерий Дарбина-Уотсона  *r(1)*-коэффициент автокорреляции | *d*=2,79  -0,44 | 0,82 | 1,32  0,666 | Нельзя сделать вывод по этому критерию  *r(1)*<0,666  адекватна |
| Случайность | Критерий пиков (поворотных точек) | 6>2 | 2 | | адекватна |
| Нормальность | RS-критерий | R/S= | 2,7 | 3,7 | неадекватна |
| Мат.ожидание≈0 | t-статистика Стьюдента |  |  | 2,306 | адекватна |
| Вывод: модель статистически неадекватна | | | | | |

5. Оценим точность линейной модели на основе использования средней относительной ошибки аппроксимации.

Среднюю относительную ошибку аппроксимации находим по формуле:

%



Значение *E*отн показывает, что предсказанные моделью значения спроса на кредитные ресурсы отличаются от фактических значений в среднем на 2,57 %. Модель имеет хорошую точность.

Оценим точность модели Брауна с параметром сглаживания :



Модель Брауна также имеет хорошую точность, однако она несколько ниже, чем у линейной трендовой модели.

6. Строим точечный и интервальный прогнозы спроса на 1 и 2 недели вперед для линейной модели:

**Прогноз на 1 неделю вперед** (период упреждения *k*=1):

*1) Точечный прогноз :*



млн. руб.



Среднее прогнозируемое значение спроса равно 64,5 млн. руб.

*2) Интервальный прогноз*



с надежностью (доверительной вероятностью) γ=0,7. необходимые расчеты приведены в ***таблице 3***:

млн. руб.,



где *t*таб=1,083 - табличное значение *t*-критерия Стьюдента для доверительной вероятности γ=0,7.

С вероятностью 70 % фактическое значение спроса на кредитные ресурсы будет находиться в интервале от 62,13 до 66,87 млн. руб.

Таблица 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  | *t* | *yt* |  |  |
|  | 1 | 43 | 16 |  |
|  | 2 | 47 | 9 |  |
|  | 3 | 50 | 4 |  |
|  | 4 | 48 | 1 |  |
|  | 5 | 54 | 0 |  |
|  | 6 | 57 | 1 |  |
|  | 7 | 61 | 4 |  |
|  | 8 | 59 | 9 |  |
|  | 9 | 65 | 16 |  |
| **Среднее** | **5** | **-** | **60** |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Прогноз на 2 недели вперед** (период упреждения *k*=2):

*1) Точечный прогноз:*

млн. руб.



Среднее прогнозируемое значение спроса равно 66,8 млн. руб.

*2) Интервальный прогноз* с надежностью γ=0,7*:*

млн. руб.,



С вероятностью 70 % фактическое значение спроса на кредитные ресурсы будет находиться в интервале от 64,29 до 69,31 млн. руб.

Построим прогноз для модели Брауна на следующие 2 недели. Параметры модели, полученные для последнего уровня временного ряда (т. е. для *t*=*n*=9), используются для построения прогноза спроса по формуле:

.



Прогноз на 1 неделю вперед (период упреждения *k*=1):

млн. руб.



С вероятностью 70 % значение спроса на кредитные ресурсы будет находиться в интервале от 63,213 до 70,361 млн. руб.

Прогноз на 2 недели вперед (период упреждения *k*=2):

млн. руб.



Значение спроса на кредитные ресурсы будет находиться в интервале от 65,603 до 73,167 млн. руб.

7. График временного ряда спроса строим с помощью надстройки «*Диаграмма*» EXCEL. Предварительно выделяется блок ячеек «*t*» и «*yt*» вместе с заголовками, а затем выбирается пункт меню «*Вставка»* «*Диаграмма…*»:

Далее строим линию линейного тренда (меню «*Диаграмма»* → «*Добавить линию тренда…*» → «*Линейная*»), и устанавливаем «*Прогноз*» вперед на 2 единицы и назад на 1 единицу, а также вывод на диаграмме уравнения тренда и коэффициента детерминации *R*2.