Университет Современных Знаний

Контрольная работа

по дисциплине «Моделирование экономических процессов»

студентки гр. РП3 – 9-05 Б1Ф (4,6 з)

специальности финансы

Руденко Ирины Владимировны

Луганск - 2009

Содержание

Введение

1. Балансовый метод планирования

2. Модели Леонтьева

2.1 Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

2.2 Продуктивные модели Леонтьева

3. Вектор полных затрат

4. Модель равновесных цен

Вывод

Задача 1

Задача 2

Задача 3

Задача 4

Список литературы

**Введение**

### Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования ХХ в. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания.

### Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Рассмотрим только такие "модели", которые являются инструментами получения знаний.

### Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Моделирование – это основной специфический метод науки, который используется для анализа и синтеза систем управления. Это особенный познавальный способ, когда субъект исследования вместо непосредственного исследуемого объекта познания выбирает или создает подобный ему вспомогательный объект – образ или модель, исследует его, а полученные новые знания переносит на объект-оригинал. Благодаря активной роли субъекта сам процесс моделирования имеет творческий, активный характер.

### Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

### Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Для анализа и синтеза систем управления в экономике используют различные экономико-математические методы и модели. Важными является условие и особенности их применения в зависимости от цели исследования, принятой системы гипотез и т.д.

### Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

### Процесс моделирования включает три элемента:

### субъект (исследователь),

### объект исследования,

### модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Предметом моделирования экономических процессов являются математические модели реальных экономических объектов. Объектом изучения моделирования экономики является экономика и её подразделения.

**1. Балансовый метод планирования**

В методологии планирования пропорций, темпов и объемных показателей ведущее место принадлежит балансовому методу, который позволяет сравнивать народнохозяйственные потребности с возможностями их удовлетворения, т.е. с имеющимися и и будущими ресурсами.

Разработка плана сопровождается сопоставлением материальных балансов нескольких тысяч видов продукции. Кроме того, разрабатываются балансы основных фондов и производственных мощностей, балансы труда и рабочей силы, система финансовых балансов, транспортные, топливные и другие виды балансов. Они отражают конкретные пропорции между общественными потребностями и ресурсами.

Баланс народного хозяйства является наиболее общей взаимосвязанной системой экономических показателей, характеризующих процесс расширенного воспроизводства. Основная задача баланса заключается в определении на плановый период необходимого объема и темпов роста совокупного общественного продукта, а также пропорций в его производстве, распределении и конечном использовании. Схема баланса народного хозяйства включает четыре основных раздела.

Основным разделом является баланс совокупного общественного продукта. Он характеризует производство общественного продукта в отраслевом и социально-экономическом (по формам собственности) разрезах, его использование на производственное и непроизводственное потребление и накопление. Кроме того, в балансе содержится характеристика совокупного продукта по двум подразделениям общественного производства. В баланс совокупного общественного продукта входят материальные балансы, а также межотраслевой баланс.

Составной частью баланса народного хозяйства является баланс производства, распределения, перераспределения и конечного использования национального дохода. Он включает в себя балансы денежных доходов и расходов населения, балансы доходов и расходов предприятий, бюджет государства и областей.

Сводный баланс трудовых ресурсов как составная часть баланса народного хозяйства характеризует трудовые ресурсы государства и их использование.

Баланс основных фондов показывает движение основных фондов, их состав и структуру. Его составной частью является баланс производственных мощностей.

Указанная система балансов не позволяет получить общей характеристики межотраслевых связей. Она не дает развернутой характеристики распределения конкретных видов продукции в стоимостном и натуральном выражении по отдельным отраслям. Поэтому важное значение приобретает построение межотраслевого баланса производства и распределения продукции, охватывающего движение совокупного общественного продукта с выделением отраслей.

Синтезируя в единой таблице частные материальные балансы, межотраслевой баланс представляет собой систему показателей , дающих подробную характеристику воспроизводства совокупного общественного продукта по стоимости (производство продукции – столбцы таблицы) и по натурально-вещественному составу (распределение продукта – строки таблицы) как в целом по народному хозяйству, так и по отдельным отраслям.

По экономическому содержанию и характеру информации выделяют две основные разновидности межотраслевых балансов: отчетные и плановые. В свою очередь, все межотраслевые балансы модно классифицировать в соответствии с единицами измерения продукции на стоимостные, натурально-продуктовые и трудовые. Межотраслевые балансы делятся также на статические и динамические. Статические отражают экономические связи, складывающиеся в пределах определенного периода времени (обычно года). Динамические описывают динамические связи, складывающиеся в народном хозяйстве и обусловленные характером и способом распределения совокупного продукта на фонды воспроизводства.

Наряду с межотраслевыми разрабатываются региональные балансы.

Итак, рассмотрим некоторые виды моделей.

**2. Модели Леонтьева**

**2.1 Модель Леонтьева многоотраслевой экономики**

Эффективное ведение народного хозяйства предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определенного вида таблицами – так называемыми таблицами межотраслевого баланса. Идея таких таблиц была сформулирована в работах советских экономистов, а первая таблица опубликована в ЦСУ в 1926 г. Однако вполне развитая математическая модель межотраслевого баланса, допускающая широкие возможности анализа, появилась позже (1936 г.) в трудах экономиста В. Леонтьева. В данной работе я представлю её основное математическое содержание.

Итак, будем предполагать, что вся производящая сфера народного хозяйства разбита на некоторое число n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причем разные отрасли производят разные продукты. Разумеется, такое представление об отрасли является в значительной мере абстракцией, так как в реальной экономике даже на отдельном предприятии производится значительное разнообразие выпускаемой продукции. Однако представление об отрасли в указанном выше смысле (как «чистой» отрасли) все же полезно, так как оно позволяет провести анализ сложившейся технологической структуры народного хозяйства, изучить функционирование народного хозяйства «в первом приближении».

Итак, предполагаем, что имеется n различных отраслей O1, …, Оn, каждая из которых производит свой продукт. В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Будем вести речь о некотором определенном промежутке времени [Т0,Т1](обычно таким промежутком служит плановый год) и введем следующие обозначения:

хi – общий объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый валовой выпуск отрасли i;

хij – объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства;

yi – объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере, - объем конечного потребления.

Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т.д.), поставки на экспорт.

Указание величины можно свести в табл. 1.1. Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что при любом i = 1, …, n должно выполнять соотношение

хi = хi1 + хi2 + … + хin + уi, (1.1)

означающее, что валовой выпуск хi расходуется на производственное потребление, равное хi1 + хi2 + …+ хin, и непроизводственное, равное уi. Будем называть (1.1) соотношениями баланса.



Таблица 1.1



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Производственное потребление | Конечное потребление | Валовой выпуск |
| х11 х12 … х1n  х21 х22 … х 2n  ……………………  х n1 хn2 … хnn | у1  у2  …  уn | х1  х2  …  хn |

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки и т.п.), или стоимостными; в зависимости от этого различают натуральный и стоимостный межотраслевой балансы. Для определенности в дальнейшем будем иметь в виду (если не оговорено противное) стоимостный баланс.

В. Леонтьев рассматривая развитие американской экономики в 30-е годы ХХ века, обратил внимание на важное обстоятельство. А именно величины ij = остаются постоянными в течение ряда лет. Это обусловливается примерным постоянством используемой технологии.



В соответствии со сказанным сделаем такое допущение: для выпуска любого объема хj продукции отрасли j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве аij хj, где аij – постоянный коэффициент. Проще говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение постулирует, как говорится, линейность существующей технологии. Принцип линейности распространяют и на другие виды издержек (например, на оплату труда), а также на нормативную прибыль.

Итак, согласно гипотезе линейности имеем

хij = аijхi (i, j = 1, …, n). (1.2)

Коэффициенты аij называют коэффициентами прямых затрат (коэффициентами материалоемкости).

Подставляя соотношения (1.2) в уравнение баланса (1.1), получаем систему n линейных уравнений относительно переменных х1, х2,…, хn:

х1 = а11 х1 + а12 х2 + … а1n хn + у1,

х2 = а21 х1 + а22 х2 + … а2n хn + у2,

…………………………………..

хn = аn1 х1 + аn2 х2 + … аnn хn + уn,

или, в матричной записи,

х = Ах + у, (1.3)

где а11 а12 … а1n х 1 у1

А = а21 а22 … а2n , х = х 2 , у = у2 .

……………. … …

аn1 аn2 … аnn хn уn



Вектор х называется вектором валового выпуска, вектор у – вектором конечного потребления, а матрица А – матрицей прямых затрат. Соотношение (1.3) называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы А и векторов х и у это соотношение называют также моделью Леонтьева.

**2.2 Продуктивные модели Леонтьева**

Определение. Матрица А ≥ 0 называется продуктивной, если для любого вектора у ≥ 0 существует решение х ≥ 0 уравнения

х = Ах + у (2.4)

В этом случае модель Леонтьева, определяемая матрицей А, тоже называется продуктивной. Другими словами, модель продуктивна, если любое конечное потребление у можно обеспечить при подходящем валовом выпуске х.

Уравнение Леонтьева (2.4) можно записать следующим образом:

(Е – А)х = у, (2.5)

где Е – единичная матрица. Возникает, естественно, вопрос об обращении матрицы Е – А. Понятно, что если обратная матрица (Е – А)-1 существует, то из (2.5) вытекает

х = (Е – А)-1 у. (2.6)

Теорема 1 (первый критерий продуктивности).

Матрица А ≥ 0 продуктивна только тогда, когда матрица (Е – А)-1 существует и неотрицательна.

Доказательство.

Если матрица (Е – А)-1 существует и неотрицательна, то из (2.6) сразу же следует продуктивность матрицы А.

Обратно, пусть матрица А продуктивна. Рассмотрим следующие системы уравнений:

(Е – А)х = е1, (Е – А)х = е2, …, (Е – А)х = еn ,

Где е1, е2, …, еn – столбцы единичной матрицы. Каждая из этих систем в силу продуктивности матрицы А имеет неотрицательное решение, т.е. существуют такие векторы (столбцы) с1 ≥ 0, с2 ≥ 0, …, сn ≥ 0, что

(Е – А)с1 = е1, (Е – А)с2 = е2, …, (Е – А)сn = еn (2.7)

Обозначим через С матрицу, составленную из столбцов с1 с 2, …, с n. Тогда вместо n равенств (2.7) можно написать одно:

(Е – А)С = Е.

Следовательно, матрица Е-А имеет обратную С, причем С ≥ 0.

Теорема доказана.

Теорема 2 (второй критерий продуктивности).

Неотрицательная квадратная матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда её число Фробениуса меньше единицы.

Доказательство.

Пусть неотрицательная матрица А продуктивна. Тогда для любого неотрицательного вектора у существует решение х ≥ 0 уравнения (2.4) Пусть у > 0, тогда, очевидно, х > 0. Умножив равенство (2.4) слева на левый вектор Фробениуса рТА и учитывая, что

рТАА = λАрТА, (2.8)

получим

λ А (рТА х) + рТА у = рТА х,

или

(1 – λА)(рТА х) = рТА у.

Так как рТА ≥ 0 и у ≥ 0, х ≥ 0, то рТАу > 0, рТАх > 0. Поэтому из последнего равенства вытекает, что λА < 1.

Обратно, пусть неотрицательная матрица А имеет число Фробениуса λА < 1. Покажем, что она продуктивна. Возьмем неотрицательный вектор у и покажем, что у системы (2.4) существует решение х ≥ 0.

Рассмотрим следующую неотрицательную матрицу размера (n + 1)(n+ 1):

а11 а12 … а1n у1

а21 а22 … а2n у2

А = …………….

аn1 аn2 … аnn уn

0 0 … 0 1

Где аij – элементы матрицы А и у1, …, уn – координаты вектора у. В более компактной форме матрицу можно записать так:

А = А у

0 1

Умножая эту матрицу слева на вектор рТ = (0, …, 0,1), легко убедиться, что

рТА = рТ.

Следовательно, одним из собственных значений матрицы А является вектор λ = 1.

Пусть вектор Х = (х1 , …, хn , хn+1 ) = (х , хn+1) является собственным вектором матрицы А, т.е. АХ = λХ. В силу определения матрицы А эторавносильно тому, что

А у х = λ х

0 1 хn+1 хn+1

или

Ах + у хn+1 = λх,

хn+1 = λ хn+1. (2.9)

Если λ ≠ 1, то из второго соотношения системы (2.9) следует, что хn+1 = 0, в силу чего первое уравнение имеет вид Ах = λх. Следовательно, λ – собственное значение матрицы А и, по нашему предположению ‌‌‌|λ| < 1. Таким образом, λА = 1 является положительным и максимальным по модулю собственным значением, следовательно является числом Фробениуса. По теореме Фробениуса-Перрона у матрицы А существует неотрицательный собственный вектор хА = ( хА , хn+1), соответствующий λА =1. Очевидно, что хn+1 ≠ 0, так как в противном случае из (2.9) следовало бы, что Ах = х. А это противоречит тому, что число Фробениуса λА < 1. Поэтому мы можем считать, что хn+1 = 1. В силу того, что хn+1 = 1, равенство (2.9) принимает вид

АхА + у = хА.

Поскольку хА = (хА, хn+1) ≥ 0, то хА ≥ 0.

Следовательно, матрица А продуктивна.

Следствие.

Если для неотрицательной матрицы А и некоторыого положительного вектора у уравнение (2.4) имеет неотрицательное решение х, то матрица А продуктивна.

Доказательство.

Как было уже показано, из существования положительного решения у уравнения (2.4) следует, что λА < 1. На основании теоремы Фробениуса матрица А продуктивна.

Теорема 3 (третий критерий продуктивности).

Неотрицательная матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд

Е + А + А² + … (2.10)

Доказательство.

Пусть сходится ряд (2.10). Согласно лемме его сема равна (Е – А)-1. При этом сумма указанного ряда будет неотрицательна, поскольку все слагаемые ряда неотрицательны. Итак, матрица (Е – А)-1 существует и неотрицательна. Отсюда по теореме 1.3 следует продуктивность А.

Обратное утверждение (если А продуктивна, то ряд (2.10) сходится) доказывать не будем.

**3. Вектор полных затрат**

Пусть А ≥ 0. Равенство

(Е – А)-1 = Е + А + А2 + … (3.11)

справедливо, как мы уже знаем, в том случае, когда матрица А продуктивна, имеет экономический смысл.

х = у + Ау + А2у + … (3.12)

В чем смысл распадения вектора х на слагаемые у, Ау, А2у и т.д.? Для получения валового выпуска, обеспечивающего конечное потребление у, нужно прежде всего произвести набор товаров, описываемый вектором у. Но этого мало – ведь для получения у нужно затратить ( а значит, сначала произвести) продукцию, описываемую вектором Ау. Но и этого мало – для получения Ау нужно осуществить дополнительные затраты, описываемые вектором А(Ау) = А2у, и т.д. В итоге приходим к заключению, что весь валовой выпуск х должен составляться из слагаемых у, Ау, А2у и т.д., что и зафиксировано в формуле (3.12). В соответствии с этим рассуждением сумму у + Ау + А2у + … называют вектором полных затрат, а сделанное выше заключение формулируют так: вектор валового выпуска х совпадает с вектором полных затрат.

Чтобы сделать заключение более конкретным, рассмотрим такой пример. Пусть речь идет о блоке из трех промышленных отраслей:

1. металлургия;
2. электроэнергетика;
3. угледобыча.

Для получения конечного выпуска у = (у1 , у2 , у3)Т необходимо прежде всего произвести:

у1 т металла; у2 кВт.ч электроэнергии; у3 т угля.

Но для производства у1 т металла, в свою очередь, необходимо затратить (а значит, сначала произвести) какие-то количества металла, электроэнергии и угля. То же самое мправедливо и в отношении производства у2 кВт.ч. электроэнергии и у3 т угля

В свою очередь, для производства у11 т металла необходимо затратить какие-то количества металла, электричества и угля, и т.д. Искомый валовой выпуск х представляет собой сумму затрат 0-го порядка (вектор у), 1-го порядка (вектор Ау), 2-го порядка (А2у) и т.д.

**4. Модель равновесных цен**

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева – так называемую модель равновесных цен. Пусть, как и прежде, А – матрица прямых затрат, х = (х1 , х2, …, хn)Т – вектор валового выпуска. Обозначим через р = (р1 , р2 , …, рn)Т вектор цен, i координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли; тогда, например, первая отрасль получит доход, равный р1 х1. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции, ей необходима продукция первой отрасли в объеме а11, второй отрасли в объеме а21, и т.д., n-й отрасли в объеме аn1. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная а11 р1 + а21 р2 + … + аn1 рn. Следовательно, для выпуска продукции в объеме х1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную х1(а11р1+а21р2+…+ аn1рn). Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, мы обозначим через V1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Таким образом, имеет место следующее равенство:

х1р1 = х1(а11р1+а21р2+…+ аn1рn) + V1.

Разделив это равенство на х1 получаем:

р1 = а11 р1 + а21 р2 + … + аn1 рn + v1,

где v1 = V1/х1 – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции). Подобным же образом получаем для остальных отраслей

р2 = а12 р1 + а22 р2 + … + аn2 рn + v2,

рn = а1n р1 + а2n р2 + … + аnn рn + vn.

Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

р = АТр + v,

где v = (v1, v2, …, vn)Т – вектор норм добавленной стоимости. Как мы видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева, с той лишь разницей, что х заменен на р, у – на v, А – на АТ.

**Вывод**

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены одной из отраслей.

Балансовый метод – это метод взаимного сопоставления ресурсов (материальных, трудовых, финансовых) и потребностей в них. Среди множества разновидностей балансового метода наиболее распространен межотраслевой баланс, увязывающий источники и направления использования ресурсов. Как правило, при применении балансового метода производятся вариантные расчеты с помощью вычислительной техники

Межотраслевой баланс представляет собой экономико-математическую модель народного хозяйства, что позволяет проводить многовариантные расчеты структуры общественного производства по заданному объему и структуре конечного продукта. Это имеет важное значение на предварительной стадии составления плана для осуществления вариантов расчетов пропорций, темпов и отраслевой структуры экономики, а также на последующих стадиях планирования для повышения уровня сбалансированности отраслей и анализа межотраслевых связей. Таким образом, разработка межотраслевого баланса является одной из предпосылок развития методологии оптимального планирования.

Данные полученные по модели межотраслевого баланса, дают возможность судить о тенденциях развития технического прогресса, о насыщении экономики производственными фондами, капитальными вложениями, трудовыми ресурсами и т.д. Такой анализ возможен на основе сопоставления матриц прямой и полной фондо-, капитало-, трудоемкости и др.

Межотраслевой баланс, разработанный в трудовых единицах, дает информацию, необходимую для построения рациональной системы цен.

Итак, балансовый метод заключает в себе использование балансов для взаимного сопоставления ресурсов (материальных, трудовых, финансовых) и потребностей в них.

**Задача 1**

Компания производит продукцию двух видов А и В. Обе требуют работы двух цехов сборочного и отделочного. Сведения о производстве:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Цех | Продукция | | Вместе необходимо рабочих часов |
| А | В |
| Сборочный | 3 | 5 | 15 |
| Отделочный | 5 | 2 | 10 |
| Валовая прибыль на единицу | 5 | 32 |  |

Компания заинтересована в наибольшей прибыльности этих комбинаций продукции. Найти сколько надо производить продукции А и В, чтобы валовая прибыль была максимальная.

Решение

Введем переменные:

х1 – количество продукции вида А;

х2 – количество продукции вида В.

Строим математическую модель:

Fмах = 5х1 + 32х2 при условиях:

3х1 + 5х2 ≤ 15;

5х1 + 2х2 ≤ 10.

х1 ≥ 0, х2 ≥ 0, т.к. продукция выпускаемая не может быть отрицательной.

Задачу можно решить графическим методом и можно решить или проверить симплекс-методом.

Для решения графическим методом запишем граничные прямые:

1) 3х1 + 5х2 = 15;

2) 5х1 + 2х2 = 10.

Строим граничные прямые на плоскости, но для этого найдем точки для построения прямых:

1. х2 = 0; х1 = 5; х1 = 0; х2 = 3;
2. х2 = 0; х1 = 2; х1 = 0; х2 = 5.

ОДЗ – многоугольник ОАВСD.

Для определения ОДЗ (области допустимых значений) необходимо найти направление полуплоскостей.

Для испытания берем точку О(0;0) и подставляем её координаты в неравенство (1) и (2), если неравенство удовлетворяется, то полуплоскость направлена к точке (0;0). При наложении полуплоскостей друг на друга получим ОДЗ.

Строим вектор целевой функции С, перпендикулярно к нему проводим линию уровня (пунктирная линия). Перемещаем линию уровня по ОДЗ в направлении вектора целевой функции С и самая дальняя точка от начала координат – это точка А(0;3) в ней хопт.

Подставим координаты (0;3) в целевую функцию и получим её максимальное значение

Fmах = 5\*0 + 3\*32 = 96 ед. стоимости в точке А(0;3).

Для получения прибыли равной 96 ед.ст. необходимо включить в план продукцию типа В.

**Задача 2**

Фирма дополнительно освоила выпуск продукции четырех видов В1, В2, В3, В4. Для выпуска это продукции необходимо сырьё четырех видов А1, А2, А3, А4, которое фирма может ежемесячно покупать в ограниченном количестве. Количество сырья каждого вида, которое необходимо для производства каждого вида ассортимента продукции, а также ежемесячное поступление каждого вида сырья приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды сырья | Ежемесячное поступление сырья | Затраты сырья на единицу каждого изделия | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 1290 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| А2 | 990 | 2 | 2 | 0 | 6 |
| А3 | 620 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| А4 | 300 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Прибыль от реализации единицы изделия | | 8 | 10 | 12 | 18 |

Построить математическую модель и определить, какой ассортимент продукции и в каком количестве должна производить фирма, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

Решение

Введем переменные:

х1 – количество продукции типа В1;

х2 – количество продукции типа В2;

х3 – количество продукции типа В3;

х4 – количество продукции типа В4.

Строим математическую модель задачи:

Fmах = 8х1 + 10х2 + 12х3 + 18х4

при условиях:

2х1 + 4х2 +6х3 + 8х4 ≤ 2110;

2х1 + 2х2 + 0\*х3 + 6х4 ≤ 1810;

0\*х1 + х2 + х3 + 2х4 ≤ 1440;

х1 + 0\*х2 + х3 + 0\*х4 ≤ 1120.

хj ≥ 0; j = 1,4.

Приводим систему ограничений к каноническому виду:

2х1 + 4х2 +6х3 + 8х4 + х5 = 2110;

2х1 + 2х2 + 6х4 + х6 = 1810;

х2 + х3 + 2х4 + х7 = 1440;

х1 + х3 + х8 = 1120.

хj ≥ 0; j = 1,8.

Приводим систему ограничений к виду удобному для решения. Для этого проверим наличие единичного базиса в системах ограничений и так как он есть, то решаем задачу прямым симплекс-методом.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № оп.пл. | Базис | С | bi | 8 | 10 | 12 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| х1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 | х7 | х8 |
|  | х5 | 0 | 2110 | 2 | 4 | 6 | <8> | 1 | 0 | 0 | 0 |
| х6 | 0 | 1810 | 2 | 2 | 0 | 6 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| х7 | 0 | 1440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| х8 | 0 | 1120 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Fj - Сj | | 0 | -8 | -10 | -12 | -18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | х4 | 18 | 263,75 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 0,125 | 0 | 0 | 0 |
| х6 | 0 | 227,5 | <0,5> | -1 | -4,5 | 0 | -0,75 | 1 | 0 | 0 |
| х7 | 0 | 912,5 | -0,5 | 0 | -0,5 | 0 | -0,25 | 0 | 1 | 0 |
| х8 | 0 | 1120 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Fj - Сj | | 4747,5 | -3,5 | -1 | 1,5 | 0 | 2,25 | 0 | 0 | 0 |
|  | х4 | 18 | 150 | 0 | 1 | <3> | 1 | 0,5 | -0,5 | 0 | 0 |
| х1 | 8 | 455 | 1 | -2 | -9 | 0 | -1,5 | 2 | 0 | 0 |
| х7 | 0 | 1140 | 0 | -1 | -5 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| х8 | 0 | 665 | 0 | 2 | 10 | 0 | 1,5 | -2 | 0 | 1 |
| Fj - Сj | | 6340 | 0 | -8 | -30 | 0 | 0,1667 | 7 | 0 | 0 |
|  | х3 | 12 | 50 | 0 | 0,3333 | 1 | 0,3333 | 0,1667 | 0,1667 | 0 | 0 |
| х1 | 8 | 905 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 |
| х7 | 0 | 1390 | 0 | 0,6667 | 0 | 1,6667 | 0,1667 | 0,1667 | 1 | 0 |
| х8 | 0 | 165 | 0 | -1,333 | 0 | -3,333 | -0,333 | -0,333 | 0 | 1 |
| Fj - Сj | | 7840 | 0 | 2 | 0 | 10 | 2 | 2 | 0 | 0 |

Ответ: Fmах = 7840 ед. стоимости; хопт = (905; 0; 50; 0; 0; 0; 1390; 165).

Для получения прибыли равной 7840 ед. стоимости необходимо включить в план продукцию первого и третьего вида в количествах:

В1 = 905 ед.;

В3 = 50 ед.,

При этом остались недоиспользованные ресурсы в количествах:

А3 = 1390 ед.

А4 = 165 ед.

**Задача 3**

Для откорма группы животных на ферме необходимо наличие в ежедневном рационе не менее как В1, единиц питательных веществ В2 и т.д. – не менее как Вm. Указанные питательные вещества содержатся в n разных кормовых продуктах, которые можно закупить.

Составить такой ежедневный кормовой рацион, при котором будет удовлетворена потребность в питательных и затраты на откорм будут минимальны.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Питательные вещества | Кормовые продукты | | | | Суточная необходимость  Вi = В0 + n1 |
| В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 64 + 9 |
| А2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 39 + 9 |
| А3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 35 + 9 |
| Стоимость 1 кг кормов | 2 | 1 | 3 | 4 |  |

Составить математическую модель и решить ЗЛП.

Решение

Введем переменные:

х1 – количество кормового продукта В1

х2 – количество кормового продукта В2

х3 – количество кормового продукта В3

х4 – количество кормового продукта В4

Строим математическую модель:

Fmах = 2х1 + х2 + 3х3 + 4х4

при условиях:

х1 + 2х2 + 2х3 + х4 ≥ 155;

3х2 + х3 + х4 ≥ 130;

2х1 + х2 + 3х4 ≥ 126;

хj ≥ 0; j = 1,4.

Приведем систему ограничений к каноническому виду:

х1 + 2х2 + 2х3 + х4 – х5 = 155;

3х2 + х3 + х4 – х6 = 130;

2х1 + х2 + 3х4 – х7 = 126;

хj ≥ 0; j = 1,7.

Приведем систему ограничений к виду удобному для решения:

х1 + 2х2 + 2х3 + х4 – х5 + х8 = 155;

3х2 + х3 + х4 – х6 + х9 = 130;

2х1 + х2 + 3х4 – х7 + х10 = 126;

хj ≥ 0; j = 1,10.

Переменные х8, х9, х10 являются искусственными и они введены на знак «=», поэтому для корректировки задачи эти переменные вводят в целевую функцию с коэффициентом +М.

Fmin = 2х1 + х2 + 3х3 + 4х4 + Мх8 + Мх9 + Мх10.

Задача решается модифицированным симплекс-методом (метод искусственного базиса).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  о/п | Ба-  зис | С | bi | С1=2 | С2=1 | С3=3 | С4=4 | С5=0 | С6=0 | С7=0 | С8=М | С9=М | С10=М |
| Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 | Х6 | Х7 | Х8 | Х9 | Х10 |
|  | х8 | М | 155 | 1 | 2 | 2 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| х9 | М | 130 | 0 | <3> | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| х10 | М | 126 | 2 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| Fj - Сj | | 0 | -2 | -1 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| М |  | 411 | 3 | 6 | 3 | 5 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
|  | х8 | М |  | 1 | 0 | 4/3 | 1/3 | -1 | 2/3 | 0 | 1 |  | 0 |
| х2 | 1 |  | 0 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 | 0 |  | 0 |
| х10 | 0 |  | <2> | 0 | -1/3 | 8/3 | 0 | 1/3 | -1 | 0 |  | 1 |
| Fj - Сj | |  | -2 | 0 | -8/3 | - | 0 | -1/3 | 0 | 0 |  | 0 |
| М |  | 151 | 3 | 0 | 1 | 3 | -1 | 1 | -1 | 0 |  | 0 |
|  | х8 | М | 27 | 0 | 0 | <> | -1 | -1 | 1/2 | 1/2 | 1 |  |  |
| х2 | 1 |  | 0 | 1 | 1/3 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 | 0 |  |  |
| х1 | 2 |  | 1 | 0 | -1/6 | 4/3 | 0 | 1/6 | -1/2 | 0 |  |  |
| Fj - Сj | | 126 | 0 | 0 | -3 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 |  |  |
| М |  | 27 | 0 | 0 | 3/2 | -1 | -1 | 1/2 | 1/2 | 0 |  |  |
|  | х3 | 3 | 18 | 0 | 0 | 1 | -2/3 | -2/3 | 1/3 | <1/3> |  |  |  |
| х2 | 1 |  | 0 | 1 | 0 | 5/9 | 2/9 | -4/9 | -1/9 |  |  |  |
| х1 | 2 |  | 1 | 0 | 0 | 11/9 | -1/9 | 2/9 | -4/9 |  |  |  |
| Fj - Сj | | 180 | 0 | 0 | 0 | -3 | -2 | 1 | 0 |  |  |  |
|  | х6 | 0 | 54 | 0 | 0 | 3 | -2 | -2 | 1 | 1 |  |  |  |
| х2 | 1 |  | 0 | 1 | 4/3 | -1/3 | -2/3 | 0 | 1/3 |  |  |  |
| х1 | 2 |  | 1 | 0 | -2/3 | 5/3 | 1/3 | 0 | -2/3 |  |  |  |
| Fj - Сj | | 126 | 0 | 0 | -3 | -1 | 0 | 0 | -1 |  |  |  |

Каждый опорный план проверяем на оптимальность.

В 5-м опорном плане в индексной строке все разности Fj - Сj ≤ 0, следовательно этот план является оптимальным (F→min).

Можно записать ответ:

Fmin = 126 ед.стоимости,

Хопт = (97/3 = 32,33; 184/3 = 61,33; 0; 0; 0; 54).

Для получения минимальной себестоимости на изготовление кормовой продукции равной 126 ед. ст. необходимо включить в план кормовые продукты 1-го В1 = 32,33 ед. и второго вида В2 = 61,33 ед. и остались недоиспользованы ресурсы по А3 в количестве 54 ед.

**Задача 4**

С четырех карьеров к трем керамическим заводам перевозят глину.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Карьеры | Керамические заводы | | | Мощность карьера  Вj = Воj + n |
| В1 | В2 | В3 |
| А1 | 15 | 6 | 12 | 45 + 9 |
| А2 | 4 | 6 | 8 | 38 + 9 |
| А3 | 24 | 21 | 5 | 23 + 9 |
| А4 | 12 | 9 | 12 | 84 |
| Вj + Воj + n | 70 + 9 | 65 + 9 | 55 + 9 | 190 + 3\*9 |

Сделать математическую постановку задачи и спланировать перевозку глины на керамические заводы так, чтобы транспортные затраты были минимальны.

Решение

Данная задача относится к типу транспортных задач линейного программирования и её математическая модель в сокращенной форме записи будет выглядеть так:

m n

Smin = Σ Σ Cij Хij,



i=1 j=1

при условиях по ресурсам:

n

Σ хij = Аi,, i = 1,m

j=1

m

Σ хij = Вj, j = 1,n

i=1

хij ≥ 0; i = 1,m; j = 1,n.

Существует два вида моделей:

m n

закрытая Σ Аi = Σ Вj;

i=1 j=1

m n

открытая Σ Аi ≠ Σ Вj.

i=1 j=1

Если в условии задачи дана открытая модель, то её нужно привести к закрытой, путем введения фиктивного поставщика или потребителя с нулевыми стоимостями перевозок, но ноль считается как максимально большое число. Закрытую модель можно решить методом потенциалов.

Проверяем в данной задаче тип модели:

Σ Аi = 217; Σ Вj = 217.

Строим первый опорный план по правилу минимального элемента:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики | Потребители | | | U |
| В1 = 79 | В2 = 74 | В3 = 64 |
| А1 = 54 | 15  32- ρ | 6  22 + ρ | 12 | U1 = 0 |
| А2 = 47 | 4  47 | 6 | 8 | U2 = -11 |
| А3 = 32 | 24 | 21 | 5  32 | U3 = -4 |
| А4 = 84 | 12  +ρ | 9  52-ρ | 12  32 | U4 = 3 |
| V | V1 = 15 | V2 = 6 | V3 = 9 | Smin = 1812 |

Далее делается проверка системы ограничений:

n m =

Σ хij = Аi,, Σ хij = Вj,

j=1 i=1

убеждаемся, что все ресурсы распределены и потребители удовлетворены максимальным образом.

Проверяем план на вырожденность: количество заполненных клеток должно быть равно: m + n – 1 = 4 + 3 – 1 = 6.

Считаем стоимость перевозок:

Smin = 15\*32 + 6\*22 + 4\*47 + 5\*92 + 9\*52 + 12\*32 = 1812.

Так как неизвестно, является ли этот план оптимальным, т.е. стоимость перевозок = 1812 ед.ст. или её можно уменьшить, то проверим каждую свободную клетку на оптимальность, а для этого необходимо найти потенциалы U и V, они находятся для заполненных клеток по формуле:

Сij = Ui + Vj, хij > 0.

После чего проверяем свободные клетки на оптимальность по формуле:

Sij = Сij – (Ui + Vj) ≥ 0.

Оказалось, что одна клетка не оптимальна S41 = -6.

Ставим в эту клетку +ρ – это величина для перераспределения ресурсов. От этой клетки строим цикл пересчета – это многоугольник любой конфигурации с прямыми циклами, расположенными в заполненных клетках. По углам этого цикла (прямоугольника) ставим +ρ и –ρ, чтобы был баланс по строкам и столбцам.

Определяем величину перераспределения груза (ресурсов):

ρ = min {32;52} = 32.

Строим новый опорный план:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики | Потребители | | | U |
| В1 = 79 | В2 = 74 | В3 = 64 |
| А1 = 54 | 15 | 6  54 | 12 | U1 = 0 |
| А2 = 47 | 4  47 | 6 | 8 | U2 = -5 |
| А3 = 32 | 24 | 21 | 5  32 | U3 = -4 |
| А4 = 84 | 12  32 | 9  20 | 12  32 | U4 = 3 |
| V | V1 = 9 | V2 = 6 | V3 = 9 | Smin = 1620 |

и весь алгоритм повторяется снова:

Smin 2 = 6\*54 + 4\*47 + 5\*32 + 12\*32 + 9\*20 + 12\*32 = 324 + 188 + 160 + 384 +180+ + 384 = 1620.

Все Sij ≥ 0, следовательно 2-й опорный план является оптимальным.

Ответ: минимальная стоимость перевозок равна 1620 ед. стоимости.

Поставки глины: х12 = 54 т; х21 = 47 т; х33 = 32 т; х41 = 32 т; х42 = 20 т; х43 = 32 т.

**Список литературы**

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.

2. Архангельский Ю.С., Коваленко И.И. Межотраслевой баланс. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988.

3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

4. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980

5. Вивальнюк Л.М. Елементи лінійного програмування. – К.: Вища школа, 1975.

6. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. – М.: ИЛ, 1963.

7. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Линейное программирование (теория, методы и приложения). – М.: Наука, 1969.

8. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и приложения. – М.: Прогресс, 1966.

9. Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследование операцій в планировании и управлении. – К.: Вища школа, 1991.

10. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. – М.: Наука, 1972.

11. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Вища школа, 1979.

12. Исследование операций. / Под ред. Н.С. Кремера. – М.: Бизнес и банки, ЮНИТИ, 1997.

13. Кузнецов Ю.Н. и др. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.

14. Карпелевич Ф.М., Садовский Л.Е. Математическое программми-рование. – И.: Наука, 1967.

15. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: Наука, 1984.

16. Математика в экономике: Учебник: в 2-х ч. Ч.1/ А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006.

17. Математические методы и модели в планировании и управлении. Сборник задач. К.: Вища школа, 1985.

18. Терехов Л.Л., Куценко В.А.Ж, Сиднев С.П. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении. – К.: Вища школа, 1984.