МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра: Высшей математики

Контрольная работа

по дисциплине «Экономико-математические методы и модели»

Вариант - 12

Студентки Финансово-экономического факультета

Заочного отделения

Группы У06-ЭПз-1

Галай Натальи Михайловны

Преподаватель:

Сороговец И.Б.

Новополоцк, 2008 г.

**Содержание**

[Задача 1-1](#_Toc242681923)

[Задача 2-1](#_Toc242681924)

[Задача 3-1](#_Toc242681925)

[Задача 4-2](#_Toc242681926)

[Задача 5-2](#_Toc242681927)

**Задача 1-1**

По условиям контракта торгово-посредническая фирма должна поставить каждому из двух покупателей *Bj* (*j* = 1, 2) два вида товаров *Tk* (*k* = 1, 2) в количестве *bj k* по цене *рj k* за единицу товара. Эти товары можно закупить у трех производителей *Ai* (*i* = 1, 2, 3) по цене *si k* за единицу товара. Известны: количества *ai k* товара *Tk*, имеющегося у производителя *Ai*, а также стоимости *ci j k* перевозки единицы товара *Tk* от производителя *Ai* к покупателю *Bj*.

ТРЕБУЕТСЯ:

1. Построить математическую модель поставленной задачи, максимизирующую прибыль фирмы от реализации всех сделок в виде задачи линейного программирования.

2. Методом потенциалов найти оптимальный план закупок, перевозок и поставок по каждому товару от каждого производителя к каждому покупателю, а также сумму прибыли от реализации этого плана.

Исходные данные:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a11 | a12 | a21 | a22 | a31 | a32 |
| 400 | 410 | 480 | 550 | 420 | 480 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| s11 | s12 | s21 | s22 | s31 | s32 |
| 2 | 3 | 5 | 5 | 2 | 3 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| b11 | b12 | b21 | b22 |
| 480 | 130 | 270 | 320 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| c111 | c112 | c121 | c122 | c211 | c212 | c221 | c222 | c311 | c312 | c321 | c322 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p11 | p12 | p21 | p22 |
| 16 | 14 | 15 | 15 |

РЕШЕНИЕ:

1) Для составления математической модели введем неизвестные  – количество товара , покупаемое у производителя  для перевозки потребителю . Индексы: *i =* 1, 2, 3 – номер производителя продукции;

*j* = 1, 2 – номер потребителя продукции; *k* = 1, 2 – номер товара. Найдем тарифы , т.е. прибыли на одну единицу товара , покупаемое у производителя  для продажи потребителю . Эти прибыли состоят из цены продажи 1 единицы товара за вычетом цены покупки и стоимости перевозки, т.е. .

f111 = p11 – s11 – c111 = 16 – 2 – 2 = 12;

f112 = p12 – s12 – c112 = 14 – 3 – 2 = 9;

f121 = p21 – s11 – c121 = 15 – 2 – 2 = 11;

f122 = p22 – s12 – c122 = 15 – 3 – 2 = 10;

f211 = p11 – s21 – c211 = 16 – 5 – 3 = 8;

f212 = p12 – s22 – c212 = 14 – 5 – 2 = 7;

f221 = p21 – s21 – c221 = 15 – 5 – 1 = 9;

f222 = p22 – s22 – c222 = 15 – 5 – 2 = 8;

f311 = p11 – s31 – c311 = 16 – 2 – 3 = 11;

f312 = p12 – s32 – c312 = 14 – 3 – 2 = 9;

f321 = p21 – s31 – c321 = 15 – 2 – 2 = 11;

f322 = p22 – s32 – c322 = 15 – 3 – 1 = 11.

Значение полученных коэффициентов приведены в таблице 1.1:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| fijk | f111 | f112 | f121 | f122 | f211 | f212 | f221 | f222 | f311 | f312 | f321 | f322 |
| тариф | 12 | 9 | 11 | 10 | 8 | 7 | 9 | 8 | 11 | 9 | 11 | 11 |

Прибыль фирмы представляется выражением , где сумма берется по всем возможным значениям индексов *i*, *j*, *k*. По условию, выражение *F* следует максимизировать, т.е. *F* является целевой функцией поставленной задачи. Так как операции над товарами  и  можно производить по отдельности и выражение *F* представляется в виде суммы двух слагаемых , сгруппированных по товарам , , то поставленная задача сводится к решению двух оптимизационных задач. Ограничения для неизвестных диктуются наличием соответствующих товаров у производителей и потребностью в них покупателей. В результате приходим к двум задачам линейного программирования, которые относятся к задачам транспортного типа:

*Задача 1 (по товару )*

max F1 = 12 \* X111 + 11 \* X121 + 8 \* X211 + 9 \* X221 + 11 \* X311 + 11 \* X321

X111 + X211 + X311 ≤ b11 ≤ 480 X121 + X221 + X321 ≤ b21 ≤ 270

X111 + X121 ≤ a11 ≤ 400 X211 + X221 ≤ a21 ≤ 480 X311 + X321 ≤ a31 ≤ 420

Xij1 ≥ 0

*Задача 2 (по товару )*

max F2 = 9 \* X112 + 10 \* X122 + 7 \* X212 + 8 \* X222 + 9 \* X312 + 11 \* X322

X112 + X212 + X312 ≤ b12 ≤ 130 X122 + X222 + X322 ≤ b22 ≤ 320

X112 + X122 ≤ a12 ≤ 410 X212 + X222 ≤ a22 ≤ 550 X312 + X322 ≤ a32 ≤ 480

Xij2 ≥ 0

Как видно, решение поставленной задачи сводится к решению двух задач транспортного типа.

2) Для решения задач 1, 2 методом потенциалов, сопоставим суммарное наличие каждого товара у производителей и суммарные потребности покупателей.

 = 400 + 480 + 420 = 1300,  = 480 + 270 = 750;

1300 – 750 = 550

Наличие товара Т1 превышает потребности покупателей. Вводим фиктивного покупателя В3 с потребностью b31 = 550.

 = 410 + 550 + 480 = 1440,  = 130 + 320 = 990;

1440 – 450 = 990

Наличие товара Т2 превышает потребности покупателей. Вводим фиктивного покупателя В3 с потребностью b32 = 990.

Получаем закрытые модели двух транспортных задач. Для их решения составляем две таблицы. В верхних правых углах клеток  выписаны тарифы  и . Для фиктивных производителей и покупателей тарифы равны нулю. Последние строки и столбцы таблиц служат для записи потенциалов.

Таблица 1.2 (к задаче 1)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Производители | Покупатели | | |  |  |
| B1 | B2 | B3 | ai1 | ui | |
| A1 | 12  400 | 11  12 | 0  1 | 400 | 1 | |
| A2 | 8  11 | 9  11 | 0  480 | 480 | 0 | |
| A3 | 11  80 | 11  270 | 0  70 | 420 | 0 | |
| bj1 | 480 | 270 | 550 | 1300 | – | |
| vj | 11 | 11 | 0 | – | – | |

Таблица 1.3 (к задаче 2)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Производители | Покупатели | | |  | |  |
| B1 | B2 | B3 | ai1 | ui | |
| A1 | 9  130 | 10  11 | 0  280 | 410 | 0 | |
| A2 | 7  9 | 8  11 | 0  550 | 550 | 0 | |
| A3 | 9  9 | 11  320 | 0  160 | 480 | 0 | |
| bj1 | 130 | 320 | 990 | 1440 | – | |
| vj | 9 | 11 | 0 | – | – | |

Начальные планы распределения товаров определены по методу максимальной прибыли, т.е. в первую очередь заполнялись по максимуму клетки с наибольшими тарифами. Более конкретно, просматривая таблицу 1.2, замечаем, что максимальный тариф 12 стоит в клетке (1,1). В эту клетку ставим число 400. При этом запасы производителя А1 исчерпан. Далее, в клетку (3,1) ставим 80, а в клетку (3,2) ставим 270. Из запасов производителя А3 осталось 70, так как 420-80-270=70, ставим их в клетку (3,3). Потребность покупателей В1 и В2 в товарах исчерпаны, следовательно, оставшиеся 480 товаров производителя А2 ставим в клетку (2,3). При этом товар  производителей  полностью распределён.

Полученный начальный план проверим на оптимальность. План невырожденный, так как число занятых клеток (3+3-1=5) равно *m* + *n* – 1 (*m* и *n* – число строк и столбцов распределительной матрицы). Обозначим через  и  потенциалы строк и столбцов. Для их нахождения отметим, что в занятых клетках сумма потенциалов строки и столбца должна равняться тарифу клетки. Получаем в данном случае 5 уравнений с 6-ю неизвестными:

v1 + u1 = 12; v2 + u3 = 11; v3 + u3 = 0.

v1 + u3 = 11; v3 + u2 = 0;

Полагая, что v3 = 0, последовательно получаем: u2 = 0, u3 = 0, v2 = 11, v1 = 11, u1 = 1.

Так как задача решается на максимум, то для оптимальности плана распределения, сумма потенциалов в незанятых клетках должна быть не меньше тарифов этих клеток. В нижних левых углах незанятых клеток выписаны суммы потенциалов. Все они превосходят соответствующие тарифы, т.е. начальный план закрепления покупателей за производителями по товару оптимален.

Аналогично, таблица 1.3 заполнена в следующей последовательности:

(3,2) – 320, (1,1) – 130, (1,3) – 280, (3,3) – 160, (2,3) – 550. Полученный план невырожденный, так как содержит 3 + 3 – 1 = 5 занятых клеток. Проверим его на оптимальность. Выпишем систему уравнений для нахождения потенциалов:

v1 + u1 = 9; v3 + u1 = 0; v3 + u3 = 0.

V2 + u3 = 11; v3 + u2 = 0;

Полагая, что u3 = 0, последовательно получаем: v3 = 0, u2 = 0, u1 = 0, v2 = 11, v1 = 9.

План распределения товара *T*2, заданный таблицей 2, оптимален.

Сумма прибыли  = (12\*400 + 11\*80 + 11\*270) + (9\*130 + 11\*320) = = 8650 + 4690 = 13340.

ОТВЕТ:

X111 = 400, X311 = 80, X321 = 270, X112 = 130, X322 = 320. Остальные  = 0. Максимальная прибыль равна 13340.

**Задача 2-1**

С помощью алгоритма венгерского метода найти план закрепления работ за исполнителями, максимизирующий прибыль, связанную с выпуском всех пяти видов продукции. Матрица эффективности AN =, где  – прибыль, получаемая при выполнении *j*-й работы *i*-м исполнителем, N - номер варианта, имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 40 | 28 | 44 | 38 | 46 |  |
|  | 36 | 52 | 51 | 43 | 30 |  |
| A12= | 40 | 29 | 48 | 45 | 34 | , |
|  | 56 | 54 | 53 | 46 | 49 |  |
|  | 51 | 41 | 50 | 55 | 41 |  |

РЕШЕНИЕ:

I этап: приведение матрицы А12.

Алгоритм венгерского метода предназначен для решения задачи о назначениях по критерию минимизации суммарных затрат (задача на минимум). При решении задачи на максимум (так как  – прибыль), ее следует свести к задаче на минимум. Для этого в каждом столбце матрицы определяем максимальный элемент и из него вычитаем все элементы столбца.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 40 | 28 | 44 | 38 | 46 |  |  | 16 | 26 | 9 | 17 | 3 |  |
|  | 36 | 52 | 51 | 43 | 30 |  |  | 20 | 2 | 2 | 12 | 19 |  |
| A12= | 40 | 29 | 48 | 45 | 34 |  | → A121= | 16 | 25 | 5 | 10 | 15 | → |
|  | 56 | 54 | 53 | 46 | 49 |  |  | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 |  |
|  | 51 | 41 | 50 | 55 | 41 |  |  | 5 | 13 | 3 | 0 | 8 |  |
|  | 56 | 54 | 53 | 55 | 49 |  |  |  |  |  |  |  |  |

Так как в строках 1, 2, 3 нулей не оказалось, то вычитаем из элементов этих строк минимального из них, то есть вычитаем из строки 1 число 3, из строки 2 число 2, из строки 3 число 5. Получаем нули в этих строках.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 13 | 23 | 6 | 14 | 0 |  |
|  | 18 | 0 | 0 | 10 | 17 |  |
| → A122= | 11 | 20 | 0 | 5 | 10 | → |
|  | 0 | 0 | 0 | 9 | 0 |  |
|  | 5 | 13 | 3 | 0 | 8 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

II этап: поиск назначения.

Выбираем один из нулей, помечаем его, например, точкой или звездочкой или обводим его другим цветом (в дальнейшем, звездочкой), а остальные нули строки и столбца, в которых стоит выбранный помеченный нуль, перечеркиваем. Далее переходим к следующему нулю. И так до тех пор, пока каждый нуль будет либо помечен, либо перечеркнут.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 13 | 23 | 6 | 14 | 0\* |  |
|  | 18 | 0\* | Ø | 10 | 17 |  |
| → A122= | 11 | 20 | 0\* | 5 | 10 |  |
|  | 0\* | Ø | Ø | 9 | Ø |  |
|  | 5 | 13 | 3 | 0\* | 8 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Помеченные нули составили полное назначение (количество помеченных нулей равно 5).

Следовательно, 1 исполнитель назначается на 5-ю работу, 2→2, 3→3, 4→1, 5→4.

# Задача 3-1

Предприятие включает в себя три цеха по производству различной продукции и использует при этом четыре вида первичных ресурсов. Продукция, выпускаемая каждым цехом, частично отгружается за пределы предприятия (для удовлетворения конечного спроса), а частично распределяется внутри предприятия между цехами в качестве вторичных ресурсов. Баланс предприятия в натуральном выражении за прошедший год приведен в следующих двух таблицах 3.1.1 и 3.1.2:

Таблица 3.1.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Производство  товаров | Внутреннее потребление | | | Конечный  спрос |
| цех 1 | цех 2 | цех 3 |
| цех 1 | 240 | 72 | 140 | 348 |
| цех 2 | 80 | 264 | 180 | 76 |
| цех 3 | 0 | 120 | 400 | 480 |

Таблица 3.1.2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Первичные  ресурсы | Расходы ресурса за год | | |
| цех 1 | цех 2 | цех 3 |
| А | 180 | 30 | 50 |
| Б | 1200 | 1500 | 0 |
| В | 400 | 1200 | 300 |
| Г | 160 | 600 | 1000 |

ТРЕБУЕТСЯ:

1) найти матрицы коэффициентов прямых товаро-затрат и ресурсо-затрат на основании данных за предыдущий год;

2) найти план полных выпусков продукции каждого цеха на следующий год, обеспечивающих выполнение госзаказа по отгрузке продукции в объемах c1=360, c2=90, c3=450 соответственно;

3)определить необходимый запас первичных ресурсов каждого вида.

РЕШЕНИЕ:

Если обозначить через  полные выпуски продукции каждым цехом, то можно составить следующие соотношения



где – непосредственный натуральный расход продукции *i*-го цеха для обеспечения выпуска всей продукции *j*-го цеха. Числа  называются коэффициентами прямых товаро-затрат. Их можно определить по статистическим данным за предыдущий год, т.е.  Смысл коэффициента  – количество продукции *i*-го цеха, используемое для производства 1 единицы продукции *j*-го цеха.

Аналогично, расход  *k*-го ресурса *j*-м цехом представим в виде

 Тогда коэффициенты  называются коэффициен-тами прямых ресурсо-затрат. Они определяют количество *k*-го ресурса, необходимое для производства единицы продукции *j*-го цеха и находятся по результатам статистических данных за предыдущий год.

1. Для определения коэффициентов  найдем полные выпуски продукции каждым цехом за предыдущий год хj:

x1 = 240 + 72 + 140 + 348 = 800;

x2 = 80 + 264 + 180 + 76 = 600;

x3 = 0 + 120 + 400 + 480 = 1000;

Тогда матрицы *A* и *B* коэффициентов  и  принимают вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 240 |  | 72 |  | 140 |  |  | 0.30 |  | 0.12 |  | 0.14 |  |
|  | 800 |  | 600 |  | 1000 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 0.10 |  | 0.44 |  | 0.18 | , |
| A= | 80 |  | 264 |  | 180 | = |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 800 |  | 600 |  | 1000 |  |  | 0.00 |  | 0.20 |  | 0.40 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  | 120 |  | 400 |  |
|  | 800 |  | 600 |  | 1000 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 180 |  | 30 |  | 50 |  |  | 0.23 |  | 0.05 |  | 0.05 |  |
|  | 800 |  | 600 |  | 1000 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 1.50 |  | 2.50 |  | 0.00 | , |
| B= | 1200 |  | 1500 |  | 0 | = |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 800 |  | 600 |  | 1000 |  |  | 0.50 |  | 2.00 |  | 0.30 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 400 |  | 1200 |  | 300 |  |  | 0.20 |  | 1.00 |  | 1.00 |  |
|  | 800 |  | 600 |  | 1000 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 160 |  | 600 |  | 1000 |  |
|  | 800 |  | 600 |  | 1000 |  |

2. Заменяя выражения  найденными коэффициентами  получаем систему уравнений для определения искомых полных выпусков продукции:

|  |  |
| --- | --- |
|  | x1 = 0.30\*x1 + 0.12\*x2 + 0.14\*x3 + 360,  x2 = 0.10\*x1 + 0.44\*x2 + 0.18\*x3 + 90,  x3 = 0.00\*x1 + 0.20\*x2 + 0.40\*x3 + 450. |

Эту систему можно записать в матричной форме  где *E* – единичная матрица, *X* – матрица-столбец из неизвестных, *C* – матрица-столбец из чисел c1=360, c2=90, c3=450. Решая полученное матричное уравнение, найдем полные выпуски продукции. Его решение имеет вид:  Строим обратную матрицу  Для этого найдем алгебраические дополнения  и определитель  для матрицы  Имеем:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,70 |  | -0,12 |  | -0,14 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| Е–A= | -0,10 |  | 0,56 |  | -0,18 | , |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0,00 |  | -0,20 |  | 0,60 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,56 |  | -0,18 |  |  |  |  |  |
| A11= |  |  |  | = | 0,56\*0,60 – (-0,18)\*(-0,20) | = | 0,30 | , |
|  | -0,20 |  | 0,60 |  |  |  |  |  |

Аналогично:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -0,10 |  | -0,18 |  |  |  |  |  | -0,10 |  | 0,56 |  |  |  |
| A12= – |  |  |  | = | 0,06 | , |  | A13= |  |  |  | = | 0,02 | , |
|  | 0,00 |  | 0,60 |  |  |  |  |  | 0,00 |  | -0,20 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -0,12 |  | -0,14 |  |  |  |  |  | 0,70 |  | -0,14 |  |  |  |
| A21= – |  |  |  | = | 0,10 | , |  | A22= |  |  |  | = | 0,42 | , |
|  | -0,20 |  | 0,60 |  |  |  |  |  | 0,00 |  | 0,60 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,70 |  | -0,14 |  |  |  |  |  | -0,12 |  | -0,14 |  |  |  |
| A23= – |  |  |  | = | 0,14 | , |  | A31= |  |  |  | = | 0,10 | , |
|  | -0,10 |  | -0,18 |  |  |  |  |  | 0,56 |  | -0,18 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,70 |  | -0,14 |  |  |  |  |  | 0,70 |  | -0,12 |  |  |  |
| A32= – |  |  |  | = | 0,14 | , |  | A33= |  |  |  | = | 0,38 | , |
|  | -0,10 |  | -0,18 |  |  |  |  |  | -0,10 |  | 0,56 |  |  |  |

При этом ∆ = 0,70\*0,30 – 0,12\*0,06 – 0,14\*0,02 = 0,20,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1,5 |  | 0,5 |  | 0,5 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| = | 0,3 |  | 2,1 |  | 0,7 | , |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0,1 |  | 0,7 |  | 1,9 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Умножая матрицу на *C*, найдем искомые полные выпуски продукции:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х1 |  | 1,5 |  | 0,5 |  | 0,5 |  | 360 |  | 1,5\*360 | + | 0,5\*90 | + | 0,5\*450 |  | 810 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| х2 | = | 0,3 |  | 2,1 |  | 0,7 | \* | 90 | = | 0,3\*360 | + | 2,1\*90 | + | 0,7\*450 | = | 612 | , |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| х3 |  | 0,1 |  | 0,7 |  | 1,9 |  | 450 |  | 0,1\*360 | + | 0,7\*90 | + | 1,9\*450 |  | 954 |  |

То есть, х1 = 810, х2 = 612, х3 = 954.

3. При определении запаса  *k*-го вида ресурсов, необходимого для производства найденных полных выпусков продукции, достаточно умножить матрицу ресурсо-затрат *B* на матрицу-столбец из полных выпусков продукции:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| b1 |  | 0,23 |  | 0,05 |  | 0,05 |  |  |  | 0,23\*810 | + | 0,05\*612 | + | 0,05\*954 |  | 264,6 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 810 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| b2 |  | 1,50 |  | 2,50 |  | 0,00 |  |  |  | 1,50\*810 | + | 2,50\*612 | + | 0,00\*954 |  | 2745,0 |  |
|  | = |  |  |  |  |  | \* | 612 | = |  |  |  |  |  | = |  | , |
| b3 |  | 0,50 |  | 2,00 |  | 0,30 |  |  |  | 0,50\*810 | + | 2,00\*612 | + | 0,30\*954 |  | 1915,2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 954 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| b4 |  | 0,20 |  | 1,00 |  | 1,00 |  |  |  | 0,20\*810 | + | 1,00\*612 | + | 1,00\*954 |  | 1728,0 |  |

То есть запас ресурса  следует иметь в количестве  264,6 ед., ресурса  – в количестве  2745 ед., ресурса  – в количестве  1915,2 ед., ресурса  – в количестве  1728 ед.

**Задача 4-2**

Урожайность пшеницы зависит от количества внесенных удобрений и погодных условий. Фермер может вносить на 1 гектар ,  или  центнеров удобрений. Погодные условия характеризуются тремя состояниями: ,  и . Урожайность пшеницы с одного гектара составляет  центнеров при внесении  центнеров удобрений и состоянии погоды . Рыночная цена на зерно составляет  ден. ед., если было внесено  ц/га удобрений. Стоимость одного центнера удобрений составляет *S* ден. ед.

Требуется определить, какое количество удобрений следует вносить в почву, чтобы получить как можно большую прибыль, если: а) известны вероятности  состояний природы ; б) о вероятностях состояний природы ничего определенного сказать нельзя.

*Указание. Составить платежную матрицу, рассчитав значении прибыли по формуле:*  , .

Исходные данные:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а1 | а2 | а3 | с1 | с2 | с3 | b11 | b12 | b13 | b21 | b22 | b23 | b31 | b32 | b33 | S | p1 | p2 | p3 | λ |
| 2 | 4 | 6 | 9 | 5 | 3 | 5 | 9 | 6 | 10 | 12 | 9 | 13 | 15 | 11 | 4 | 0,3 | 0,4 | 0,3 | 0,8 |

РЕШЕНИЕ:

Одним из участников рассматриваемой ситуации является фермер, который должен вносить удобрения в почву для получения хорошего урожая пшеницы. Если описанной ситуации придать игровую схему, то фермер выступит в ней в качестве сознательного игрока А, заинтересованного в максимизации прибыли с 1 гектара земли. Вторым участником является в буквальном смысле природа (игрок П), то есть внешние природные условия.

Так как фермер на 1 гектар земли может вносить разное количество центнеров удобрений, то чистыми стратегиями игрока А будут следующие стратегии:

– А1: вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли;

– А2: вносить 4 ц. удобрений на 1 гектар земли;

– А3: вносить 6 ц. удобрений на 1 гектар земли.

Природа может реализовать одно из трех состояний: П1, П2, П3.

Таким образом, платежная матрица игры будет иметь размер 3х3.

Вычисляем значении прибыли по формуле: , .

h11 = 9\*5 – 4\*2 = 37; h23 = 5\*9 – 4\*4 = 29;

h12 = 9\*9 – 4\*2 = 73; h31 = 3\*13 – 4\*6 = 15;

h13 = 9\*6 – 4\*2 = 46; h32 = 3\*15 – 4\*6 = 21;

h21 = 5\*10 – 4\*4 = 34; h33 = 3\*11 – 4\*6 = 9;

h22 = 5\*12 – 4\*4 = 44;

Итак, платежная матрица принимает вид (таблица 4.1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 37 | 73 | 46 |
|  | 34 | 44 | 29 |
|  | 15 | 21 | 9 |

В платежной матрице нет доминируемых стратегий игрока *А*, поэтому матрица не требует упрощений.

а) для определения оптимальной стратегии игрока *А* *по критерию Байеса* вычислим среднее значение (математическое ожидание) выигрыша при использовании каждой из возможных стратегий по формуле:  . Получаем:

= 37\*0,3 + 73\*0,4 + 46\*0,3 = 54,1;

= 34\*0,3 + 44\*0,4 + 29\*0,3 = 36,5;

= 15\*0,3 + 21\*0,4 + 9\*0,3 = 15,6.

Оптимальной по критерию Байеса является стратегия , так как именно ей соответствует наибольшее из чисел :



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| max | { | 54.1 | ; | 73 | ; | 46 | } | = | 73 ; |

Таким образом, располагая информацией о возможных состояниях природы, наиболее выгодным для фермера будет использование стратегии А1 – вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли. Среднее значение ожидаемой прибыли в этом случае составит 54,1 ден. ед.

б) для определения оптимальной стратегии игрока *А* с использованием *максимаксного критерия*, применим формулу:  .

Получаем:

m1 = {37; 73; 46} = 73;

m2 = {34; 44; 29} = 44;

m3 = {15; 21; 9} = 21;

Оптимальной по максимаксному критерию является стратегия , так как именно ей соответствует наибольшее из чисел :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| max | { | 73 | ; | 44 | ; | 21 | } | = | 73 ; |

Таким образом, в расчете на самое благоприятное стечение обстоятельств, наиболее выгодным для домовладельца будет использование стратегии  – вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли. Прибыль, потраченная при этом от продажи зерна, составит 73 ден. ед.

Определим оптимальную стратегию игрока *А* по *критерию Вальда*:

w1 = min {37; 73; 46} = 37;

w2 = min {34; 44; 29} = 29;

w3 = min {15; 21; 9} = 9.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| max | { | 37 | ; | 29 | ; | 9 | } | = | 37 ; |

Следовательно, оптимальной по критерию Вальда является стратегия  – вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли. При этом минимальная прибыль составит 37 ден. ед.

Для определения оптимальной стратегии игрока *А* с использованием *критерия Сэвиджа* составим матрицу рисков. В каждом столбце платежной матрицы определим максимальный элемент и вычтем из него все элементы данного столбца. В первом столбце максимальным является элемент h11 = 37, во втором – h12 = 73, в третьем – h13 = 46.

Матрица рисков представлена в таблице 4.2.

Таблица 4.2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 |
|  | 3 | 29 | 17 |
|  | 22 | 52 | 37 |

Определим максимальный риск при использовании каждой стратегии.

Получаем:

r1 = max {0; 0; 0} = 0,

r2 = max {3; 29; 17} = 29,

r3 = max {22; 52; 37} = 52.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| min | { | 0 | ; | 29 | ; | 52 | } | = | 0 ; |

Таким образом, оптимальной по Сэвиджу является стратегия  – вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли.

Для определения оптимальной стратегии по *критерию Гурвица* найдем показатель критерия по формуле , .

Получаем:

γ1 = 0,8\*37 + (1 – 0,8)\*73 = 44,2;

γ2 = 0,8\*29 + (1 – 0,8)\*44 = 32,0;

γ3 = 0,8\*9 + (1 – 0,8)\*21 = 11,4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| max | { | 44,2 | ; | 32,0 | ; | 11,4 | } | = | 44,2 ; |

Следовательно, оптимальной является стратегия  – вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли.

Для определения оптимальной стратегии игрока *А* с использованием *критерия Лапласа* определим средние арифметические значения «выигрыша» домовладельца по формуле  , .

Получаем:

 = (37 + 73 + 46)/3 = 156/3 = 52;

 = (34 + 44 + 29)/3 = 107/3 = ;

= (15 + 21 + 9)/3 = 45/3 = 15.

Оптимальной по критерию Лапласа является стратегия  – вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли, так как ей соответствует наибольшее из чисел :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| max | { | 52 | ; |  | ; | 15 | } | = | 52 ; |

Таким образом, если все состояния природы представляются равновозможными, то для обеспечения средней прибыли в размере 52 ден. ед. фермеру следует придерживаться стратегии  – вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли.

Для наглядности все результаты вычислений приведем в сводной таблице 4.3.

Таблица 4.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 37 | 73 | 46 | 54,1 | 73 | 37 | 0 | 44,2 | 52 |
|  | 34 | 44 | 29 | 36,5 | 44 | 29 | 29 | 32,0 |  |
|  | 15 | 21 | 9 | 15,6 | 21 | 9 | 52 | 11,4 | 15 |

*Вывод:* Проведенное по совокупности статистических критериев исследование возможных вариантов внесения удобрений на 1 гектар земли позволяет сделать следующее заключение:

а) при наличии достоверной информации о состоянии природы фермеру следует вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли (стратегия ). При этом ожидаемая прибыль составит 54,1 ден. ед.

б) при отсутствии информации о состоянии природы фермеру также следует вносить 2 ц. удобрений на 1 гектар земли (стратегия ). Такое решение продиктовано на основании всех критериев, не использующих вероятностный подход. Заметим, что максимальная прибыль при выборе данной стратегии составит 37 ден. ед. при самых неблагоприятных погодных условиях.

# Задача 5-2

Для реконструкции и модернизации производства выделены денежные средства в объеме 100 тыс. ден. ед., которые следует распределить между четырьмя цехами. По каждому из цехов известен возможный прирост  выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы *x* ≤ 100.000 (возможные значения *x* и  приведены в таблице). Необходимо так распределить средства, чтобы максимально увеличить выпуск продукции производства в целом.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ЦЕХ № 1 | | | | | | ЦЕХ № 2 | | | | | |
| x | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | x | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|  | 9 | 17 | 29 | 38 | 47 |  | 11 | 34 | 46 | 53 | 75 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ЦЕХ № 3 | | | | | | ЦЕХ № 4 | | | | | |
| x | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | x | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|  | 13 | 28 | 37 | 49 | 61 |  | 12 | 35 | 40 | 54 | 73 |

ТРЕБУЕТСЯ:

1. Основываясь на принципах динамического программирования, построить математическую модель поставленной задачи в виде функциональных уравнений Беллмана (числовые данные взять из таблиц).

2. Найти оптимальное распределение средств, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции.

PЕШЕHИЕ.

1. Системой ***S*** в данном случае является предприятие из 4-х цехов, в которое вложена сумма 100.000 ед*.* Состояния и управления системы ***S***однозначно взаимосвязаны – это способы распределения суммы между цехами. Для осуществления инвариантного погружения задачи будем считать, что вместо суммы 100.000 ед. вкладывается сумма *y*: 0≤*у*≤100.000. Состояния системы искусственно разобьем на этапы: начальный (нулевой), первый, второй и третий этапы соответственно означают, что сумма *y* распределяется между четырьмя цехами, тремя цехами, двумя цехами и вся сумма *y* выделяется одному цеху. Нумерацию этапов удобнее проводить в обратном порядке: третий этап – *m =* 1,второй этап – *m =* 2, первый этап – *m =* 3, нулевой этап – *m =* 4. Тогда функция Беллмана, имеющая смысл максимальной прибыли при распределении суммы *y* между *m* цехами, запишется в виде:



Если при *m* = 1 … *k*–1 функция *B*(*y*, *m*) уже построена, то функциональное уравнение Беллмана для данной задачи принимает вид:



Пpи *m* = 1 дополнительно имеем:



2. При *m* = 1 функция Беллмана уже построена, т.е.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
| B(y, 1) | 9 | 17 | 29 | 38 | 47 |

При *m* = 2 уравнение из функционального уравнения Беллмана имеет вид:



Так как функции  и  заданы таблично, то для определения максимума функции  при каждом *y* составляем таблицу значений этой функции:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x  y | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | B(y, 2) |  |
| 20 | 0 + 9 | 11 + 0 |  |  |  |  | 11 | 20 |
| 40 | 0 + 17 | 11 + 9 | 34 + 0 |  |  |  | 34 | 40 |
| 60 | 0 + 29 | 11 + 17 | 34 + 9 | 46 + 0 |  |  | 46 | 60 |
| 80 | 0 + 38 | 11 + 29 | 34 + 17 | 46 + 9 | 53 + 0 |  | 55 | 60 |
| 100 | 0 + 47 | 11 + 38 | 34 + 29 | 46 + 17 | 53 + 9 | 75 + 0 | 75 | 100 |

Подчеркнутые значения являются максимальными в строке, т.е. являются значениями функции Беллмана *B*(*y*, 2). Они выписаны в предпоследнем столбце. В последний столбец выписаны значения *x*, при которых достигается максимум функции  Эти значения обозначены  и их можно считать управлениями. Смысл  – средства, выделяемые второму цеху, при оптимальном распределении суммы *y* между двумя цехами.

Аналогично, при *m* = 3



Составляем таблицу значений функции 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x  y | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | B(y, 3) |  |
| 20 | 0 + 11 | 13 + 0 |  |  |  |  | 13 | 20 |
| 40 | 0 + 34 | 13 + 11 | 28 + 0 |  |  |  | 34 | 0 |
| 60 | 0 + 46 | 13 + 34 | 28 + 11 | 37 + 0 |  |  | 47 | 20 |
| 80 | 0 + 55 | 13 + 46 | 28 + 34 | 37 + 11 | 49 + 0 |  | 62 | 40 |
| 100 | 0 + 75 | 13 + 55 | 28 + 46 | 37 + 34 | 49 + 11 | 61 + 0 | 75 | 0 |

Как и выше  – сумма средств, выделяемых третьему цеху, при оптимальном распределении суммы *y* между тремя цехами.

При *m* = 4



Составляем таблицу значений функции 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x  y | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | B(y, 4) |  |
| 20 | 0 + 13 | 12 + 0 |  |  |  |  | 13 | 0 |
| 40 | 0 + 34 | 12 + 13 | 35 + 0 |  |  |  | 35 | 40 |
| 60 | 0 + 47 | 12 + 34 | 35 + 13 | 40 + 0 |  |  | 48 | 40 |
| 80 | 0 + 62 | 12 + 47 | 35 + 34 | 40 + 13 | 54 + 0 |  | 69 | 40 |
| 100 | 0 + 75 | 12 + 62 | 35 + 47 | 40 + 34 | 54 + 13 | 73 + 0 | 82 | 40 |

В двух последних столбцах этой таблицы получены значения функции Беллмана *B*(*y*, 4) и соответствующие им управления  – т.е. количества средств, выделяемых четвертому цеху при распределении суммы *y* между четырьмя цехами. После этого составляем сводную таблицу значений функции Беллмана и соответствующих ей управлений:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 20 | 9 | 20 | 11 | 20 | 13 | 0 | 13 |
| 40 | 40 | 17 |  | 34 | 0 | 34 | 40 | 35 |
| 60 | 60 | 29 | 60 | 46 |  | 47 | 40 | 48 |
| 80 | 80 | 38 | 60 | 55 | 40 | 62 | 40 | 69 |
| 100 | 100 | 47 | 100 | 75 | 0 | 75 |  | 82 |

С помощью таблицы функции Беллмана для данной задачи можно произвести распределение любой суммы *у* от 0 до 100 между *k* цехами 1 ≤ k ≤ 4. В клетке  стоит максимальная прибыль от этого распределения, а в клетке  стоит сумма, выделяемая *k*-му цеху. Распределим сумму 100 между 4-мя цехами. По клетке  максимально возможная прибыль равна 82. 4-му цеху следует выделить 40 тыс. $. На первые три цеха остается 60 тыс. $. По клетке  3-му цеху выделяется 20 тыс. $. На первые два цеха остается 40 тыс. $. По клетке  2-му цеху выделяется 40 тыс. $. Тогда 1-му цеху средства не выделяются.