1. Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. Ед., а улучшенный – 4 ден. Ед. какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум, и почему?

Решение:

Условие задачи:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| стоимость | 3 | 4 |  |
| Состав удобрения | Количество удобрений | Необходимый минимум |
| обычное | улучшенное |
| Азотное | 3 | 2 | 10 |
| Фосфорное | 4 | 6 | 20 |
| Калийное | 1 | 3 | 7 |

1 составим математическую модель:

Обозначим через xj количество кг удобрения

x1- количество кг обычного удобрения;

x2- количество кг улучшенного удобрения.

Цель – наименьшая стоимость удобрения,

F= 3x1+4x2 →min

Ограничения:

По азотным удобрениям 3х1+2х2≥10

По фосфорным удобрениям 4х1+6х2≥20

По калийным удобрениям 1х1+3х2≥7

По смыслу х1≥0 х2≥0

Решим графическим способом.

Первое ограничение (по азоту) имеет вид 3х1+2х2≥10 найдем пересечение с осями координат, т. е. 3х1+2х2=10 – l1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х1 | 0 | 10/3 |
| Х2 | 5 | 0 |

0<10, верно, выбираем полуплоскость по направлению к (.) О

Второе ограничение 4х1+6х2=20 – l2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х1 | 0 | 5 |
| Х2 | 10/3 | 0 |

0<20, верно, выбираем полуплоскость по направлению к (.) О

Третье ограничение х1+3х2=7- l3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х1 | 0 | 7 |
| Х2 | 7/3 | 0 |

0<7 верно, выбираем полуплоскость по направлению к (.) О

Для определения направления движения к оптиму построим вектор – градиента Їс (с1;с2), координаты которого являются частными производными целевой функции, т. е. с (3;4).

Построим линию уровня l0, приравняем целевую функцию к 0

3х1+4х2=0

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х1 | 0 | -4 |
| Х2 | 0 | 0 |

Передвигая линию уровня l0 в направлении обратном направлению вектора – градиента, т. к задача на минимум, достигнем минимальную точку целевой функции. Найдем координаты этой точки, решая систему из двух уравнений прямых, дающих в пересечении точку минимума:

(.) А = l1∩l3

3х1+2х2=10, \*3 «-»

4х1+6х2=20

5х1=10

х1=2

Подставим в первое уравнение 3\*2+2х2=10,

2х2=10-6,

2х2=4,

х2=2.

Fmin=3\*2+4\*2=6+8=14 ден. ед.

График:

Ответ: чтобы обеспечить эффективное питание почвы при минимизированной стоимости, которая составила 14 ден ед, необходимо купить 2 набора обычного удобрения и 2 набора улучшенного. Если данную задачу решать на максимум, то задача не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху, т. е Fmax=+∞

2. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| тип сырья | норма расхода сырья на одно изделие | запасы сырья |
| А | Б | В | Г |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 200 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 160 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |  | 170 |
| цена изделия | 5 | 7 | 3 |  |  |

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теории двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

* Проанализировать использования ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
* Определить, как изменяется выручка от реализации продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья 1 и2 вида на 8 и 10 единиц соответственно и уменьшении на 5 единиц запасов сырья 3 вида;
* Оценить целесообразность включения в план изделия Д ценой 10 единиц, на изготовление которой расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Решение:

Сформулируем экономико – математическую модель задачи.

Переменные:

х1- количество единиц продукции А,

х2- количество единиц продукции Б,

х3- количество единиц продукции В,

х4- количество единиц продукции Г.

Целевая функция: F=5х1+7х2+3х3+6х4 →max,

Цель максимизировать выручку от реализации готовой продукции

Ограничение:

По 1 типу ресурса: 2х1+х2+3х3+2х4≤200,

По 2 типу ресурса: х1+2х2+4х3+8х4≤160,

По 3 типу ресурса: 2х1+4х2+х3+х4≤170,

По смыслу х1;х2;х3;х4 ≥0.

Решение задачи выполним с помощью надстройки Excel Поиск Решения. Выбираем результат поиска решения в форме **отчета Устойчивости.**

Полученное решение означает, что максимальную выручку 460 ден ед, можем получит при выпуски 80 ед продукции А и 10 ед продукции Г. При это ресурсы 2 и 3 типа будут использоваться полностью, а из 200 ед сырья 1 типа будет использоваться 180 ед сырья.

Сформулируем экономико–математическую модель двойственной задачи

Переменные:

у1- двойственная оценка ресурса 1 типа, или цена 1 ресурса,

у2- двойственная оценка ресурса 2 типа, или цена 2 ресурса,

у3- двойственная оценка ресурса 3 типа, или цена 3 ресурса.

Целевая функция двойственной задачи: необходимо найти такие «цены» у на ресурсы, чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной. G=b1\*y1+b2\*y2+…→min

G=200у1+160у2+170у3→min

Ограничения:

Вы исходной задачи четыре переменных, следовательно в двойственной задаче четыре ограничения.

a11\*y1+a12\*y2+…≥c1

a12\*y1+a22\*y2+…≥c2

по виду продукции А: 2у1+у2+2у3≥5,

по виду продукции Б: у1+2у2+4у3≥7,

по виду продукции В: 3у1+4у2+у3≥3,

по виду продукции Г: 2у1+8у2+у3≥6

по смыслу у1; у2; у3≥0

Найдем оптимальный план двойственной задачи, используя теоремы двойственности:

По 2 теореме- yi\*(∑aij\*xj-bi)=0 и xj(∑aij\*yi-cj)=0,

у1\*(2х1+х2+3х3+2х4-200)=0 → у1(2\*80+0+3\*0+2\*10-200)=0 180<200, то у1=0

у2\*(х1+2х2+4х3+8х4-160)=0 → у2(80+2\*0+4\*0+8\*10-160)=0 ,

у3\*(2х1+4х2+х3+х4-170)=0 → у3\*(2\*80+4\*0+0+10-170)=0.

В нашей задачи х1=80>0 и х4=10>0, поэтому первое и четвертое ограничение двойственной задачи обращаются в равенство:

2у1+у2+2у3=5,

2у1+8у2+у3=6,

у1=0,

у2+2у3=5,

8у2+у3=6,

Выразим через у2=5-2у3,

8\*(5-2у3)+у3=6,

40-16у3+у3=6

-15у3=-34,

у3=34/15,

у2=5-2\*34/15=7/15,

у1=0; у2=7/15; у3=34/15

G=200\*0+160\*7/15+170\*34/15=460

Проверим выполняемость первой теоремы двойственности:

Fmax=Gmin=460

В нашей задачи в план выпуска не вошла продукция Б и В, потому что затраты по ним превышают цену на 3 ден ед (10-7=3) и 1,133 ден ед (4,1333-3=1,133) соответственно.

Подставим в ограничения двойственной задачи оптимальные значения у:

2\*0+7/15+2\*34/15=5=5,

0+2\*7/15+4\*34/15=10≥7,

3\*0+4\*7/15+34/15=4,133≥3,

2\*0+8\*7/15+34/15=6=6.

Так как запас ресурсов 1, 2 типа сырья изменяться на 8 и 10 единицы (увеличиться) и 3 типа уменьшаться на 5 единиц. Из теоремы об оценках известно, что колебание величины bi приводит к увеличению или уменьшению F.

F=∆bi\*yi

F=8\*0+10\*7/15+(-5)\*34/15=-6,667, следовательно, увеличение запасов ресурсов 1 и 2 типа на 8 и 10 ед. и уменьшение 3 типа на 5 ед приведет к уменьшению значения целевой функции на -6,667 ден ед.

По условию задачи для изготовления изделия Д используется:

Сырье 1 типа а\*1=2,

Сырье 2 типа а\*2=2,

Сырье 3 типа а\*3=2

Ожидаемая прибыль от данного изделия Д с\*=10 ден ед.

Для оценки целесообразности продукта Д, рассчитаем чистый доход

е=с\*-∑а\*i\*yi

е=10-(2\*0+2\*7/15+2\*34/15)=4,533

следовательно, целесообразно включать в план изделие Д, т.к. е=4,533>0.

3. Промышленная группа предприятий (холдинг) выпускает продукцию трех видов, при этом каждое из трех предприятий группы специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется на выпуске продукции первого вида, второе предприятие – продукции второго вида, третье предприятие – продукции третьего вида. Часть выпускаемой продукции потребляется предприятиями холдинга (идет на внутреннее потребление) остальная часть поставляется за его пределы (внешним потребителями, является конечным продуктом). Специалистами управляющей компании получены экономические оценки aij(i=1,2,3; j=1,2,3) элементов технологической матрицы А (норм расхода, коэффициентов прямых материальных затрат) и элементов уi вектора конечной продукции У.

Требуется:

1. Проверить продуктивность технологической матрицы А=(аij) (матрицы коэффициентов прямых материальных затрат).
2. Построить баланс (заполнить таблицу) производства и распределения продукции предприятий холдинга.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| предприятия | коэффициенты прямых затрат | конечный продукт |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 150 |
| 2 | 0 | 0,1 | 0,2 | 180 |
| 3 | 0,1 | 0 | 0,1 | 100 |

Решение:

Найдем продуктивность А с помощью достаточного условия ||A||max(0,3;0,2;0,5)=0,5<1

Следовательно матрица А продуктивна

Подготовим таблицу матричного баланса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| предприятия |  |  |  | конечный | валов. пр |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 50,22293 | 23,08917 | 27,80255 | 150 | 251,1146 |
| 2 | 0 | 23,08917 | 27,80255 | 180 | 230,8917 |
| 3 | 25,11146 | 0 | 13,90127 | 100 | 139,0127 |
| усл. ч. пр. | 175,7803 | 184,7134 | 69,50637 | 430=430 |  |
| вал. вып | 251,1146 | 230,8917 | 139,0127 |  | 621,0191=621,0191 |

Используем соотношение Х=(Е-А)’\*У, полученное в соответствие модели Леонтьева для определения валового выпуска для этого найдем: (Е-А)’ – матрицу полных затрат (Е – единичная матрица),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 0 | 0 |
| Е = 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
|  |  |  |
|  | 1 | 0 | 0 |  | 0,2 | 0,1 | 0,2 |  | 0,8 | -0,1 | -0,2 |
| Е-А= | 0 | 1 | 0 | - | 0 | 0,1 | 0,2 | = | 0 | 0,9 | -0,2 |
|  | 0 | 0 | 1 |  | 0,1 | 0 | 0,1 |  | -0,1 | 0 | 0,9 |

Найдем обратную матрицу (Е-А)’ используя функцию в Excel (fx/математическая/МоБР),

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1,289809 | 0,143312 | 0,318471 |
| (Е-А)’= | 0,031847 | 1,11465 | 0,254777 |
|  | 0,143312 | 0,015924 | 1,146497 |

Найдем величины валовой продукции, используя в Excel (fx/математическая/МУМНОЖ)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,289809 | 0,143312 | 0,318471 |  | 150 |  | 251,1146 |
| (E-A)’\*Y= | 0,031847 | 1,11465 | 0,254777 | \* | 180 | = | 230,8917 |
|  | 0,143312 | 0,015924 | 1,146497 |  | 100 |  | 139,0127 |

Рассчитаем величины производственных затрат по формуле

Xij=aij\*xj

aij- технологическая матрица

xj-строка валового выпуска,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х11=0,2\*251,1146=50,22293 | Х12=0,1\*230,8917=23,08917 | Х13=0,2\*139,0127=27,80255 |
| Х21=0\*251,1146=0 | Х22=0,1\*230,8917=23,08917 | Х23=0,2\*139,0127=27,80255 |
| Х31=0,1\*251,1146=25,11146 | Х32=0\*230,8917=0 | Х33=0,1\*139,0127=13,90127 |

|  |
| --- |
| Для расчета величин условно чистой продукции используем соотношение баланса для производства:Z=xj-∑xij |
| xij – по столбцуZ1=251.1146-(50.22293+0+25.11146)=175.7803Z2=230.8917-(23.08917+23.08917+0)=184.7134Z3=139.0127-(27.80255+27.80255+13.90127)=69.50637 |

Проверим баланс конечной и условно чистой продукции

∑YI=∑ZJ , ∑Xi=∑Xj,

Z=175.7803+184.7134+69.50637=430 =Y=150+180+100=430

Xi=251.1146+230.8917+139.0127=621.0191=Xj=251.1146+230.8917+139.0127=621.0191

Заполняем таблицу, подготовленную выше, матричного баланса полученными данными.

4. В течение девяти последовательных недель фиксировался спрос У(t) (млн. руб.) на кредитные ресурсы финансовой компании. Временной ряд Y(t) этого показателя приведен в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Недели | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Спрос на кредитные ресурсы | 3 | 7 | 10 | 11 | 15 | 17 | 21 | 25 | 23 |

Требуется:

1. Проверить наличие аномальных наблюдений.

2. Построить линейную модель Y(t)=a0+a1t параметры которой оценить МНК (Y(t) – расчетные, смоделированные значения временного ряда).

3. Оценить адекватность построенных моделей, используя свойства независимости остаточной компоненты, случайности и соответствия нормальному закону распределения (при использовании R\S- критерия взять табулированные границы 2,7-3,7).

4. Оценить точность моделей на основе использования средней относительной ошибки аппроксимации.

5. По двум построенным моделям осуществить прогноз спроса на следующие две недели (доверительный интервал прогноза рассчитывать при доверительной вероятности р=70%)

6. Фактические значения показателя, результаты моделирования и прогнозирования представить графически.

Решение:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Недели | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Спрос на кредитные ресурсы | 3 | 7 | 10 | 11 | 15 | 17 | 21 | 25 | 23 |

Построим график:

Проверим на анормальность - 9 неделю, у9=23

Оставшиеся наблюдения

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Недели | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Спрос на кредитные ресурсы | 3 | 7 | 10 | 11 | 15 | 17 | 21 | 25 |

Для оставшихся рассчитаем: уср - среднее значение; Sy – средне квадратичное отклонение, используя функции Excel;

Вычислим статистику Стьюдента – tнаб=| y\*-yср|/Sy

уср= 13,625 (fx/статистические/СРЗНАЧ)

Sy= 6,836254457 (fx/статистическая/СТАНДОТКЛОН)

При L=5%, K=n-2=9-2=7,

tкр= 2,36462256 (fx/статистическая/СТЬЮДРАСПОБР)

tнаб= |23-13,625|/6,84=1,371364986

tнаб=1,37<tкр=2,36

Следовательно, наблюдаемое у9 не является аномальной и не требует замены.

С помощью программы РЕГРЕССИИ (в Excel сервис/анализ данных/РЕГРЕССИЯ) рассчитаем и получим:

|  |  |
| --- | --- |
| Регрессионная статистика |  |
| Множественный R | 0,983716989 |
| R-квадрат | 0,967699115 |
| Нормированный R-квадрат | 0,963084703 |
| Стандартная ошибка | 1,444200224 |
| Наблюдения | 9 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Дисперсионный анализ |  |  |  |
|  | df | SS | MS | F | Значимость F |
| Регрессия | 1 | 437,4 | 437,4 | 209,7123 | 1,78531E-06 |
| Остаток | 7 | 14,6 | 2,085714286 |  |  |
| Итого | 8 | 452 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | P-Значение | Нижние 95% | Верхние 95% | Нижние 95,0% | Верхние 95,0% |
| Y-пересечение | 1,166667 | 1,049187 | 1,111971949 | 0,302876 | -1,31426491 | 3,648 | -1,3143 | 3,6475982 |
| Переменная X 1 | 2,7 | 0,186445 | 14,48144774 | 1,79E-06 | 2,259126889 | 3,141 | 2,25913 | 3,1408731 |

|  |
| --- |
| ВЫВОД ОСТАТКА |
|  |  |  |
| Наблюдение | Предсказанное Y | Остатки |
| 1 | 3,866667 | -0,866666667 |
| 2 | 6,566667 | 0,433333333 |
| 3 | 9,266667 | 0,733333333 |
| 4 | 11,96667 | -0,966666667 |
| 5 | 14,66667 | 0,333333333 |
| 6 | 17,36667 | -0,366666667 |
| 7 | 20,06667 | 0,933333333 |
| 8 | 22,76667 | 2,233333333 |
| 9 | 25,46667 | -2,466666667 |

Модель построена, ее уравнение уt=a+b\*t, t-момент времени, уt- теоретическое моделирование значения У, а,b- коэффициенты модели

a=1.166666667, b=2.7, следовательно уt=1,166666667+2,7t

коэффициент регрессии b=2,7, т. е. с каждым годом спрос на кредитные ресурсы финансовой компании в среднем возрастают на 2,7 млн. руб.

Рассмотрим столбец Остатки и построим с помощью «мастер диаграмм» в Excel график остатков:

1 подсчитаем количество поворотных точек р для рядов остатков – р=5

2 критическое количество определим формулой - ркр=[2\*(n-2)/3-1,96\*√16\*n-29/90]

[ ] – целая часть; n- количество исходных данных

ркр=[2\*(9-2)/3-1,96\*√16\*9-29/90]=2,451106=2

3 сравним фактическое р с ркр

р=5 > ркр=2 следовательно, свойство случайности выполняется.

Для проверки независимости уровней ряда остатков:

1 вычислим d- статистику (критерий Дарбина – Уотсона)

2 вычислить первый коэффициент автокорреляции r(1)

для расчетов подготовим –

∑e2(t) = 14,6 - используем Excel fx/математическая/СУММКВ),

∑(e(t)-e(t-1))2 = 32,32– используем Excel fx/математическая/СУММКВРАЗН) – 1 массив кроме 1-го, 2 массив кроме последнего.

d=∑(e(t)-e(t-1))2 / ∑e2(t) = 32,32/14,6=2,213699

По таблице Значения d-критерия Дарбина – Уотсона определим, что d1= 1,08 и d2= 1,36

Т.е. наше d=2,213699 € (1.08;1,36), следовательно нужна дополнительная проверка, найдем d’=4-d=4-2,213699=1,786301, т.е d’ € (1,36;2)

**не выпол-ся доп. Прове-ка выпол-ся d’=4-d**

0 d1  d2  2 4 d

следовательно, свойство независимости уровней ряда остатков выполняются, остатки независимы.

Для проверки нормального распределения остатков вычислим R/S – статистику

R/S=emax-emin / Se

еmax- максимальный уровень ряда остатков,

еmin- минимальный уровень ряда остатков,

S- среднеквадратичное отклонение.

еmax=2,2333333 используем Excel fx/статистическая/МАКС),

еmin=-2,466666667 используем Excel fx/статистическая/МИН),

Se=1,444200224 1-я таблица Итогов регрессии строка «стандартная ошибка»

Следовательно, R/S=2,2333333 - (-2,466666667)/ 1,444200224=3,254396

Критический интервал (2,7;3,7), т.е R/S=3,254396 € (2,7;3,7), свойство нормального распределения остатков выполняется.

Подводя итоги проверки можно сделать вывод, что модель ведет себя адекватно.

Для оценки точности модели вычислим среднюю относительную ошибку аппроксимации Еотн = |e(t)/Y(t)|\*100% по полученным значениям определить среднее значение (fx/математическая/СРЗНАЧ)

|  |
| --- |
| относит. погр-ти |
| 28,88888889 |
| 6,19047619 |
| 7,333333333 |
| 8,787878788 |
| 2,222222222 |
| 2,156862745 |
| 4,444444444 |
| 8,933333333 |
| 10,72463768 |

Eотн ср =8,853564 – хороший уровень точности модели

Для вычисления точечного прогноза в построенную модель подставим соответствующие значения t=10 и t=11:

у10=1,166666667+2,7\*10=28,16666667

у11=1,166666667+2,7\*11= 30,86666667,

Ожидаемый спрос на кредитные ресурсы финансовой компании на 10 неделю должен составить около 28,16666667 млн. руб., а на 11 неделю около 30,86666667 млн. руб.

При уровне значимости L=30%, доверительная вероятность равна 70%, а критерий Стьюдента при к=n-2=9-2=7, равен

tкр(30%;7)=1,119159 (fx/статистическая/СТЬЮДРАСПОБР),

Se=1,444200224 1-я таблица Итогов регрессии строка «стандартная ошибка»,

t’ср = 5(fx/математическая/СРЗНАЧ)- средний уровень по рассматриваемому моменту времени,

∑(t-t’ср)=60 (fx/статистическая/КВАДРОТКЛ),

Ширину доверительного интервала вычислим по формуле:

U1=t\*Se\*√1+1/n+(t\*-t’)2/∑(t-t’ср)= 1,119159\*1,444200224\*√1+1/9+(10-5)2/60=1,997788

U2=t\*Se\*√1+1/n+(t\*-t’)2/∑(t-t’ср)=1,119159\*1,444200224\*√1+1/9+(11-5)2/60= 2,11426

Далее вычислим верхнюю и нижнюю границы прогноза uниж=y10-u1; uверх=у10+u1;uниж=y11-u1;uверх=у10+u1

uниж=28,16666667-1,997788=26,16888

uверх=28,16666667+1,997788=30,16445

uниж=30,86666667-2,11426=28,75241

uниж=30,86666667+2,11426= 32,98093

Спрос на кредитные ресурсы финансовой компании на 10 неделю в пределах от 26,16888 млн. руб. до 30,16445 млн. руб., а на 11 неделю от 28,75241 млн. руб. до 32,98093 млн. руб.

Строим график:

