1. Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества А и не менее 12 единиц питательного вещества В. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одно животное, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Питательное вещество | Количество питательных веществ в 1 кг корма | |
| 1 | 2 |
| А  В | 2  2 | 1  4 |
| Цена 1 кг корма, тыс. руб. | 0,2 | 0,3 |

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум, и почему?

Решение:

Введем обозначения:

Х1 – количество корма 1 вида;

Х2 – количество корма 2 вида.

Целевая функция – F = 0,2 х1 + 0,3 х2

Ограничения: 2х1+1х2≥6

2х1+4х2≥12

х1, х2≥0

Решим задачу графическим способом

Первое ограничение имеет вид 2х1+1х2≥6, найдем пересечение с осями координат

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х1 | 0 | 3 |
| Х2 | 6 | 0 |

Второе ограничение 2х1+4х2≥12, найдем пересечения с осями координат

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х1 | 0 | 6 |
| Х2 | 3 | 0 |

Для определения направления движения к оптиму построим вектор – градиента Їс (с1;с2), координаты которого являются частными производными целевой функции, т. е. с (0,2;0,3).

Этот вектор показывает направление наискорейшее изменение функции.

Прямая f(х) = 0,2х1 + 0,3х2 = а1, перпендикулярная вектору – градиенту, является линией уровня целевой функции.

Для нахождения координат точки максимума решаем систему

2х1 + х2 = 6

2х1 + 4х2 =12

-3х2 = -6

х2 = 2

2х1+2=6

2х1 =4

х1 =2

Ответ: (2;2)

Fmin = 0,2\*2+0,3\*2=0,4+0,6=1

График:

Ответ: чтобы затраты были минимальными необходимо расходовать 2ед. первого корма и 2 ед. второго корма.

Если данную задачу решать на максимум, то задача не имеет решения, так как целевая функция не ограничена сверху, т. е Fmax=+∞

2. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| тип сырья | норма расхода сырья на одно изделие | | | | запасы сырья |
| А | Б | В | Г |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 180 |
| 2 | 0 | 1 | 3 | 2 | 210 |
| 3 | 4 | 2 | 0 | 4 | 800 |
| цена изделия | 9 | 6 | 4 | 7 |  |

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теории двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

* Проанализировать использования ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
* Определить, как изменяется выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья 2 и 3 видов на 120 и 160 единиц соответственно и уменьшении на 60 единиц запасов сырья 1 вида;
* Оценить целесообразность включения в план изделия Д ценой 12 единиц, на изготовление которой расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Решение:

1. Сформулируем экономико – математическую модель задачи.

Переменные:

х1- количество единиц продукции А,

х2- количество единиц продукции Б,

х3- количество единиц продукции В,

х4- количество единиц продукции Г.

Целевая функция: F=9х1+6х2+4х3+7х4 →max,

Цель максимизировать выручку от реализации готовой продукции

Ограничение:

По 1 типу ресурса: 1х1+0х2+2х3+1х4≤180,

По 2 типу ресурса: 0х1+1х2+3х3+2х4≤210,

По 3 типу ресурса: 4х1+2х2+0х3+4х4≤800,

По смыслу х1;х2;х3;х4 ≥0.

Решение задачи выполним с помощью надстройки Excel Поиск Решения. Выбираем результат поиска решения в форме **отчета Устойчивости.**

Полученное решение означает, что максимальную выручку 2115 ден. ед., можем получит при выпуски 95 ед. продукции А и 210 ед. продукции Б. При этом ресурсы 2 и 3 типа будут использоваться полностью, а из 180 ед. сырья 1 типа будет использоваться 95 ед. сырья.

Сформулируем экономико–математическую модель двойственной задачи

Переменные:

у1- двойственная оценка ресурса 1 типа, или цена 1 ресурса,

у2- двойственная оценка ресурса 2 типа, или цена 2 ресурса,

у3- двойственная оценка ресурса 3 типа, или цена 3 ресурса.

Целевая функция двойственной задачи: необходимо найти такие «цены» у на ресурсы, чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной. G=b1\*y1+b2\*y2+…→min

G=180у1+210у2+800у3→min

В исходной задачи четыре переменных, следовательно в двойственной задаче четыре ограничения.

по виду продукции А: 1у1+0у2+4у3≥9,

по виду продукции Б: 0у1+1у2+2у3≥6,

по виду продукции В: 2у1+3у2+0у3≥4,

по виду продукции Г: 1у1+2у2+4у3≥7

по смыслу у1; у2; у3≥0

2. Найдем оптимальный план двойственной задачи, используя теоремы двойственности:

По 2 теореме- yi\*(∑aij\*xj-bi)=0

у1\*(1х1+0х2+2х3+1х4-180)=0

у2\*(0х1+1х2+3х3+2х4-210)=0

у3(4х1+2х2+0х3+4х4-800)=0

Если х=(95;210;0;0), то

у1(95-180)=0, т.к. 95<180=>у1=0

у2(210-210)=0

у3(4\*95+2\*210-800)=0

хj(∑aij\*уi-cj)=0, если хj>0, то ∑aijуi=cj

х1=95>0=> у1+4у3=9 у3=9/4=2,25

х2=210=> у2+2у3=6 у2=6-2\*9/4=1,5

у1=0 у1=0

Результат: Оптимальный план у=(0;1,5;2,25)

F(х)=2115

G(y)=180\*0+210\*1,5+800\*2,25=315+1800=2115=>первая теорема о двойственности f(х)=g(у) выполняется.

3. Поясним нулевые значения переменных хi в оптимальном плане.

Если ∑ aijуi>сj, то хj=0

У нас х3=0,х4=0=>затраты на изделия В и Г превышают цену (См. отчет по устойчивости в столбце нормируемая стоимость).

4. а) Анализ использования ресурсов в оптимальном плане

Если уi>0, то ∑ aijxj = bi, i=1,….,m,

Если ∑ aijxj < b, то уi =0, i=1,….,m.

У2=1,5; у3=2,25=>сырье 2 и 3 полностью используются в оптимальном плане и являются дефицитными, т.е. сдерживают рост целевой функции.

Сырье 1 используется не полностью 95 из 180 это сырье не влияет на план выпуска продукции, т.е. не ограничивает рост целевой функции, общая стоимость используемых ресурсов g (0;1,5;2,25)=2115.

б) Если запасы сырья изменить 1-120, 2-330, 3-920, то выручка составит 2565 при оптимальном плане (65;330;0;0), остаток сырья 1 типа составит 120-65=55.

в) Если включить в план изделие Д ценой 12 единиц, на изготовление которого расходуется по 2 единицы каждого сырья, то выручка составит 2268 при оптимальном плане (112;142;0;0;34), при этом сырье будет полностью израсходовано.

3. Промышленная группа предприятий (холдинг) выпускает продукцию трех видов, при этом каждое из трех предприятий группы специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется на выпуске продукции первого вида, второе предприятие – продукции второго вида, третье предприятие – продукции третьего вида. Часть выпускаемой продукции потребляется предприятиями холдинга (идет на внутреннее потребление) остальная часть поставляется за его пределы (внешним потребителями, является конечным продуктом). Специалистами управляющей компании получены экономические оценки aij(i=1,2,3; j=1,2,3) элементов технологической матрицы А (норм расхода, коэффициентов прямых материальных затрат) и элементов уi вектора конечной продукции У.

Требуется:

1. Проверить продуктивность технологической матрицы А=(аij) (матрицы коэффициентов прямых материальных затрат).
2. Построить баланс (заполнить таблицу) производства и распределения продукции предприятий холдинга.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| предприятия | коэффициенты прямых затрат | | | конечный продукт |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 180 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 200 |
| 3 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 200 |

Таблица матричного баланса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | конечный | валовый |
| предприятие |  | потребляющие |  | продукт | продукт |
| производящие | 1 | 2 | 3 |  |  |
| 1 | 0 | 33,1 | 72,6 | 180 | 285,7 |
| 2 | 28,5 | 66,2 | 36,3 | 200 | 331 |
| 3 | 57,1 | 33,1 | 72,6 | 200 | 362,8 |
|  |  |  |  |  |  |
| усл чист продукция | 200 | 198,7 | 181,3 | 580 |  |
| валовый продукт | 285,6 | 331,1 | 362,8 |  | 979,5 |

Используем соотношение Х=(Е-А)’\*У, полученное в соответствие модели Леонтьева для определения валового выпуска для этого найдем: (Е-А)’ – матрицу полных затрат (Е – единичная матрица),



Найдем обратную матрицу (Е-А)’ используя функцию в Excel (fx/математическая/МоБР),

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1,0750853 | 0,1706485 | 0,2901024 |
| В=(Е-А)-1 | 0,1706485 | 1,2969283 | 0,2047782 |
|  | 0,2901024 | 0,2047782 | 1,3481229 |

Найдем величины валовой продукции, используя в Excel (fx/математическая/МУМНОЖ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,0750853 | 0,1706485 | 0,2901024 | \* | 180 |  | 285, 66553 |  |
| В=(Е-А)-1\*У | 0,1706485 | 1,2969283 | 0,2047782 |  | 200 |  | =331,05802 |  |
|  | 0,2901024 | 0,2047782 | 1,3481229 |  | 200 |  | 362,79863 |  |

Рассчитаем величины производственных затрат по формуле

Xij=aij\*xj

aij- технологическая матрица

xj-строка валового выпуска,

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | Х11=0,0\*285,66553=0 | Х12=0,1\*331,05802=33,105802 | Х13=0,2\*362,79863=72,559726 | | Х21=0,1\*285,66553=28,566553 | Х22=0,2\*331,05802=66,211604 | Х23=0,1\*362,79863=36,279863 | | Х31=0,2\*285,66553=57,133106 | Х32=0,1\*331,05802=33,105802 | Х33=0,2\*362,79863=72,559726 | |
| Для расчета величин условно чистой продукции используем соотношение баланса для производства:  Z=xj-∑xij |
| xij – по столбцу  Z1=285,66553-(0+28,566553+57,133106)=199,965871  Z2=331,05802-(33,105802+66,211604+33,105802)=198,634812  Z3=362,79863-(72,559726+36,279863+72,559726)=181,399315 |

Проверим баланс конечной и условно чистой продукции

∑YI=∑ZJ , ∑Xi=∑Xj,

Z=199,965871+198,634812 + 181,399315=580 =Y=180+200+200=580

Xi=285,66553+331,05802+362,79863=979,52218=Xj=285,66553+331,05802+

+ 362,79863=979,52218

Заполняем таблицу, подготовленную выше, матричного баланса полученными данными.

4. В течение девяти последовательных недель фиксировался спрос У(t) (млн. руб.) на кредитные ресурсы финансовой компании. Временной ряд Y(t) этого показателя приведен в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Недели | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Спрос на кредитные ресурсы | 43 | 47 | 50 | 48 | 54 | 57 | 61 | 59 | 65 |

Требуется:

1. Проверить наличие аномальных наблюдений.

2. Построить линейную модель Y(t)=a0+a1t параметры которой оценить МНК (Y(t) – расчетные, смоделированные значения временного ряда).

3. Оценить адекватность построенных моделей, используя свойства независимости остаточной компоненты, случайности и соответствия нормальному закону распределения (при использовании R\S- критерия взять табулированные границы 2,7-3,7).

4. Оценить точность моделей на основе использования средней относительной ошибки аппроксимации.

5. Фактические значения показателя, результаты моделирования и прогнозирования представить графически.

Решение:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Недели | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Спрос на кредитные ресурсы | 43 | 47 | 50 | 48 | 54 | 57 | 61 | 59 | 65 |

Построим график:



Проверим на анормальность - 9 неделю, у9=65

Оставшиеся наблюдения

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Недели | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Спрос на кредитные ресурсы | 43 | 47 | 50 | 48 | 54 | 57 | 61 | 59 |

Для оставшихся рассчитаем: уср - среднее значение; Sy – средне квадратичное отклонение, используя функции Excel;

Вычислим статистику Стьюдента – tнаб=| y\*-yср|/Sy

|  |
| --- |
| уср=52,375 |

(fx/статистические/СРЗНАЧ)

Sy= 6,3681686 (fx/статистическая/СТАНДОТКЛОН)

При L=5%, K=n-2=9-2=7,

tкр= 1,8945786 (fx/статистическая/СТЬЮДРАСПОБР)

tнаб= |65-52,375|/6,37=1,9819466

tнаб=1,98>tкр=1,89

Следовательно, наблюдаемое у9 не является аномальной и не требует замены.

С помощью программы РЕГРЕССИИ (в Excel сервис/анализ данных/РЕГРЕССИЯ) рассчитаем и получим:

|  |  |
| --- | --- |
| Регрессионная статистика | |
| Множественный R | 0,970013862 |
| R-квадрат | 0,940926893 |
| Нормированный R-квадрат | 0,932487878 |
| Стандартная ошибка | 1,895064601 |
| Наблюдения | 9 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дисперсионный анализ |  |  |  |  |  |
|  | df | SS | MS | F | Значимость F |
| Регрессия | 1 | 400,4166667 | 400,4166667 | 111,497238 | 1,4929E-05 |
| Остаток | 7 | 25,13888889 | 3,591269841 |  |  |
| Итого | 8 | 425,5555556 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Коэффициенты | | Стандартная ошибка | t-статистика | P-Значение | Нижние 95% | Верхние 95% | Нижние 95,0% | Верхние 95,0% |
| Y-пересечение | 40,8611 | 1,3767325 | 29,6798 | 1,27E-08 | 37,60566 | 44,1166 | 37,6057 | 44,11657 |
| Неделя t | 2,58333 | 0,2446518 | 10,5592 | 1,493E-05 | 2,004824 | 3,16184 | 2,00482 | 3,161843 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ВЫВОД ОСТАТКА | |  |
|  |  |  |
| Наблюдение | Предсказ Спрос Y(t) | Остатки |
| 1 | 43,4444 | -0,4444444 |
| 2 | 46,0278 | 0,9722222 |
| 3 | 48,6111 | 1,3888889 |
| 4 | 51,1944 | -3,1944444 |
| 5 | 53,7778 | 0,2222222 |
| 6 | 56,3611 | 0,6388889 |
| 7 | 58,9444 | 2,0555556 |
| 8 | 61,5278 | -2,5277778 |
| 9 | 64,1111 | 0,8888889 |

Модель построена, ее уравнение уt=a+b\*t, t-момент времени, уt- теоретическое моделирование значения У, а,b- коэффициенты модели

a=40,8611, b=2,6, следовательно уt=40,8611+2,6t

коэффициент регрессии b=2,6, т. е. с каждым годом спрос на кредитные ресурсы финансовой компании в среднем возрастают на 2,6 млн. руб.

Рассмотрим столбец Остатки и построим с помощью «мастер диаграмм» в Excel график остатков:



1. Подсчитаем количество поворотных точек р для рядов остатков – р=5

2. Критическое количество определим формулой - ркр=[2\*(n-2)/3-1,96\*√16\*n-29/90]

[ ] – целая часть; n- количество исходных данных

ркр=[2\*(9-2)/3-1,96\*√16\*9-29/90]=2,451106=2

3 сравним фактическое р с ркр

р=5 > ркр=2 следовательно, свойство случайности выполняется.

Для проверки независимости уровней ряда остатков:

1 вычислим d- статистику (критерий Дарбина – Уотсона)

2 вычислить первый коэффициент автокорреляции r(1)

для расчетов подготовим –

∑e2(t) = 25,14 - используем Excel fx/математическая/СУММКВ),

∑(e(t)-e(t-1))2 = 69,72– используем Excel fx/математическая/СУММКВРАЗН) – 1 массив кроме 1-го, 2 массив кроме последнего.

d=∑(e(t)-e(t-1))2 / ∑e2(t) = 69,72/25,14=2,77327

По таблице Значения d-критерия Дарбина – Уотсона определим, что d1= 1,08 и d2= 1,36

Т.е. наше d=2,77327 € (1.08;1,36), следовательно нужна дополнительная проверка, найдем d’=4-d=4-2,77327=1,22673, т.е d’ € (1,36;2)

следовательно, свойство независимости уровней ряда остатков выполняются, остатки независимы.

Для проверки нормального распределения остатков вычислим R/S – статистику

R/S=emax-emin / Se

еmax- максимальный уровень ряда остатков,

еmin- минимальный уровень ряда остатков,

S- среднеквадратичное отклонение.

еmax=2,055555556 используем Excel fx/статистическая/МАКС),

еmin=-3,194444444 используем Excel fx/статистическая/МИН),

Se=1,895064601 1-я таблица Итогов регрессии строка «стандартная ошибка»

Следовательно, R/S=2,770354107

Критический интервал (2,7;3,7), т.е R/S=2,770354107 € (2,7;3,7), свойство нормального распределения остатков выполняется.

Подводя итоги проверки можно сделать вывод, что модель ведет себя адекватно.

Для оценки точности модели вычислим среднюю относительную ошибку аппроксимации Еотн = |e(t)/Y(t)|\*100% по полученным значениям определить среднее значение (fx/математическая/СРЗНАЧ)

|  |
| --- |
| относит. погр-ти |
| -1,033591731 |
| 2,06855792 |
| 2,777777778 |
| -6,655092593 |
| 0,411522634 |
| 1,1208577 |
| 3,369763206 |
| -4,284369115 |
| 1,367521368 |
| Е ср.отн= | -0,095228093 |

Для вычисления точечного прогноза в построенную модель подставим соответствующие значения t=10 и t=11:

у10=40,8611+2,6\*10=66,8611

у11=40,8611+2,7\*11=70,5611,

Ожидаемый спрос на кредитные ресурсы финансовой компании на 10 неделю должен составить около 66,8611 млн. руб., а на 11 неделю около 70,5611 млн. руб.

При уровне значимости L=30%, доверительная вероятность равна 70%, а критерий Стьюдента при к=n-2=9-2=7, равен

tкр(30%;7)=1,119159128 (fx/статистическая/СТЬЮДРАСПОБР),

Se=1,895064601 1-я таблица Итогов регрессии строка «стандартная ошибка»,

t’ср = 5(fx/математическая/СРЗНАЧ)- средний уровень по рассматриваемому моменту времени,

∑(t-t’ср)=60 (fx/статистическая/КВАДРОТКЛ),

Ширину доверительного интервала вычислим по формуле:

U1=t\*Se\*√1+1/n+(t\*-t’)2/∑(t-t’ср)=1,119159128\*1,895064601\* √1+1/9+(10-5)2/60 = =2,621476416

U2=t\*Se\*√1+1/n+(t\*-t’)2/∑(t-t’ср)=1,119159128\*1,895064601\*√1+1/10++(11-5)2/60= =2,765287696

Далее вычислим верхнюю и нижнюю границы прогноза uниж=y10-u1; uверх=у10+u1;uниж=y11-u1;uверх=у10+u1

uниж=66,8611-2,621476416=64,239623584

uверх=66,8611+2,621476416=69,482576416

uниж=70,5611-2,765287696=67,795812304

uниж=70,5611+2,765287696=73,326387696

Спрос на кредитные ресурсы финансовой компании на 10 неделю в пределах от 64,239623584 млн. руб. до 69,482576416 млн. руб., а на 11 неделю от 67,795812304 млн. руб. до 73,326387696 млн. руб.

Строим график:

