**1. Определить нижнюю и верхнюю цену игры, заданной платежной матрицей**



Имеет ли игра седловую точку?

*Решение:*

Найдем по каждой строчке платежной матрицы минимальное число αi = min (αi1, αi2, αi3) – это гарантированный выигрыш игрока А, при выборе им соответствующей стратегии. Чтобы получить максимально возможный гарантированный выигрыш, игрок А должен выбрать ту стратегию, для которой αij имеет максимальное значение – α = max(α1, α2, α3) – это нижняя цена игры.

Для игрока В выберем по каждому столбцу максимальное число βj = max(α1j, α2j, α3j) – это гарантированный проигрыш игрока В при выборе им стратегии Вj. Найдем минимальное из этих чисел β = min (β 1, β 2, β 3) – это верхняя цена игры. Занесем полученные данные в таблицу 1.

Нижняя цена игры α = 8 равна верхней цене игры β = 8. Значит, игра имеет седловую точку. Для игрока А оптимальная стратегия – А1, для игрока В оптимальная стратегия – В1.

*Ответ:* α = β = 8, игра имеет седловую точку, оптимальные стратегии (А1, В1).

Таблица 1 – Определение цены игры платежной матрицы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 |  |
| А1 | 8 | 9 | 9 | α1 = min (8, 9, 9) = 8 |
| А2 | 6 | 5 | 8 | α2 = min (6, 5, 8) = 5 |
| А3 | 3 | 4 | 5 | α3 = min (3, 4, 5) = 3 |
|  | β1 = max(8, 6, 3)  β1= 8 | β2 = max(9, 5, 4)  β2= 9 | β3 = max(9, 8, 5)  β3= 9 | α = max(8, 5, 3) = 8  β = min (8, 9, 9) = 8 |

2. Решить графически игру, заданную платежной матрицей



*Решение:*

Дана игра 4 х 2 , то есть у игрока А имеется 4 стратегии, а у игрока В – 2. Поэтому, будем решать игру для игрока В. Построим оси: ОХ – на ней будем отмечать вероятности, с которыми игрок использует ту или иную стратегии, и ОУ – на ней будем откладывать цену игры. На расстоянии единица от оси ОУ проведем еще ось параллельную ей, как показано на рисунке 1.

Если игрок А выбирает стратегию А1, то игрок В, используя свои стратегии с вероятностями (q1, q2), будет проигрывать, в среднем, q1∙α11+q2∙α12 = q1∙(-3) +q2∙(-4). Отметим на оси ОУ α11 = -3, а на оси ей параллельной α12 = -4 и соединим эти точки прямой линией – она показывает, сколько, в среднем, получает игрок В, если А использует стратегию А1, а В чередует стратегии В1 и В2 с некоторыми вероятностями (q1, q2). Аналогично отмечаем на оси ОУ точку -1, а на параллельной ей оси – точку 2 и соединяем отрезком. Получаем линию, показывающую, сколько, в среднем, получает игрок В, если А выбрал стратегию А2. Точно также для А3 и А4.

Для игрока В надо выбрать верхнюю границу, так как он должен рассчитывать, что А выберет ту стратегию, которая соответствует наибольшему проигрышу для игрока В. На рисунке 1 это ломанная А3КА2, выделенная толстой линией. Игроку В следует выбрать ту смешанную стратегию, которая соответствует наименьшему проигрышу для В – точка К. Это точка пересечения прямых, соответствующих стратегиям А3 и А2. Выпишем уравнения этих прямых.

Прямая (А3 А3) проходит через точки с координатами (0;2) и (1;-4). Уравнение этой прямой запишется в следующем виде:



Уравнение прямой (А2 А2), проходящей через точки (0;-1) и (1;2), запишется в следующем виде:



Рисунок 1 –Графическое решение



Точка К – точка пересечения этих прямых, имеет координаты, удовлетворяющие системе:



Решение системы:



Следовательно, цена игры ν = 0, оптимальная стратегия для игрока В:



Для игрока А, стратегии А1 и А4 будут не активными, игроку А не выгодно их использовать. Максимально возможный выигрыш, равный цене игры ν = 0, игрок А будет получать, используя стратегии А2 и А3. Найдем оптимальную смешанную стратегию для игрока А из следующей системы, учитывая, что А1 и А4 не активные стратегии, то есть р1 = р4 = 0:



*Ответ:* Цена игры ν = 0, оптимальные стратегии игроков



3. Решить геометрически следующую задачу линейного программирования:

при ограничениях:



*Решение:*

Построим область ограничений. Строим прямую (1): x1 – 4x2 - 4 = 0 по двум точкам, координаты которых удовлетворяют уравнению: (8; 1), (4; 0), как показано на рисунке 2. Проверяем, какая полуплоскость удовлетворяет неравенству , для этого подставим значение произвольной точки (0; 0) в это неравенство, получим - выполняется. Аналогичным способом строим прямые (2): и (3): , выделяем «бородой» области значений x1, x2, удовлетворяющие условиям и . На рисунке 2 изображена область, удовлетворяющая представленной в условиях задачи системе. Заметим, что и одно из неравенств системы - , тогда, очевидно, функция F принимает значения интервала , но , тогда Fmax = .



*Ответ:* Fmax = .



Рисунок 2 – Графическое решение

4. Для выпуска двух видов продукции А и В предприятие использует 4 вида ресурсов, все данные представлены в следующей таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид ресурса | Расход ресурсов для выпуска одного изделия | | Наличие ресурса |
| А | В |
| Рабочая сила | 1 | 3 | 3 |
| Сырье | 6 | 3 | 24 |
| Оборудование | 2 | 5 | 20 |
| Производственные ресурсы | 2 | 2 | 10 |

Прибыль от реализации единицы продукции А и В составляет 50 и 70 ДЕ, соответственно. Предприятие может нанять людей на работу, а увольнять людей не разрешается. Составить план выпуска продукции, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Сколько человек придется нанять?

*Решение:*

Обозначим x1, x2 – число единиц продукции соответственно А и В, запланированных к производству. По условию для их изготовления потребуется (1∙ x1 + 3∙ x2) единиц ресурса «Рабочая сила», (6∙ x1 + 3∙ x2) единиц ресурса «Сырье», (2∙ x1 + 5∙ x2) единиц ресурса «Оборудование», (2∙ x1 + 2∙ x2) единиц ресурса «Производственные ресурсы». Так как потребление всех этих видов ресурсов не должно превышать наличие ресурсов, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:



где а ≥ 3 и а – целое число (количество работников).

Суммарная прибыль стремиться к максимальному значению:



Все значения x1 и x2 лежат в I четверти, а функция F – луч, исходящий из точки (0; 0) под углом α к оси ОX1, где т.е. - функция прибыли F. Строим графическое решение для неравенств (2): , (3): , (4): , как это показано на рисунке 3.



Максимально возможная прибыль из графического решения в точке К, координаты которой находим из системы:



С учетом, x1, x2 – целые числа (только конечный продукт можно продать и получить прибыль), находим: при х1 = х2 = 2 возможно получение максимальной прибыли Подставив х1 = х2 = 2 в неравенство (1): , получим ,т.е. а = 8. Необходимо дополнительно нанять 8 – 3 = 5 человек.



*Ответ:* Максимально возможная прибыль 240 ДЕ возможна при производстве изделий А – 2шт. и изделий В – 2 шт., при этом придется дополнительно нанять 5 работников.



Рисунок 3 – Графическое решение

5. Построить граф состояний следующего случайного процесса: система состоит из двух аппаратов по продаже билетов, каждый из которых в случайный момент времени может быть либо занятым, либо свободным.

*Решение:*

Система может находиться в четырех состояниях, так как у каждого аппарата по продаже билетов есть два состояния (быть занятым или свободным). Пусть S0 – оба аппарата заняты; S1 – 1-ый занят, 2-ой свободен; S2 – 1-ый свободен, 2-ой занят; S3 – оба аппарата свободны. Построим граф состояний, отметив на нем все возможные состояния кругами, а возможные переходы из состояния в состояние обозначим стрелками. Получаем, что переход из S0 в S3 возможен либо через S1, либо через S2, либо напрямик, как показано на рисунке 4.



Рисунок 4 – Граф состояний аппаратов по продаже билетов

6. Найти предельные вероятности для системы S, граф которой изображен на рисунке.



*Решение:*

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют. Их можно найти из уравнений Колмогорова, составив систему по данному размеченному графу состояний, по следующему правилу:

*Слева в уравнении стоит предельная вероятность данного состояния pi, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в данное состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти состояния выходят.*

Кроме этого надо учитывать, что сумма всех вероятностей данной конечной системы равна единице. Составим уравнения для состояний S1 и S2 (уравнение для состояния S0 – «лишнее»):



*Ответ:* Система примерно 66,67% времени пребывает в состоянии S0, 25% - в состоянии S1 и 8,33% времени находится в состоянии S2.

7. Найти валовой выпуск для сбалансированной многоотраслевой экономики в модели Леонтьева, если дана матрица прямых затрат А и вектор конечного потребления У:



*Решение:*

Для сбалансированной многоотраслевой экономики выполняется следующее соотношение:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| где | Х | - | вектор валового выпуска; |
|  | У | - | вектор конечного потребления; |
|  | А | - | матрица прямых затрат. |

Выразим валовой выпуск через конечное потребление и матрицу затрат:



Находим матрицу, обратную к (Е – А):



Найдем валовой выпуск:

Х =



*Ответ:* Валовой выпуск равен (811,3; 660,4).

*\*При решении задач использовался источник:*

Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели". - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. - 153 с.