# Оглавление

Оглавление 1

[1. Постановка задачи 2](#_Toc278768106)

2. Краткие теоретические сведения 3

[3. Реализация программного средства. 7](#_Toc278768108)

3.1 Проектирование 7

[3.2 Алгоритм поиска парето-оптимальных решений 7](#_Toc278768110)

3.3 Листинг программного кода 10

[4. Пример работы программы 24](#_Toc278768112)

4.1 Многокритериальная задача 24

[4.2 Двухкритериальная задача 25](#_Toc278768114)

3. Аналитическое задание критериев 27

[Выводы 28](#_Toc278768118)

Используемая литература 29

[Используемые программные средства 29](#_Toc278768120)

# 1. Постановка задачи

математическая модель парето оптимальность

Необходимо разработать программное средство для поиска парето-оптимальных решений для следующих видов задач:

1. многокритериальная задача

входные данные: количество критериев и решений; весовые значения, заданные напрямую, либо в параметрическом виде.

выходные данные: решения, входящие в множество Парето; номера парето-оптимальных решений из множества исходных решений

1. двухкритериальная задача

входные данные: количество критериев и решений; весовые значения, заданные напрямую, либо в параметрическом виде.

выходные данные: решения, входящие в множество Парето; номера парето-оптимальных решений из множества исходных решений; графическое представление парето-оптимальных решений.

# 2. Краткие теоретические сведения

Пусть задан набор числовых функций , определенных на множестве возможных решений X. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции именуют критериями оптимальности, критериями эффективности или целевыми функциями.

Указанные выше числовые функции образуют векторный критерий , который принимает значения в пространстве m-мерных векторов . Это пространство называют критериальным пространством или пространством оценок, а всякое значение  именуют векторной оценкой возможного решения x. Все возможные векторные оценки образуют множество возможных оценок (возможных или допустимых векторов) 

Как правило, между множествами возможных решений X и соответствующим множеством векторов Y можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому возможному решению поставить в соответствие определенный возможный вектор, и обратно – каждому возможному вектору сопоставить определенное возможное решение. В таких случаях выбор во множестве решений с математической точки зрения равносилен выбору во множестве векторов и все определения и результаты можно формулировать как в терминах решений, так и в терминах векторов, причем при желании всегда можно без труда осуществить переход от одной формы изложения к другой.

Задачу выбора, которая включает множество допустимых решений X и векторный критерий f, обычно называют многокритериальной задачей или задачей многокритериальной оптимизации.

Необходимо отметить, что формирование математической модели принятия решений (т.е. построение множества *X* и векторного критерия *f* ) нередко представляет собой сложный процесс, в котором тесно взаимодействуют специалисты двух сторон. А именно, представители конкретной области знаний, к которой относится исследуемая проблема, и специалисты по принятию решений (математики). С одной стороны, следует учесть все важнейшие черты и детали реальной задачи, а с другой, – построенная модель не должна оказаться чрезмерно сложной с тем, чтобы для ее исследования и решения можно было успешно применить разработанный к настоящему времени соответствующий математический аппарат. Именно поэтому этап построения математической модели в значительной степени зависит от опыта, интуиции и искусства исследователей обеих сторон. Его невозможно отождествить с простым формальным применением уже известных, хорошо описанных алгоритмов.

Здесь следует еще добавить, что любая задача выбора (в том числе и многокритериальная) тесно связана с конкретным *ЛПР*(лицо, принимающее решение). Уже на стадии формирования математической модели при построении множества возможных решений и векторного критерия дело не обходится без советов, рекомендаций и указаний ЛПР, тем более что векторный критерий как раз и служит. Принятие решения при многих критериях для выражения целей ЛПР. При этом ясно, что построить модель в точности соответствующую всем реальным обстоятельствам невозможно. Модель всегда является упрощением действительности. Важно добиться, чтобы она содержала те черты и детали, которые в наибольшей степени влияют на окончательный выбор наилучшего решения.

Рассмотрим два произвольных возможных решения  и . Для них имеет место один и только один из следующих трех случаев:

1) справедливо соотношение  (ЛПР первое решение предпочитает второму),

2) справедливо соотношение  (ЛПР второе решение предпочитает первому),

3) не выполняется ни соотношение , ни соотношение  (ЛПР не может отдать предпочтение ни одному из указанных двух решений).

Заметим, что четвертый случай, когда оба участвующих здесь соотношения и  выполняются, невозможен благодаря асимметричности отношения предпочтения 

В первом из указанных выше случаев, т.е. при выполнении соотношения , говорят, что решение  доминирует решение .

Если же реализуется третий случай, то говорят, что решения  и не сравнимы по отношению предпочтения.

Аксиома Парето.

Для всех пар допустимых решений , для которых имеет место неравенство , выполняется соотношение

Решение называется оптимальным по Парето (парето-оптимальным), если не существует такого возможного решения , для которого имеет место неравенство . Все парето-оптимальные решения образуют множество Парето, обозначаемое 

Парето-оптимальное решение – это такое допустимое решение, которое не может быть улучшено (увеличено) ни по одному из имеющихся критериев без ухудшения (уменьшения) по какому-то хотя бы одному другому критерию.

Иначе говоря, предпочитая одному парето-оптимальному решению другое парето-оптимальное решение, ЛПР(лицо, принимающее решение) вынуждено идти на определенный компромисс, соглашаясь на некоторую потерю хотя бы по одному критерию (получая, разумеется, определенный выигрыш, по крайней мере, по какому-то другому критерию). По этой причине множество Парето нередко называют множеством компромиссов.

Понятие оптимальности по Парето играет важную роль в математической экономике. Именно в этой области часто вместо парето-оптимальности используют наименования эффективное решение и множество эффективных решений. Тем самым, парето-оптимальность и эффективность в математической экономике нередко оказываются синонимами.

# 3. Реализация программного средства.

Среда разработки: Visual Studio 2010

Язык программирования: C#

## 3.1 Проектирование

При проектировании программного средства будем использовать объектно-ориентированный подход.

Список классов с кратким описанием:

1. MainView.cs – это главное окно, служит для ввода данных и запуска работы алгоритма поиска парето-оптимальных решений.
2. SolutionsView.cs – это окно, которое содержит найденные парето-оптимальные решения, представленные в табличной форме
3. GraphView.cs – окно, на котором будет отображаться графическое представление множества Парето для двухкритериальных задач
4. Pareto.cs – это основной класс. Содержит 2 алгоритма поиска множества Парето.
5. Graph.cs – класс, содержащий методы для построения графиков (в данном случае будем использовать стороннюю библиотеку ZedGgraph.dll)
6. File.cs –методы для сохранения и загрузки данных в/из файл(а).

## 3.2 Алгоритм поиска парето-оптимальных решений

Шаг 1. Положить P(Y) =Y , i =1, j = 2 . Тем самым образуется так называемое текущее множество парето-оптимальных векторов, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством Y , а в конце составит искомое множество парето-оптимальных векторов. Алгоритм устроен таким образом, что искомое множество парето-оптимальных векторов получается из Y последовательным удалением заведомо неоптимальных векторов.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства  . Если оно оказалось истинным, то перейти к Шагу 3. В противном случае перейти к Шагу 5.

Шаг 3. Удалить из текущего множества векторов P(Y) вектор , так как он не является парето-оптимальным. Затем перейти к Шагу 4.

Шаг 4. Проверить выполнение неравенства j < N . Если оно имеет место, то положить j = j +1 и вернуться к Шагу 2. В противном случае – перейти к Шагу 7.

Шаг 5. Проверить справедливость неравенства . В том случае, когда оно является истинным, перейти к Шагу 6. В противном случае – вернуться к Шагу 4.

Шаг 6. Удалить из текущего множества векторов P(Y) вектор и перейти к Шагу 7.

Шаг 7. Проверить выполнение неравенства i < N -1. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить i = i +1 , а затем j = i +1. После этого необходимо вернуться к Шагу 2. В противном случае (т.е. когда) вычисления закончить. К этому моменту множество парето-оптимальных векторов построено полностью.

Вначале реализуем вспомогательные методы:

// поэлементное сравнение вектора v1 с вектором v2

private void Compare(List<int> v1, List<int> v2)

 {

 more = 0;

 less = 0;

 equal = 0;

 for (int i = 0; i < v1.Count; i++)

 {

 if (v1[i] > v2[i])

 more++;

 else if (v1[i] < v2[i]) less++;

 else equal++;

 }

 }

 // возвращает истину если v1 >= v2

 private bool MoreOrEqual()

 {

 if (more >= 0 && less == 0)

 return true;

 else return false;

 }

Далее напишем рекурсивную процедуру удаления доминируемых решений, опираясь на алгоритм, описанный выше:

// y – список решений

 public void DeleteDominated(List<List<int>> y)

 {

 foreach (List<int> yi in y)

 {

 foreach (List<int> gj in y)

 {

 if (!Equals(gj, yi))

 {

 Compare(gj, yi);

 if (MoreOrEqual())

 {

 y.Remove(yi);

 DeleteDominated(y);

 return;

 }

 Compare(yi, gj);

 if (MoreOrEqual())

 {

 y.Remove(gj);

 DeleteDominated(y);

 return;

 }

 }

 }

 }

 }

И наконец получаем метод, возвращающий список парето-оптимальных решений:

 public List<List<int>> GetParetoList(List<List<int>> y)

 {

 DeleteDominated(y);

 return y;

 }

## 3.3 Листинг программного кода

public class Graph

 {

 public ZedGraphControl DisplayGrahpics(Panel panel, int[] x, int[] y, int[] pareto\_x, int[] pareto\_y)

 {

 var control = new ZedGraphControl();

 control.Width = panel.Width;

 control.Height = panel.Height;

 GraphPane myPane = control.GraphPane;

 // Set the title and axis labels

 myPane.Title.IsVisible = false;

 //myPane.Title.Text = title;

 myPane.XAxis.Title.IsVisible = false;

 myPane.YAxis.Title.IsVisible = false;

 myPane.YAxis.Scale.MaxAuto = true;

 myPane.Legend.IsVisible = false;

 PointPairList list1 = new PointPairList();

 for (int i = 0; i < x.Length; i++)

 list1.Add(x[i], y[i]);

 LineItem curve1 = myPane.AddCurve("label", list1, Color.Black, SymbolType.Circle);

 curve1.Symbol.Fill = new Fill(Color.Black);

 curve1.Symbol.Size = 7;

 curve1.Line.IsVisible = false;

 PointPairList list2 = new PointPairList();

 for (int i = 0; i < pareto\_x.Length; i++)

 list2.Add(pareto\_x[i], pareto\_y[i]);

 LineItem curve2 = myPane.AddCurve("label", list2, Color.Red, SymbolType.Circle);

 curve2.Symbol.Fill = new Fill(Color.Red);

 curve2.Symbol.Size = 7;

 curve2.Line.IsVisible = false;

 // Fill the axis background with a color gradient

 myPane.Chart.Fill = new Fill(Color.White, Color.FromArgb(255, 255, 166), 45.0F);

 control.AxisChange();

 // expand the range of the Y axis slightly to accommodate the labels

 myPane.YAxis.Scale.Max += myPane.YAxis.Scale.MajorStep;

 return control;

 }

 }

public class File

 {

 private StreamWriter writer;

 private StreamReader reader;

 public void WriteData(List<List<int>> y, string fileName)

 {

 writer = new StreamWriter(new FileStream(fileName, FileMode.Create, FileAccess.Write));

 writer.WriteLine(y.Count.ToString()+ " " + y[0].Count.ToString());

 for (int i = 0; i < y.Count; i++)

 {

 for (int j = 0; j < y[i].Count; j++)

 {

 writer.Write(y[i][j].ToString() + " ");

 }

 writer.WriteLine();

 }

 writer.Close();

 }

 public List<List<int>> ReadData(string fileName)

 {

 List<List<int>> y = new List<List<int>>();

 int n,m;

 reader = new StreamReader(new FileStream(fileName, FileMode.Open, FileAccess.Read));

 while (!reader.EndOfStream)

 {

 char[] separator = { ' ' };

 string[] vals = reader.ReadLine().Split(separator, StringSplitOptions.RemoveEmptyEntries);

 n = Convert.ToInt32(vals[0]);

 m = Convert.ToInt32(vals[1]);

 for (int i = 0; i < n; i++)

 {

 List<int> list = new List<int>();

 vals = reader.ReadLine().Split(separator, StringSplitOptions.RemoveEmptyEntries);

 for (int j = 0; j < m; j++)

 {

 list.Add(Convert.ToInt32(vals[j]));

 }

 y.Add(list);

 }

 }

 reader.Close();

 return y;

 }

 }

public partial class SolutionsView : Form

 {

 public SolutionsView(List<List<int>> list)

 {

 InitializeComponent();

 int n = list[0].Count;

 int m = list.Count;

 dataGridView2.ColumnCount = n;

 dataGridView2.RowCount = m;

 for (int i = 0; i < m; i++)

 {

 for (int j = 0; j < n; j++)

 dataGridView2[j, i].Value = list[i][j];

 }

 }

 }

public partial class GraphView : Form

 {

 public GraphView()

 {

 InitializeComponent();

 }

 public Panel GetPanel()

 {

 return panel1;

 }

 }

public partial class MainView : Form

 {

 private int n, m, krit, comp, var;

 private List<List<int>> y;

 private List<int> paretoSet;

 private List<int> paretoSet2;

 private Pareto pareto;

 public MainView()

 {

 InitializeComponent();

 InitComboboxes(2, 20, 1);

 y = new List<List<int>>();

 paretoSet = new List<int>();

 dataGridView1.AllowUserToAddRows = false;

 dgA.AllowUserToAddRows = false;

 dgK.AllowUserToAddRows = false;

 dgX.AllowUserToAddRows = false;

 }

 private void InitComboboxes(int minimum, int maximum, int step)

 {

 for (int i = minimum; i < maximum; i+=step)

 {

 comboBox1.Items.Add(i);

 comboBox2.Items.Add(i);

 comboBox3.Items.Add(i);

 comboBox4.Items.Add(i);

 comboBox5.Items.Add(i);

 }

 }

 private void button1\_Click(object sender, EventArgs e)

 {

 n = Convert.ToInt32(comboBox1.Text);

 m = Convert.ToInt32(comboBox2.Text);

 dataGridView1.ColumnCount = n;

 dataGridView1.RowCount = m;

 for (int i = 0; i < n; i++)

 dataGridView1.Columns[i].Name = "k" + (i+1).ToString();

 }

 private void GetValuesFromGrid()

 {

 y = new List<List<int>>();

 if (tabControl1.SelectedIndex == 0)

 {

 for (int i = 0; i < m; i++)

 {

 var list = new List<int>();

 for (int j = 0; j < n; j++)

 list.Add(Convert.ToInt32(dataGridView1[j, i].Value.ToString()));

 y.Add(list);

 }

 }

 else if (tabControl1.SelectedIndex == 1)

 {

 for (int i = 0; i < var; i++)

 {

 var list = new List<int>();

 for (int j = 0; j < krit; j++)

 {

 int sum = 0;

 for (int k = 0; k < comp; k++)

 {

 int ai = Convert.ToInt32(dgA[k, j].Value.ToString());

 int ki = Convert.ToInt32(dgK[k, j].Value.ToString());

 int xi = Convert.ToInt32(dgX[k, i].Value.ToString());

 sum += ai \* Convert.ToInt32(Math.Pow((double)xi, (double)k));

 }

 list.Add(sum);

 }

 y.Add(list);

 }

 }

 }

 private void button2\_Click(object sender, EventArgs e)

 {

 textBox1.Text = "";

 paretoSet = new List<int>();

 if (y.Count == 0)

 GetValuesFromGrid();

 pareto = new Pareto();

 paretoSet = pareto.GetPareto(y);

 paretoSet2 = pareto.GetPareto2(y);

 WriteList("метод1: ",paretoSet);

 WriteList(" метод2: ", paretoSet2);

 SolutionsView solView = new SolutionsView(pareto.GetParetoList(y));

 solView.Show();

 if (krit == 2 || n==2)

 DrawGraph();

 }

 private void WriteList(string text, List<int> set)

 {

 textBox1.Text += text;

 foreach (int val in set)

 textBox1.Text += (val+1).ToString() + "; ";

 }

 private void InitGrid()

 {

 krit = Convert.ToInt32(comboBox3.Text);

 var = Convert.ToInt32(comboBox4.Text);

 comp = Convert.ToInt32(comboBox5.Text);

 dgA.ColumnCount = comp;

 dgK.ColumnCount = comp;

 dgX.ColumnCount = comp;

 dgA.RowCount = krit;

 dgK.RowCount = krit;

 dgX.RowCount = var;

 }

 private void button3\_Click(object sender, EventArgs e)

 {

 InitGrid();

 for (int q = 0; q < comp; q++)

 {

 dgK.Columns[q].Name = (q + 1).ToString();

 dgA.Columns[q].Name = (q + 1).ToString();

 dgX.Columns[q].Name = (q + 1).ToString();

 }

 }

 private void dataGridView1\_CellFormatting(object sender, DataGridViewCellFormattingEventArgs e)

 {

 }

 // Двумерный случай/ графическое представление

 private void DrawGraph()

 {

 GraphView form2 = new GraphView();

 form2.Show();

 GetValuesFromGrid();

 int cnt;

 if (m == 0)

 cnt = var;

 else cnt = m;

 int[] x\_ = new int[cnt - paretoSet.Count];

 int[] y\_ = new int[cnt - paretoSet.Count];

 for (int i = 0; i < cnt - paretoSet.Count; i++)

 {

 x\_[i] = y[pareto.deleted[i]][0];

 y\_[i] = y[pareto.deleted[i]][1];

 }

 cnt = paretoSet.Count;

 int[] pareto\_x = new int[cnt];

 int[] pareto\_y = new int[cnt];

 for (int i = 0; i < cnt; i++)

 {

 pareto\_x[i] = y[paretoSet[i]][0];

 pareto\_y[i] = y[paretoSet[i]][1];

 }

 panel1 = form2.GetPanel();

 var control = new Graph().DisplayGrahpics(panel1, x\_,y\_, pareto\_x, pareto\_y);

 panel1.Controls.Clear();

 panel1.Controls.Add(control);

 panel1.Invalidate();

 }

 // Random values

 private void button2\_Click\_1(object sender, EventArgs e)

 {

 Random random = new Random();

 if (tabControl1.SelectedIndex == 0)

 {

 for (int i = 0; i < m; i++)

 {

 for (int j = 0; j < n; j++)

 {

 dataGridView1[j, i].Value = random.Next(20);

 }

 }

 }

 else if (tabControl1.SelectedIndex == 1)

 {

 for (int i = 0; i < comp; i++)

 {

 for (int j = 0; j < krit; j++)

 {

 dgA[i, j].Value = random.Next(5);

 dgK[i, j].Value = random.Next(5);

 }

 for (int q = 0; q < var; q++)

 {

 dgX[i, q].Value = random.Next(5);

 }

 }

 }

 }

 private void сохранитьКакToolStripMenuItem\_Click(object sender, EventArgs e)

 {

 if (this.saveFileDialog1.ShowDialog() == DialogResult.OK)

 {

 if (y.Count == 0)

 GetValuesFromGrid();

 new File().WriteData(y, this.saveFileDialog1.FileName);

 }

 }

 private void открытьToolStripMenuItem\_Click(object sender, EventArgs e)

 {

 if (this.openFileDialog1.ShowDialog() == DialogResult.OK)

 {

 y = new File().ReadData(this.openFileDialog1.FileName);

 FillGridFromList(y);

 }

 }

 private void FillGridFromList(List<List<int>> list)

 {

 n = list[0].Count;

 m = list.Count;

 dataGridView1.ColumnCount = n;

 dataGridView1.RowCount = m;

 comboBox1.Text = n.ToString();

 comboBox2.Text = m.ToString();

 for (int i = 0; i < m; i++)

 {

 for (int j = 0; j < n; j++)

 dataGridView1[j, i].Value = list[i][j];

 }

 }

 }

}

# 4. Пример работы программы

## 4.1 Многокритериальная задача

1. Реализуем пример, описанный в пособии №1 из списка использованной литературы. Для этого воспользуемся уже заготовленным файлом пример1.txt:

1. Найдем парето-оптимальные решения:


## 4.2 Двухкритериальная задача

1. Продемонстрируем работу программы для двухкритериальной задачи. Пусть количество решений будет равно 11.

2) Результат работы программы:

Красным цветом выделены парето-оптимальные решения. Черным – доминируемые решения.

## 3. Аналитическое задание критериев

Пусть количество критериев 6

Количество решений 16

Весовые значения будут находиться по формуле:

, где p – число критериев, n – количество компонент решения, a, k, x – задаются в таблице:

##

В результате получаем список парето-оптимальных решений, состоящих из трех векторов:

# Выводы

В результате проделанной работы было разработано программное средство для поиска парето-оптимальных решений для многокритериальных задач.

Данное приложение может использоваться лишь как демонстрационно-обучающее по теме «Многокритериальные задачи. Множество Парето» дисциплины «Теория принятия решений». Это связано с тем, что практически невозможно формализовать математическую модель векторных оценок. Каждая задача поиска оптимальных решений требует собственного подхода.

# Используемая литература

1. В.Д. Ногин. Принятие решений при многих критериях. Учебнометодическое

пособие.– СПб. Издательство «ЮТАС», 2007. – 104 с.

2. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Подинвоский В.В., Ногин В.Д. –М. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 256с.

# Используемые программные средства

Microsoft Visual Studio 2010