Задание 1

Раскрыть сущность экономико-математической модели. Привести классификацию экономико-математических моделей; дать понятие экономико-математического моделирования и рассмотреть его этапы.

С понятием «моделирование экономических систем» (а также математических и др.) связаны два класса задач:

задачи анализа, когда система подвергается глубокому изучению ее свойств, структуры и параметров, то есть исследуется предметная область будущего моделирования.

Задачи, связанные с задачами синтеза (получения ЭММ данной системы).

**Модель** – изображение, представление объекта, системы, процесса в некоторой форме, отличной от реального существования.

Различают физическое и математическое моделирование.

Классификация моделей:

— вещественные

— символьные

— словесно-описательные

1. математические
2. аналитические
   * имитационные
   * структурные

= формальные

= функциональные

Этапы практического моделирования

1. Анализ экономической системы, ее идентификация и определение достаточной структуры для моделирования.
2. Синтез и построение модели с учетом ее особенностей и математической спецификации.
3. Верификация модели и уточнение ее параметров
4. Уточнение всех параметров системы и соответствие параметров модели, их необходимая валидация (исправление, корректирование).

Задание 3

В качестве примера построим модель оптимального размещения активов для некоторого гипотетического банка, работающего более двух лет, баланс которого приводится в таблицах ниже.

Пассив баланса

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Наименование статей баланса | Сумма, млн. руб. | Риск одновременного снятия, % |
| Средства банков на корреспондентских счетах | 5,1 | 25 |
| Кредиты и депозиты банков (включая НБ РБ) |  |  |
| Кредитные ресурсы, полученные от других банков,  депозиты других банков до востребования | 2,8 | 55 |
| Кредитные ресурсы, полученные от других банков,  и депозиты других банков с договорными сроками | 3,4 | 0 |
| Средства клиентов |  |  |
| Остатки на текущих (расчетных) счетах юридических и  физических лиц | 196 | 25 |
| Вклады (депозиты) юридических и физических лиц: |  |  |
| до востребования | 5,8 | 25 |
| с договорными сроками | 85 |  |
| Прочие пассивы | 7,6 |  |
| Итого пассивов | 305,7 |  |
| Собственный капитал банка | 68 |  |

Актив баланса

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Наименование статей баланса | Сумма, млн. руб. | Доход-ность, % | Степень риска, % | Ликвид-ность, % |
| Касса и приравненные к ней средства | х1 | 0 | 0 | 100 |
| Средства на корреспондентских счетах в банках |  |  |  |  |
| Средства в НБ РБ | х2 | 0 | 0 | 100 |
| Средства в банках стран – членов ОЭСР до востребования | х3 | 5 | 30 | 75 |
| Средства в банках стран, не являющихся членами ОЭСР,  до востребования | х4 | 7 | 65 | 55 |
| Обязательные резервы в НБРБ | 33,5 | 0 | 0 | 0 |
| Кредиты и депозиты банкам |  |  |  |  |
| Кредиты банкам-резидентам РБ под обеспечение  государственных ценных бумаг РБ в бел. руб. | х5 | 32 | 0 | 100 |
| Депозиты в банках-резидентах РБ под гарантии НБ РБ | х6 | 25 | 0 | 100 |
| Кредиты юридическим и физическим лицам: |  |  |  |  |
| обеспеченные залогом ценных бумаг, эмитированных  юридическими лицами | х7 | 38 | 100 | 0 |
| обеспеченные гарантийными депозитами в бел. руб. и СКВ | х8 | 33 | 0 | 0 |
| обеспеченные залогом имущества | х9 | 39 | 100 | 0 |
| обеспеченные гарантиями и поручительствами юридических лиц | х10 | 34 | 100 | 0 |
| Государственные ценные бумаги РБ, номинированные в бел. руб. | х11 | 25 | 0 | 100 |
| Основные средства и нематериальные активы | 12,4 | 0 | 100 | 0 |

Запишем целевую функцию, в данной модели представляющую процентный доход банка от размещения активов, который следует максимизировать:

f(x)= 0,05х3 + 0,07х4 + 0,32х5 + 0,25х6 + 0,38х7 + 0,33х8 + 0,39х9 +   
+ 0,34х10 + 0,25х11→max

Первое ограничение следует из условия баланса: сумма активных статей баланса должна быть равна сумме пассивных его статей + собственный капитал

х1 + х2 + х3 + х4 + 33,5 + х5 + х6 + х7 + х8 + х9 + х10 + х11 + 12,4 = 373,7

Второе ограничение следует из норматива по достаточности капитала, при этом предположим, что R = 0



Третье ограничение следует из норматива мгновенной ликвидности, которое представляет собой отношение балансовых сумм активов и пассивов до востребования и с просроченными сроками:



Четвертое ограничение следует из норматива краткосрочной ликвидности, которое представляет соотношение фактической и требуемой ликвидности:



Пятое ограничение запишем исходя из минимально допустимого значения соотношения ликвидных и суммарных активов баланса:



Шестое ограничение следует из ограниченности совокупной суммы крупных рисков.

Пусть х5≥0,1Ч68 и х6≥0,1Ч68, тогда

х5 + х6≤6Ч68

Седьмое ограничение следует из ограниченности средств, размещенных в банках стран — не членов ОЭСР

х4≤68

Далее запишем ограничения, вытекающие из норматива максимального размера риска на одного клиента, считая для простоты, что одна статья баланса соответствует одному клиенту:

х3≤0,25Ч68; х4≤0,25Ч68; х5≤0,25Ч68;   
х6≤0,25Ч68; х7≤0,25Ч68; х8≤0,25Ч68;   
х9≤0,25Ч68; х10≤0,25Ч68

В завершение напишем условие неотрицательности:

хj ≥ 0, j = 1,11

Таким образом, все вышеперечисленные ограничения представляют собой модель оптимального распределения активов банка с рассмотренным выше балансом.

Задание 4

Построить уравнение регрессии, описывающее зависимость прибыли банка (у) от объема межбанковских кредитов и депозитов (х), оценить ее качество и степень зависимости. С помощью построенной регрессии прогнозировать, какой будет средняя прибыль банка при достижении объема межбанковских кредитов и депозитов величины 53 млн. руб.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № банка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Кредиты и депозиты | 18 | 23 | 28 | 29 | 34 | 36 | 37 | 42 | 44 | 45 | 49 | 50 |
| Прибыль | 12 | 17 | 15 | 25 | 20 | 32 | 25 | 35 | 30 | 40 | 41 | 45 |

Решение

Информацию, представленную в исходных данных представим графически:



Из диаграммы рассеяния видно, что зависимость между прибылью банка и объемом межбанковских кредитов и депозитов носит линейный характер. Кроме того, исследуется зависимость прибыли банка только от одного фактора — объема межбанковских кредитов и депозитов, поэтому регрессию будем строить в виде

у = а + bх

т.е. это будет простая линейная регрессия. Для расчета ее параметров воспользуемся известными формулами:



Для этого в рабочей таблице рассчитаем нужные суммы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi | yi | xiyi | xi2 | yi2 |
| 1 | 18 | 12 | 216 | 324 | 144 |
| 2 | 23 | 17 | 391 | 529 | 289 |
| 3 | 28 | 15 | 420 | 784 | 225 |
| 4 | 29 | 25 | 725 | 841 | 625 |
| 5 | 34 | 20 | 680 | 1156 | 400 |
| 6 | 36 | 32 | 1152 | 1296 | 1024 |
| 7 | 37 | 25 | 925 | 1369 | 625 |
| 8 | 42 | 35 | 1470 | 1764 | 1225 |
| 9 | 44 | 30 | 1320 | 1936 | 900 |
| 10 | 45 | 40 | 1800 | 2025 | 1600 |
| 11 | 49 | 41 | 2009 | 2401 | 1681 |
| 12 | 50 | 45 | 2250 | 2500 | 2025 |
| ∑ | 435 | 337 | 13358 | 16925 | 10763 |

Подставим результаты, полученные в таблице в формулы:





Таким образом, уравнение регрессии, описывающее зависимость между прибылью банка и объемом межбанковских кредитов и депозитов, имеет вид:

у = –7,71 + 0,987х

Оценим качество построенной регрессии. Для этого рассчитаем коэффициент детерминации, используя формулу:



Значение коэффициента детерминации достаточно близко к единице, поэтому качество построенной регрессии хорошее. Можно утверждать, что изменение прибыли банка на 86,8% зависит от изменения межбанковских кредитов и депозитов, и на 13,2% – от прочих факторов.

Степень зависимости между исследуемыми показателями оценивается на основании коэффициента корреляции:



Коэффициент корреляции близок к единице, поэтому имеем достаточно сильную линейную зависимость между прибылью банка и объемом межбанковских кредитов и депозитов.

Так как качество построенной регрессии хорошее, ее можно использовать для прогнозирования. Подставим прогнозное значение хпр = 53 в построенное уравнение регрессии:

упр = –7,71 + 0,987Ч53 = 44,623 (млн. руб.)

Таким образом, если объем межбанковских кредитов и депозитов достигнет 53 млн. руб., то средняя прибыль коммерческого банка составит 44 млн. 623 тыс. руб.

Задание 5

За компаниями A, B и С проводились наблюдения в течение трех периодов. Данные в процентах приводятся в таблице ниже. Оценить ожидаемую доходность и риск каждой акции, на основании этих оценок дать сравнительную характеристику. Рассчитать ковариации доходностей акций друг с другом. Дать определение эффективного портфеля ценных бумаг и построить модели, позволяющие определить структуру эффективных портфелей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Период наблюдения | Доходность компании А | Доходность компании В | Доходность компании С |
| 1 | 27 | 25 | 22 |
| 2 | 30 | 20 | 18 |
| 3 | 33 | 26 | 16 |

Решение

Оценим ожидаемую доходность каждой акции:



Оценим риск каждой акции, который выражается вариацией:



Из приведенных расчетов следует, что самыми привлекательными для инвестора ценными бумагами являются акции компании А, так как они имеют самую высокую ожидаемую доходность и наименьший риск. Если же сравнить между собой компании В и С, то акции компании В имеют несколько большую ожидаемую доходность, но и больший риск, поэтому выбор зависит от отношения инвестора к риску.

Рассчитаем ковариации доходностей акций друг с другом:







Из расчетов видно, что ковариация доходностей компаний А и С отрицательна, т.е. зависимость между доходностями акций этих компаний обратная, под воздействием одних и тех же факторов доходности меняются в разных направлениях. Ковариации доходностей акций компаний А и В, В и С положительные, что свидетельствует о прямой зависимости между доходностями акций этих компаний, под воздействием одних и тех же факторов доходности меняются в одном направлении.

Дадим определение эффективного портфеля. Портфель, имеющий минимальный риск при заданном уровне ожидаемой доходности или максимальную ожидаемую доходность при заданном уровне риска, называется эффективным.

пусть хА, хВ, хС — доли капитала инвестора, вложенные в акции компаний А, В, С соответственно. Сумма долей равна единице, т.е.:

хА + хВ + хС = 1

Так как риск портфеля, составленного из акций компаний А, В и С, выражается формулой:



а ожидаемая доходность этого же портфеля выражается формулой



то, подставляя рассчитанные значения вариаций, ковариаций, получаем модели, определяющие структуру эффективных портфелей:





хА + хВ + хС = 1





хА + хВ + хС = 1

Задание 6

Руководство одного из банков решило разместить ресурсы в операциях с процентным арбитражем с целью получения прибыли от разницы процентных ставок на различных кредитных рынках с учетом изменения валютных курсов. Для проведения операций с процентным арбитражем на домашнем кредитном рынке было приобретено 500000 рос. руб. под 7,5% годовых на месяц. На момент начала операции наиболее привлекательными для банка оказались кредитный рынок США и еврорынок. Процентная ставка по вкладам на месяц на кредитном рынке США равнялась 7,75% годовых, а на еврорынке по вкладам в евро на месяц 7,7% годовых. Соотношение курсов валют было следующее: RUR/€ = 37,7 руб., RUR/$ = 27,8 руб. Через месяц на момент окончания операции прогнозируются следующие курсы валют: с вероятностью 0,4 RUR/€ = 36,3 руб., RUR/$ = 28,2 руб., с вероятностью 0,6 RUR/€ = 38,2 руб., RUR/$ = 26,6 руб. Определить наилучшую стратегию размещения ресурсов сроком на один месяц, используя критерии Вальда, Гурвица и Байеса.

Решение

В данной задаче выделяются 2 игрока: руководство банка, принимающее решения, и природа — рынок валют. Предположим, что руководство банка определило для себя три стратегии:

А1 — разместить 500000 руб. на еврорынке;

А2— разместить 500000 руб. на рынке США;

А3— разместить 250000 руб. на рынке США и 250000 руб. на еврорынке.

У природы будут две стратегии, соответствующие двум прогнозам курсов. Для определения наилучшей стратегии построим платежную матрицу. Ее размерность будет 3Ч2 в соответствии с количеством стратегий.

Элементы платежной матрицы будут равны прибыли, которую получит банк в каждой из возможных ситуаций.

Рассчитаем элемент платежной матрицы а 11:

1. Конвертируем валюту:

500000/37,7 = 13262,6 €

2. Вкладываем получившуюся в валюте сумму на соответствующем рынке на месяц:

13262,6Ч(1+0,077/12) = 13347,7 €

3. Конвертируем полученную сумму в рубли соответственно стратегии природы:

13347,7Ч36,3 = 484,521 руб.

4. Рассчитаем сумму, которую нужно вернуть через месяц на домашнем рынке:

500000Ч(1+0,075/12) = 503125 руб.

5. Находим чистый доход от операции

484521,6 – 503125 = –18603,4 руб.

Аналогично рассчитываются все остальные элементы платежной матрицы. В результате расчетов она принимает вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 |
| A1 | -18603,45 | 6757,18 |
| A2 | 7344,87 | -21617,96 |
| A3 | 5629,29 | 7430,39 |

Для выбора лучшей стратегии воспользуемся следующими критериями:

1. Критерий Вальда — критерий крайнего пессимизма. Наилучшая, по Вальду, стратегия — соответствующая наибольшему из наименьших выигрышей. Наилучшей, по Вальду, будет стратегия А3, т.е. разместив по 250000 тыс. руб. на рынках США и Европы, банк получит прибыль не менее, чем на 5629,29 руб.
2. Критерий Сэвиджа — критерий минимального риска. Наилучшей, по Сэвиджу, считается стратегия, соответствующая наименьшему из наибольших рисков. Для ее определения построим дополнительную матрицу R:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 |
| A1 | 25948,32 | 673,20 |
| A2 | 0,00 | 29048,34 |
| A3 | 1715,59 | 0,00 |

Стратегия А3 соответствует минимальному из максимальных рисков, т.е. наилучшей, по Сэвиджу будет вложение по 250000 руб. на обоих рынках.

1. Критерий Гурвица — критерий пессимизма-оптимизма. Параметр γ в нашем случае равен 0,4. Рассчитаем числа и выберем из них максимальное:

a1 = 0,4Ч(-18603,45) + 0,6Ч6757,18 = -3387,07

a2 = 0,4Ч (-21617,96) + 0,6Ч7344,87 = -4240,26

a3 = 0,4Ч5629,29 + 0,6Ч7430,39 = 6709,95

Таким образом при γ = 0,4, если руководство банка настроено оптимистично оно принимает решение вложить по 250000 руб. на обоих рынках.

4.Критерий Байеса — используется тогда, когда известны вероятности состояний природы. Такая ситуация называется ситуацией риска. Наилучшей, по Байесу, стратегией считается соответствующая наибольшему ожидаемому выигрышу. Рассчитаем а1, а2, а3:

a1 = 0,4Ч (-18603,45) + 0,6Ч 6757,18 = -3387,07

a2 = 0,4Ч7344,87 + 0,6Ч (-21617,96) = -10032,82

a3 = 0,4Ч5629,29 + 0,6Ч7430,39 = 6709,95

Наилучшей, по Байесу, стратегией будет стратегия А3.

Задание 7

Компания рассматривает строительство филиалов в четырех местах, соответственно имеются четыре проекта, продолжительностью 5 лет. Первоначальные инвестиции и доходы по годам приведены в таблице исходных данных. Инвестиционные возможности компании ограничены. В силу определенных соображений сумма расстояний от компании до филиалов не должна превышать 450 км. Из-за ограниченности фонда заработной платы общее число работников филиала на должно превышать 450 человек. Совместное строительство филиалов не допускается, так как они располагаются достаточно близко друг к другу.

Построить модель оптимального распределения инвестиций по проектам, в качестве критерия оптимальности использовать сумму NPV проектов. Ставка дисконта равна 15%.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер проекта | I0 | Доходы по годам | | | | |
| первый | второй | третий | четвертый | пятый |
| первый | 1250 | -200 | 600 | 1200 | 1300 | 1400 |
| второй | 1300 | 100 | 830 | 700 | 570 | 720 |
| третий | 1400 | 500 | 250 | 400 | 320 | 710 |
| четвертый | 2200 | -330 | 1000 | 1150 | 1600 | 1800 |

Решение

Для расчета NPV будем использовать следующую формулу:

 i = 1,2,3,4

Отсюда:

NPV1 = 1258,12

NPV2 = 558,68

NPV3 = 22,78

NPV4 = 835,05

Введем переменные. Пусть хi, i = 1,2,3,4 характеризует i-й проект и может принимать только 2 значения — 0 или 1. Если хi = 0, это значит, что i-й проект не следует инвестировать. Если хi = 1, то i-й проект следует инвестировать.

Используя введенные переменные запишем целевую функцию:

NPV = 1258,12х1 + 558,68х2 + 22,78х3 + 835,05х4

Теперь запишем ограничения, которые вытекают из условий задачи.

Первое ограничение следует из ограниченности инвестиционных возможностей компании:

1250х1 + 1300х2 + 1400х3 + 2200х4≤5600

Второе ограничение следует из того, что в первом году некоторые проекты еще не требуют инвестиций, которые должны быть покрыты доходами от других проектов:

-200х1 + 100х2 + 500х3 - 300х4≥0

Далее запишем ограничение, вытекающее из ограниченности суммы расстояний:

100х1 + 90х2 + 120х3 + 160х4≤450

Аналогично запишем ограничение, которое следует из того, что общее количество работников филиалов ограничено:

100х1 + 120х2 + 120х3 + 150х4≤450

Наконец, запишем условие того, что второй и третий филиалы одновременно строить нельзя:

х2 + х3 ≤1

Модель оптимального распределения инвестиций по проектам состоит в максимизации целевой функции при ограничениях, т.е.

NPV = 1258,12х1 + 558,68х2 + 22,78х3 + 835,05х4 (max)

1250х1 + 1300х2 + 1400х3 + 2200х4≤5600

-200х1 + 100х2 + 500х3 - 300х4≥0

100х1 + 90х2 + 120х3 + 160х4≤450

100х1 + 120х2 + 120х3 + 150х4≤450

х2 + х3 ≤1

0, если i-й проект не инвестировать

xi =

1, если i-й проект инвестировать, i=1,2,3,4