# Содержание

# Введение

# Теоретическая часть

# §1 Основные определения

# §2 Простейшие свойства m – степеней

# §3 Минимальные элементы верхней полурешетки m-степеней

# 2. Практическая часть

# §1. Идеалы полурешетки m-степеней частично рекурсивных функций

# Литература

# Введение

Сейчас много внимания уделяется вопросам сводимости функций. Данная работа посвящена одной из разновидностей сводимости частично рекурсивной функции, а именно m-сводимости.

Для дальнейшего рассмотрения этого вопроса будем пользоваться общепринятыми понятиями и теоретико-множественными обозначениями.

Символы логических операций: отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, и эквивалентности будем обозначать: , соответственно.



Кванторы общности и существования обозначают соответственно.



Совокупность всех целых неотрицательных чисел обозначим через N.

Под множеством будем понимать подмножество N.

Латинскими буквами A,B,C,… будем обозначать множества.

Объединение множества A и B обозначим через пересечения этих множеств - а разность , дополнение - .



Пусть 1\*2\*…\*n 1,2,…,n11, 22,…,nn-декартово произведение множеств 1,2,…,n.



Определение: Функции называется арифметической, если ее аргументы пробегают натуральный ряд N, и сама функция принимает лишь натуральные значения.



Под n-местной частичной арифметической функцией будем понимать функцию, отображающую некоторое множество в N ,где -n-ая декартовая степень множества N.



Греческими строчными буквами будем обозначать частично рекурсивные функции (ЧРФ) : .



Всякий раз, когда число аргументов явно не указывается, речь идет об одноместных функциях. Обозначим через множество всех одноместных ЧРФ.



Запись означает, что функция для этой n-ки не определена, а запись означает, что функция для этой n-ки определена.



Множество называют областью значений функции , а множество область определения функции .



Определение: Частичную n-местную функцию назовем всюду определенной, если .



Всюду определенная функция будет обозначаться латинскими буквами: f,g,h,… . [5,6]

**Теоретическая часть**

## 

## §1 Основные определения

Определение 1: (интуитивное).

Арифметическая функция называется частично рекурсивной, если существует алгоритм для нахождения ее значений.

Определение 2:

Под начальными функциями будем понимать следующие функции:

1. функция следования S ;



1. функции выбора

,



1. нулевая функция .



Определение 3: (оператор суперпозиции (подстановка)).

Говорят, что функция получена суперпозицией из функций и , если для всех значений выполняется равенство:



Определение 4: (оператор примитивной рекурсии ).

Говорят, что функция получена из двух функций и с помощью оператора примитивной рекурсии, если имеют место следующие равенства:



.



Это определение применимо и при n=0. Говорят, что функция получена из одноместной функции константы равной и функции , если при всех :



Определение 5: (-оператор или оператор минимизации).



Определим -оператор сначала для одноместных функций.



Будем говорить, что функция получена из частичной функции с помощью оператора, если,



.



В этом случае -оператор называется оператором обращения и -наименьшее .



Теперь определим -оператор в общем виде:



Определение 6:

Функция называется частично рекурсивной функцией (ЧРФ) ,если она может быть получена из начальных функций с помощью конечного числа применений трех операторов: суперпозиции, примитивной рекурсии, -оператора.



Определение 7:

Если - ЧРФ и всюду определена, то она называется рекурсивной функцией.



Определение 8:

Множество - рекурсивно перечислимо (РП), в интуитивном смысле, если существует эффективная процедура, которая выписывает элементы этого множества. Каждый элемент на некотором шаге будет выписан.



Определение 9:

Характеристической функцией множества называется функция



Определение 10:

Множество называется рекурсивным, если характеристическая функция является рекурсивной.



Определение 11:

Функция m-сводима к функции (), в точности тогда, когда существует рекурсивная функция , такая, что



Функция называется сводящей функцией.



Введем отношение m-эквивалентности на множестве .



Определение 12:



Введем понятие m-степени функции .



Определение 13:



Введем понятие m-сводимости множеств.

Определение 14:

Множество m-сводимо к множеству (обозначение ), если существует рекурсивная функция такая, что В этом случае говорят, что m-сводимо к посредством .



Аналогично вводится понятие m-степени множества .



Определение 15:

Частичная характеристическая функция для множества -функция



Определение 16:

ЧРФ – универсальная для множества , если (-рекурсивная функция ) где - ЧРФ с геделевым номером .



Определение 17:

Если на множестве определено бинарное отношение , удовлетворяющее условиям:



1. (рефлексивность);



2. (антисимметричность);



3. (транзитивность),



то множество называется частично упорядоченным, а отношение называется частичным порядком на . Отношение , удовлетворяющее только свойствам 1,3, называется предпорядком на . Если частичный порядок на удовлетворяет условию



4. то называется линейным порядком (или просто порядком), а -линейно упорядоченным множеством или цепью.



Определение 18:

Верхней (нижней) гранью подмножества называется такой элемент что () для любого . Элемент называется max (min) элементом , если () для всех



Если же () для любых ? ,то элемент называется наибольшим (наименьшим).



Определение 19.

Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней множества называется точной верхней (нижней) гранью этого множества.



Определение 20.

Полурешеткой (точнее, верхней полурешеткой) назовем пару где - непустое множество, а -бинарная операция на , удовлетворяющая условиям: для любого



1.



2.



3.



Если - полурешетка, то зададим на частичный порядок следующим соотношением: для



Проверка того, что это частичный порядок, очевидна. Операция является для этого порядка операцией взятия точной верхней грани.



Определение 21:

Множество называется продуктивным, если существует рекурсивная функция , называемая продуктивной функцией для , такая, что



Ясно, что продуктивное множество не может быть р.п. Если бы то Ø, что невозможно.



Определение 22:

Множество называется креативным, если оно р.п. и продуктивно.



Заметим, что креативные множества по теореме Поста не могут быть рекурсивными. Примером креативного множества будет



Действительно



откуда рекурсивная функция является продуктивной функцией для .



Имеет место следующее утверждение: если В - р.п. множество, А -креативно, то - креативно. [1,5]



## §2 Простейшие свойства m – степеней

Ведем отношение частного порядка на множестве m – степеней:



Обозначим через L частично упорядоченное множество m – степеней.

Утверждение 2.1: множество L является верхней полурешеткой.

Доказательство:

Рассмотрим , где



.



Докажем, что эта функция является точной верхней гранью для произвольных ЧРФ α и β.

Рассмотрим γ’:



для рекурсивных функций g, f.



Определим функцию .



Проверим следующие равенства: .



Пусть x=2t, тогда и .



Пусть x=2t+1, тогда и .



Таким образом, равенство справедливо.



Следовательно, функция является точной верхней гранью для произвольных ЧРФ α и β, ч.т.д.



Утверждение 2.2: .



Доказательство:

: Пусть , тогда посредством рекурсивной функции f, которая множество А m – сводит к В.



: Аналогично , ч.т.д.



Следствие: существует изоморфное вложение полурешетки m-степеней рекурсивно перечисляемых множеств в полурешетку m-степеней частичных характеристических функций: .



Утверждение 2.3: .



Доказательство:

Если Ø, то утверждение справедливо.



Пусть Ø. Возьмем , откуда для некоторого ; а так как для некоторой рекурсивной функции f, то и .



Таким образом, , ч.т.д.



Следствие: функции, принадлежащие одной и той же m-степени, имеют одинаковую область значений.

Утверждение 2.4: Пусть f, g – рекурсивные функции, тогда .



Доказательство:

: Следует из следствия к 2.3.



: Пусть : покажем, что , то есть .



Строим таким образом: допустим , начинаем последовательно вычислять g(0), g(1), …, пока не получим, что g(n)=i, а такое n обязательно появится, так как .



Полагаем, что , тогда очевидно, что .



Аналогично строим функцию , такую, что . Отсюда получим, что .



Таким образом, так как и , ч.т.д. [1]



**§3 Минимальные элементы верхней полурешетки m-степеней**

Утверждение 3.1: Наименьшего элемента в L нет.

Доказательство:

Допустим противное, то есть пусть - наименьший в L элемент. Тогда Ø), где сØ – нигде неопределенная функция.



Следовательно, Ø и (сØ).



Возьмем всюду определенную функцию h. Ясно, что сØ≤mh.

С одной стороны, (сØ) – наименьший элемент, то есть сØ≤mh; с другой стороны сØ≤mh.



Получили противоречие, то есть в L наименьшего элемента нет. Ч.т.д.

Утверждение 3.2: m-степень, содержащая универсальную функцию, является наибольшей в L.

Доказательство:

Пусть Ψ – универсальная функция, а α – произвольная ЧРФ. Так как α – ЧРФ, то найдется такое число х0, что α=φ0.

Покажем, что . В качестве сводящей возмем функцию f(x0,y). Тогда из определения Ψ вытекает, что , где , то есть .



Таким образом, - наибольшая в L. Ч.т.д.



Введем обозначение: .



Ясно, что .



Утверждение 3.3: сØ и множество всех функций вида cn(x) и только они образуют множество минимальных в L элементов.

Доказательство.

Из утверждения 3.1. следует, что сØ – минимальный в L элемент.

Возьмем произвольную функцию cn(x).

Пусть .



Ясно, что {}, кроме того α – всюду определенная функция, так как иначе , следовательно, .



Пусть теперь минимальный в L элемент, отличный от сØ и от всех сn, тогда определена в некоторой точке х0; пусть , имеем , где , то есть, . Получили противоречие. Ч.т.д. [1,2]



# 2. Практическая часть.

## 

## §1. Идеалы полурешетки m-степеней частично рекурсивных функций

Определение:

Идеалом полурешетки L назовем всякое подмножество I отличное от Ø, удовлетворяющее следующим условиям:

1. ;



2. .



Идеал называется главным, если он содержит наибольший элемент.

Рассмотрим множество всех m-степеней частичных характеристических функций, то есть:

Н={}.



Предположение 4.1:

Множество Н является главным идеалом полурешетки L.

Доказательство:

1. Берем две степени для некоторых р.п. множеств А и В. точной верхней гранью будет степень, содержащая функцию .



Определим множество АВ:



{}.



Докажем, что .



Будем пользоваться определением 15 для доказательства данного равенства.

Рассмотрим 4 случая.

1. если x=2t,



И если x=2t,



1. Если x=2t,



И если x=2t,



1. Если x=2t+1,



И если x=2t+1,



1. Если x=2t+1,



И если x=2t+1,



Следовательно, равенство справедливо во всех четырех случаях, т.к. обе его части равносильны в рассмотренных случаях.



.



1. Пусть . По определению m-сводимости из следует, что существует рекурсивная функция f такая, что: , откуда . Из утверждения 2.2 и того, что всякое р.п. множество m-сводимо к креативному следует, что: - наибольший элемент в Н, где k – креативно.



Тогда Н – главный идеал полурешетки L. Ч.т.д.

Рассмотрим множество всех m-степеней рекурсивных функций, то есть:

М={}.



Предположение 4.2: Данное множество М является главным идеалом полурешетки L.

Доказательство:

1. Берем две степени рекурсивных функций, их точной верхней гранью будет , где также рекурсивная функция.



1. Если , откуда существует рекурсивная функция h, такая, что , где также рекурсивная функция. Далее, посредством f(x) для любой рекурсивной функции f(x), отсюда - наибольший элемент в М.



М – главный идеал полурешетки L. Ч.т.д.

# Литература

1. Дегтев А.Н. Сводимость частично-рекурсивных функций. – Сибирский математический журнал, 1975 т. 16, №5, с. 970-988.
2. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977.
3. Кагленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. – М.: Мир, 1983.
4. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965.
5. Поляков Е.А., Розинас М.Г. Теория алгоритмов. – Иваново: ИвГУ, 1976.
6. Поляков Е.А., Маринина Н.В. Теория алгоритмов. – Шуя: ШГПУ, 2004.
7. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М.: Мир, 1972.