## Задание 1

Предприятию для изготовления наборов елочных украшений необходимо изготовить их составные части - шар, колокольчик, мишура. Эти данные представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Наименование составных частей | Виды наборов | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Шар | 5 | 6 | 8 | 10 |
| Колокольчик | 3 | 4 | 6 | 0 |
| Мишура | 0 | 3 | 5 | 8 |

В свою очередь для изготовления этих составных частей необходимы три вида сырья - стекло (в г), папье-маше (в г), фольга (в г), потребности в котором отражены в следующей таблице

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид сырья | Составные элементы | | |
| Шар | Колокольчик | Мишура |
| Стекло | 5 | 0 | 0 |
| Папье-маше | 0 | 4 | 0 |
| Фольга | 3 | 0 | 75 |

Требуется:

1) определить потребности в сырье для выполнения плана по изготовлению комплектов первого, второго, третьего и четвертого вида в количестве соответственно x1, x2, x3 и x4 штук;

2) провести подсчеты для значений x1 = 500, x2 = 400, x3 = 300 и x4=200.

Решение: составим условия для определения числа деталей в зависимости от числа и вида наборов. Пусть n1, n2 и n3 - число шаров, колокольчиков и мишуры, соответственно.

Тогда условия будут выглядеть следующим образом:

n1 = 5x1 + 6x2 + 8x3 + 10x4

n2 = 3x1 + 4x2 + 6x3

n3 = 3x2 + 5x3 + 8x4

Составим условия определяющие потребности в сырье в зависимости от вида деталей. Пусть y1, y2 и y3 - потребности в стекле, папье-маше и фольге, соответственно:

y1 = 5n1

y2 = 4n2

y3 = 3n1 + 75n3

Теперь подставим вместо ni - полученные ранее равенства.

y1 = 5· (5x1 + 6x2 + 8x3 + 10x4) = 25x1 + 30x2 + 40x3 + 50x4

y2 = 4· (3x1 + 4x2 + 6x3) = 12x1 + 16x2 + 24x3

y3 = 3· (5x1 + 6x2 + 8x3 + 10x4) + 75· (3x2 + 5x3 + 8x4) = 15x1 + 243x2 + 399x3 + 630x4

Проведем подсчеты для значений

x1 = 500, x2 = 400, x3 = 300 и x4=200.

y1 = 25 \* 500 + 30 \* 400 + 40 \* 300 + 50 \* 200 = 46500 г.

y2 = 12 \* 500 + 16 \* 400 + 24 \* 300 = 19600 г.

y3 = 15 \* 500 + 243 \* 400 + 399 \* 300 + 630 \* 200 = 350400 г.

## Задание 2

Пусть aij - количество продукции j, произведенной предприятием i, а bi - стоимость всей продукции предприятия i исследуемой отрасли. Значения aij и bi заданы матрицами A и В соответственно. Требуется определить цену единицы продукции каждого вида, производимой предприятиями отрасли. В ходе выполнения задания необходимо составить систему уравнений, соответствующую условиям, и решить ее тремя способами (матричный метод, метод Крамера, метод Гаусса).

,



Решение:

Составим систему уравнений:



Матричное уравнение выглядит следующим образом:

A · X = B

Домножим слева каждую из частей уравнения на матрицу A-1

A-1 · A · X = A-1 · B; E · X = A-1 · B; X = A-1 · B

Найдем обратную матрицу A-1

Δ = 12 \* 9 \* 1 + 6 \* 8 \* 10 + 15 \* 5 \* 11 - 15 \* 9 \* 8 - 6 \* 5 \* 1 - 12 \* 10 \* 11 = - 1017

;



=



X =· = =



Решим систему методом Крамера

Δ = - 1017

Δ1 = = 231 \* 9 \* 1 + 238 \* 8 \* 10 + 216 \* 5 \* 11 - 216 \* 9 \* 8 - 238 \* 5 \* 1 - - 231 \* 10 \* 11 = - 9153



Δ2 = = 12 \* 238 \* 1 + 6 \* 8 \* 216 + 15 \* 231 \* 11 - 15 \* 238 \* 8 - 6 \* 231 \* 1 - 12 \* 216 \* 11 = - 7119



Δ3 = = 12 \* 9 \* 216 + 6 \* 231 \* 10 + 15 \* 5 \* 238 - 15 \* 9 \* 231 - 6 \* 5 \* 216 - 12 \* 10 \* 238 = - 11187



x1 = Δ1/Δ = - 9153/ (- 1017) = 9

x2 = Δ2/Δ = - 7119/ (- 1017) = 7

x3 = Δ3/Δ = - 11187/ (- 1017) = 11

Решим систему методом Гаусса

=> => =>



=> => = >



## Задание 3

Найти частные производные первого и второго порядков заданной функции:



Решение:



## Задание 4

Задана функция спроса , где p1, p2 - цены на первый и второй товары соответственно. Основываясь на свойствах функции спроса, определить: какой товар является исследуемым, а какой альтернативным и эластичность спроса по ценам исследуемого и альтернативного товаров. В процессе решения отметить, какими являются данные товары - взаимозаменяемыми или взаимодополняемыми.



Решение: эластичность спроса по цене равна первой производной от функции спроса:



эластичность отрицательная, следовательно, первый товар - исследуемый.



эластичность положительная, следовательно, второй товар - альтернативный.

Товары являются товарами заменителями, т.к рост цен на альтернативный товар приводит к росту спроса.

## Задание 5

В таблице приведены данные о товарообороте магазина за прошедший год (по месяцам). Провести выравнивание данных по прямой с помощью метода наименьших квадратов.

Воспользовавшись найденным уравнением прямой, сделать прогноз о величине товарооборота через полгода и год. Сопроводить задачу чертежом, на котором необходимо построить ломаную эмпирических данных и полученную прямую.

Проанализировав чертеж, сделайте выводы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Товарооборот, (тыс. р) | 18 | 5,6 | 30,5 | 59,3 | 59,3 | 42 | 96,4 | 72,6 | 56,8 | 52 | 38,6 | 33 |

Решение:

Рассчитаем параметры уравнения линейной парной регрессии.

Для расчета параметров a и b уравнения линейной регрессии у = а + bx решим систему нормальных уравнений относительно а и b (она вытекает из метода наименьших квадратов):



По исходным данным рассчитываем Σх, Σу, Σух, Σх2, Σу2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | y | x | yx | x2 | y2 |  |
| 1 | 18,0 | 1 | 18 | 1 | 324,00 | 33,662 |
| 2 | 5,6 | 2 | 11,2 | 4 | 31,36 | 36,089 |
| 3 | 30,5 | 3 | 91,5 | 9 | 930,25 | 38,516 |
| 4 | 59,3 | 4 | 237,2 | 16 | 3516,49 | 40,943 |
| 5 | 59,3 | 5 | 296,5 | 25 | 3516,49 | 43,37 |
| 6 | 42,0 | 6 | 252 | 36 | 1764,00 | 45,797 |
| 7 | 96,4 | 7 | 674,8 | 49 | 9292,96 | 48,224 |
| 8 | 72,6 | 8 | 580,8 | 64 | 5270,76 | 50,651 |
| 9 | 56,8 | 9 | 511,2 | 81 | 3226,24 | 53,078 |
| 10 | 52,0 | 10 | 520 | 100 | 2704,00 | 55,505 |
| 11 | 38,6 | 11 | 424,6 | 121 | 1489,96 | 57,932 |
| 12 | 33,0 | 12 | 396 | 144 | 1089,00 | 60,359 |
| Итого | 564,1 | 78 | 4013,8 | 650 | 33155,51 | 564,13 |

;



;



;



;



Уравнение регрессии:

= 31,235 + 2,427 · х



Рассчитаем по данному уравнению значения для и запишем их в дополнительный столбец исходных данных.



Найдем прогноз на полгода вперед:

= 31,235 + 2,427 \* 18 = 74,921 тыс. руб.



Найдем прогноз на год вперед:

= 31,235 + 2,427 \* 24 = 89,483 тыс. руб.



Полученные графики говорят о плохом отражении исходных данных уравнением прямой. Возможно это связанно с наличием сезонности в товарообороте. Тогда прямая линия является уравнением тренда.

## Задание 6

Исследовать на экстремум следующую функцию:

;



Решение:

Найдем первые частные производные и определим точки потенциальных экстремумов.

= 4x3 + 2xy2; 4x3 + 2xy2 = 0; 2x (2x2 + y2);



2x = 0 или (2x2 + y2) = 0; точка (0, 0)

= 4y3 + 2x2y; 4y3 + 2x2y = 0; 2y (x2 + 2y2);



2y = 0 или (x2 + 2y2) = 0; точка (0, 0)

Найдем вторые производные и их значения в точке (0; 0)

= 12x2 + 2y2; 12 \* 02 + 2 \* 02 = 0 = А



= 2xy; 2 \* 0 \* 0 = 0 = B



= 12y2 + 2x2; 12 \* 02 + 2 \* 02 = 0 = C



Δ = AC - B2 = 0

Следовательно, вопрос об экстремуме остается открытым.

Точка (0; 0) возможный экстремум функции.

## Задача 7

Пусть функция полезности задана как



где x и y - количество товаров А и В, приобретаемых потребителем, а значения функции полезности численно выражают меру удовлетворения покупателя. При данной стоимости единицы товаров А и В, общая сумма, выделяемая покупателем на их покупку, составляет 140 рублей. При каком количестве товаров А и В полезность для потребителя максимальна. А = 21, В = 37.

Решение: полезность максимальна при равенстве первых производных:

= ; = ; = ; =



Ограничение стоимости задается неравенством 21x + 37y ≤ 140

Составим систему.

; ; ;



Максимальная полезность будет достигнута при потреблении 2,14 ед. А и 2,57 ед.в.

## Задание 8

Заданы функции спроса и предложения в зависимости от количества товара Q: и . Под функциями спроса и предложения будем понимать функциональную зависимость цены от количества товара на рынке. Определить излишки потребителя и излишки производителя при равновесном состоянии спроса и предложения.



и ,



Решение: найдем равновесное состояние спроса и предложения:

D (Q) = S (Q); = ; ; - t2 - 6t + 300 = 0



t1 = - 25,12 и t2 = 16,72, t1 - не удовлетворяет условию

; Q = 279,56 ед.



При этом цена составит: Р = 6 \* 16,72 = 100,32 ден. ед.

Излишки потребителя равны площади фигуры ограниченной сверху кривой спроса, снизу равновесной ценой и слева нулевым выпуском. Найдем излишки потребителя:

Sпотр = - 100,32 · 279,56 = - 28045,46 =



= 300 \* 279,56 - 5/14 \* 279,56 - 28045,46 = 55722,7

Излишки производителя равны площади фигуры ограниченной сверху равновесной ценой, слева нулевым выпуском и снизу кривой предложения. Найдем излишки производителя:

Sпроизв = 100,32 · 279,56 - = 28045,46 - =



= 28045,46 - 4 \* 16,723 = 9348,6

## Литература

1. Н.Ш. Кремер. Высшая математика для экономистов. - М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
2. Н.Ш. Кремер. Практикум по высшей математике для экономистов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
3. И.А. Зайцев. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 1998.
4. Математический анализ и линейная алгебра. Учебное методическое пособие. Под ред. Н.Ш. Кремера. - ВЗФЭИ, 2006.