ЗАДАЧА 1

Составить модель оптимального выпуска продукции для цеха кондитер­ской фабрики. Виды выпускаемой продукции (М), виды основного сырья (П) и его запасы, нормы расхода сырья на единицу, уровни прибыли приведены в таб­лице. Рассчитать план и провести его анализ.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды сырья | Расходы сырья на единицу  продукции | | | Общий запас  сырья, ед. | |
| М1 | М2 | М3 |
| П1 | 2 | 4 | 3 | 266 |
| П2 | 1 | 3 | 4 | 200 |
| П3 | 3 | 2 | 1 | 303 |
| Уровень прибыли  на ед. продукции | 20 | 24 | 28 |  |

Содержание задачи.

Цех кондитерской фабрики вырабатывает три ассортиментные группы конфет, условно обозначенные М1, М2, М3 /в ед./.

Для их производства используются основные виды ресурсов /сырья/ трех видов, условно названных П1, П2, П3 /в ед./.

Расход каждого ресурса на производство единицы продукции является за­данной величиной, определяется по рецептуре и обозначается символами а11, a12..., а33, где а - норма расхода, первая подстрочная 1 – номер ресурса, вторая подстрочная 1, 2, 3 – номер ассортиментной группы конфет.

Наличие каждого ресурса для производства всех, групп конфет принимает­ся как известная величина и обозначается символами в1, в2, в3.

Прибыль на продукцию также принимается как известная величина и обо­значается символами c1, c2, с3.

Перечисленные параметры являются величинами известными и выражают­ся в единых единицах измерения, кроме прибыли. Прибыль или другой какой показатель, являющийся критерием оптимальности, выражается в единицах из­мерения дохода /например, прибыли/, получаемого от производства единицы продукции в денежном или другом каком-нибудь выражении.

Поскольку решение задачи заключается в поиске такого плана производст­ва, который обеспечивал бы в принятых условиях наибольший доход, принима­ются те величины, которые являются неизвестными и обозначающими количест­ва каждой группы конфет, включаемых в план производства: x1 для M1; х2 для М2; х3 для М3.

Экономико-математическая модель в символическом виде.

Система ограничений



Целевая функция /суммарный доход/ F = с1х1 + с2х2 + с3х3 = мах

Условия неотрицательности неизвестных х1 ≥ 0, х2 ≥ 0, х3 ≥ 0

Символическая модель, наполненная численной информацией, будет иметь следующий вид:

2x1 + 4x2 + 3x3 ≤ 266

1x1 + 3x2 + 4x3 ≤ 200

3x1 + 2x2 + 1x3 ≤ 303

Прибыль от реализации выпускаемой продукции должна быть максималь­ной, то есть *F* = 20х1 + 24х2 + 28х3= max;

Решение задачи.

Для решения задачи симплексным методом неравенства преобразуются в эквивалентные равенства путем добавления в каждое неравенство по одному до­полнительному неизвестному с коэффициентом + 1 и нулевым уравнением при­были. Для удобства расчетов левые и правые части уравнений меняются места­ми. В этом случае исходные неравенства примут вид симплексных уравнений:

266 = 2x1 + 4x2 + 3x3 + 1x4

200 = 1x1 + 3x2 + 4x3 + 1x5

303 = 3x1 + 2х2 + 1x3 + 1x6

F = 20х1 + 24х2 + 28х3 + 0x4 + 0x5 + 0x6

Коэффициенты при неизвестных записываются в симплексной таблице, в которой выполняются расчеты и отражаются полученные результаты.

Исходная таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cj | p0 | x0 | 20 | 24 | 28 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 |
| 0 | х4 | 266 | 2 | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | х5 | 200 | 1 | 3 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | х6 | 303 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Zj - Cj | | 0 | -20 | -24 | -28 | 0 | 0 | 0 |

В столбцах таблицы записывают: в первом (Cj) – прибыль единицы про­дукции, которая вводится в план выпуска; во втором (Р0) – неизвестные, вклю­чаемые в план; в третьем (Х0) – свободные величины; в остальных – коэффици­енты при неизвестных уравнений. В верхней части этих столбцов отражаются коэффициенты при неизвестных целевой функции.

В нижней строке (целевой) записываются получаемые расчетным путем показатели: в столбце х0 – суммарная прибыль планового выпуска, в остальных столбцах – прибыль единицы продукции с отрицательным знаком.

В последних трех столбцах коэффициенты при дополнительных неизвест­ных, равные единице, расположены по диагонали. Эта часть таблицы, называе­мая единичной подматрицей, необходима для вычислительных и аналитических целей.

При решении задач на максимум целевой функции наличие в целевой строке отрицательных чисел указывает на возможность начала или продолжения решения задачи. Порядок решения таков: из отрицательных чисел целевой строки выбирается наибольшее по модулю. Столбец, в котором оно находится, принимается за ключевой (или разрешающий) и для удобства расчетов выделя­ется. В нашем примере таким столбцом будет Х3, имеющий в целевой строке наибольшую по модулю величину -28.

1-ая итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cj | p1 | x0 | x1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 |
| 0 | х4 | 116 | 1.3 | 1.75 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| 28 | х3 | 50 | 0.3 | 0.75 | 1 | 0 | 0.3 | 0 |
| 0 | х6 | 253 | 2.8 | 1.25 | 0 | 0 | -0 | 1 |
| Zj - Cj | | 1400 | -13 | -3 | 0 | 0 | 7 | 0 |

Затем элементы столбца Х0 (свободные величины) делят на соответствую­щие коэффициенты ключевого столбца и полученные результаты сопоставляют между собой. Строка с наименьшим отношением принимается за ключевую и также для удобства выделяется. В нашем случае 266/3 = 88,7; 200/4 = 50; 303/1 = 303. Наименьшее отношение 50 имеет срока х5, она и будет ключевой. Ключевой элемент 4.

Далее элементы таблицы преобразуются и записываются в новую таблицу. Первоначально преобразуют элементы ключевой строки путем деления их на ключевой элемент. Преобразованные элементы записывают в том же самом месте.

В столбцах Ро и Cj занимают место вводимая в план неизвестная х3 с при­былью 28 (итерация 1-я). Остальные элементы преобразуются по следующему правилу:

- для преобразуемого элемента в его столбце находят элемент ключевой строки, а в его строке - элемент ключевого столбца;

- соответствующие элементы ключевой строки и ключевого столбца пере­множаются и полученное произведение делят на ключевой момент;

- частное от деления вычитают из значения элемента, которое он имел до преобразования, и полученный результат будет преобразованным элементом, ко­торый записывается в новую таблицу в том же самом месте. Следуя этому пра­вилу, преобразование элементов столбца х0 будет:



Включение на первой итерации в план неизвестной х3 обеспечит сумму прибыли 1400 руб.

Решение задачи продолжается, так как в целевой строке два отрицатель­ных элемента. Наибольший по модулю элемент -13. Он находится в столбце х1, который принимается за ключевой, а ключевой строкой будет х6 (116:1,3=92,8; 50:0,3=200; 253:2,8=92), ключевым элементом 2,8. Элементы таблицы преобра­зуются в том же порядке по изложенному правилу и записываются в новую таб­лицу.

2-я итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cj | p2 | x0 | x1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 |
| 0 | х4 | 1 | 0 | 1.18 | 0 | 1 | -1 | -0.5 |
| 28 | х3 | 27 | 0 | 0.64 | 1 | 0 | 0.3 | -0.1 |
| 13 | х1 | 92 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Zj - Cj | | 2596 | 0 | 2.91 | 0 | 0 | 5.8 | 4.7 |

В последней таблице целевая строка имеет только положительные элемен­ты. Это значит, что составленный план оптимален и дальнейшее улучшение его невозможно.

Как видно из таблицы, оптимальный план предусматривает выпуск про­дукции П1 27 ед. (х1 = 27), П3 92 ед. (х3 = 92), дополнительного неизвестного П4 1 ед. (х4 = 1). П2 и дополнительные неизвестные в план не вошли, следовательно, х2 = 0, х5 = 0 х6 = 0. Подставив значения неизвестных в уравнения, получим:

2 \* 92 + 4 \* 0 + 3 \* 27 + 1 = 266

1 \* 92 + 3 \* 0 + 4 \* 27 + 0 = 200

3 \* 92 + 2 \* 0 + 1 \* 27 + 0 = 303

F = 20 \* 92 + 24 \* 0 + 27 \* 28 = 2596

Анализ оптимального плана.

а) Запасы сырья трех видов используются не полностью, так как х4 = 1, а х5 = х6 = 0.

б) Рассмотрим элементы матрицы.

От выпуска продукции II следует отказаться.

Элементы столбца х5 показывают, что увеличение запасов сахара на I ед. (х5 = 1) позволит увеличить выпуск продукции III вида на 0,3 ед. Сумма прибыли увеличится на 5,8 руб.

Элементы столбца х6 показывают, что увеличение запасов жира на I ед. (х6 = 1) позволит уменьшить выпуск только продукции III вида на 0,1 ед. (27 - 0.1) Сумма при­были увеличится на 4,7 руб.

Снижение запасов сырья приводит к изменениям выпуска продукции и суммы прибыли в обратном порядке.

Элементы целевой строки оптимального плана называются двойственными оценками, которые определяют величину изменения прибыли при изменении за­пасов сырья на I ед.

ЗАДАЧА 2

Требуется определить минимальную по стоимости смесь сырья для изго­товления пищевых концентратов, которые должны содержать питательные ве­щества (П). Эти вещества содержаться в сырье (М) в различных сочетаниях. Со­держание питательных веществ в сырье и готовом продукте, а также цена на ка­ждый вид сырья показаны в таблице.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Питательные вещества | Виды сырья | | | Минимальное содержание  (единиц) питательных веществ  в готовом продукте |
| M1 | М2 | М3 |
| П1 | 1 | 1 | 0 | 50 |
| П2 | 4 | 1 | 3 | 140 |
| П3 | 1 | 4 | 1 | 127 |
| П4 | 0 | 3 | 2 | 80 |
| Цена за единицу сырья, руб. | 8 | 12 | 10 |  |

Виды используемого сырья условно обозначены через М1, М2, М3; содер­жание питательных веществ в сырье и готовом продукте обозначены П1, П2, П3, П3.

Исходные условия задачи выражаются неравенствами:

1х1 + 1х2 + 0х3 ≥ 50

4х1 + 1х2 + 3х3 ≥ 140

1х1 + 4х2 + 1х3 ≥ 127

0х1 + 3х2 + 2х3 ≥ 80

*F =* 8х1 + 12х2 + 10х3 = min

Умножив обе части неравенств на -1, получим систему с другим направле­нием знака неравенств:

-1х1 - 1х2 - 0х3 ≥ -50

-4х1 - 1х2 - 3х3 ≥ -140

-1х1 - 4х2 - 1х3 ≥ -127

0х1 - 3х2 - 2х3 ≥ -80

*F =* 8х1 + 12х2 + 10х3 = min

Преобразуем неравенства в эквивалентные равенства с помощью дополни­тельных неизвестных. Симплексные уравнения будут следующими:

-50 = -1х1 - 1х2 - 0х3 + 1х4 + 0х5 + 0х6 + 0х7

-140 = -4х1 - 1х2 - 3х3 + 0х4 + 1х5 + 0х6 + 0х7

-127 = -1х1 - 4х2 - 1х3 + 0х4 + 0х5 + 1х6 + 0х7

-80 = 0х1 - 3х2 - 2х3 + 0х4 + 0х5 + 0х6 + 1х7

*F =* 8х1 + 12х2 + 10х3 + 0х4 + 0х5 + 0х6 + 0х7 = min

Записанные уравнения отличаются от тех, которые нами рассматривались выше, тем, что коэффициенты при основных неизвестных и свободные члены имеют отрицательные знаки.

Решение таких задач производится двойственным симплексным методом. Система симплексных уравнений записывается в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cj | p0 | x0 | 8 | 12 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 | х7 |
| 0 | х4 | -50 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | х5 | -140 | -4 | -1 | -3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | х6 | -127 | -1 | -4 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | х7 | -80 | 0 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Zj - Cj | | 0 | -8 | -12 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Элементы целевой строки рассчитывают по обычным правилам и получа­ют отрицательные знаки.

В отличие от вычислительной процедуры основного симплексного метода решение задач двойственным методом выполняется в обратном порядке.

В итоговом столбце свободные числа имеют отрицательные знаки. Это яв­ляется свидетельством того, что данный план нельзя считать допустимым, так как он противоречит экономическому смыслу. План можно считать допустимым только тогда, когда в итоговом столбце не будет отрицательных чисел.

Ликвидация отрицательных чисел в итоговом столбце начинается с наи­большего по абсолютной величине. В нашем примере таким числом является (-140). Строка х5, в которой находится это число, принимается за ключевую и со­ответственно выделяется.

Определив ключевую строку, находим ключевой столбец. Для этого нужно элементы целевой строки разделить на элементы ключевой строки и из получен­ных отношений выбрать наименьшее. Столбец, имеющий наименьшее отноше­ние, принимается за ключевой и так же как ключевая строка, выделяется.

Столбцы х1, х2, х3 будут иметь следующие отно­шения:

****

Наименьшее отношение имеет столбец х1,он и будет являться ключевым.

Определив ключевую строку, ключевой столбец и ключевое число, по обычным правилам преобразуются все элементы матрицы и записываются в но­вой таблице.

1-я итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cj | p0 | x0 | 18 | 15 | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 | х7 |
| 0 | х4 | -15 | 0 | -0.75 | 0.75 | 1 | -0.25 | 0 | 0 |
| 8 | х1 | 35 | 1 | 0.25 | 0.75 | 0 | -0.25 | 0 | 0 |
| 0 | х6 | -92 | 0 | -3.75 | -0.25 | 0 | -0.25 | 1 | 0 |
| 0 | х7 | -80 | 0 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Zj - Cj | | 280 | 0 | -10 | -4 | 0 | -2 | 0 | 0 |

После преобразования элементов в итоговом столбце осталось еще три от­рицательных числа в строке х4, х6 и х7. Наибольшим по абсолютной величине яв­ляется число в строке х6. Эта строка будет принята за ключевую для последую­щего расчета. Ключевой столбец определяется по наименьшему отношению эле­ментов целевой строки к элементам ключевой строки. Им будет столбец х2. Вво­дим этот вид сырья в программу вместо неизвестного х6. По общим правилам преобразуем элементы матрицы.

2-я итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cj | p0 | x0 | x1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 | х7 |
| 0 | х4 | 3.4 | 0 | 0 | 0.8 | 1 | -0.2 | -0.2 | 0 |
| 8 | х1 | 28.9 | 1.0 | 0.0 | 0.7 | 0.0 | -0.3 | 0.1 | 0.0 |
| 15 | х2 | 24.5 | 0.0 | 1.0 | 0.1 | 0.0 | 0.1 | -0.3 | 0.0 |
| 0 | х7 | -6.4 | 0.0 | 0.0 | -1.8 | 0.0 | 0.2 | -0.8 | 1.0 |
| Zj - Cj | | 525.3 | 0.0 | 0.0 | -3.3 | 0.0 | -1.3 | -2.7 | 0.0 |

После преобразования элементов в итоговом столбце осталось еще одно отрицательное число в строке х7. Эта строка будет принята за ключевую для по­следующего расчета. Ключевой столбец определяется по наименьшему отноше­нию элементов целевой строки к элементам ключевой строки. Им будет столбец х3. Вводим этот вид сырья в программу вместо неизвестного х7. По общим пра­вилам преобразуем элементы матрицы.

В таблице записаны преобразованные числа, полученные на 3-й итерации. В итоговом столбце все отрицательные числа исчезли, значит полученный план является допустимым и одновременно оптимальным. Вывод о том, что план по­лучен оптимальный, позволяют сделать элементы целевой строки. Все они отри­цательны или равны нулю, что свидетельствует об оптимальности результата при решении задач на минимум целевой функции.

3-я итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| cj | p0 | x0 | x1 | х2 | х3 | х4 | х5 | х6 | х7 |
| 0 | х4 | 0.6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | -0.1 | -0.6 | 0.4 |
| 8 | х1 | 26.3 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -0.2 | -0.3 | 0.4 |
| 15 | х2 | 24.3 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | -0.3 | 0.0 |
| 10 | х3 | 3.6 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | -0.1 | 0.4 | -0.6 |
| Zj - Cj | | 537.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -1.7 | -1.2 | -1.9 |

Подставив значения неизвестных в исходные неравенства, получаем:

1 \* 26,3 + 1 \* 24,3 + 0 \* 3,6 ≥ 50

4 \* 26,3 + 1 \* 24,3 + 3 \* 3,6 ≥ 140

1 \* 26,3 + 4 \* 24,3 + 1 \* 3,6 ≥ 127

0 \* 26,3 + 3 \* 24,3 + 2 \* 3,6 ≥ 80

Стоимость сырья при этом будет минимальной и составит:

*F =* 8 \* 26,3 + 12 \* 24,3 + 12 \* 3,6 = 537,2

ЗАДАЧА 3

Составить оптимальный план перевозок пищевых продуктов от 4-х по­ставщиков к 6-ти потребителям. Поставщики (П), потребители (М), объемы вы­воза и завоза, кратчайшие расстояния между пунктами вывоза и завоз приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики | Потребители | | | | | | Объемы вывоза, т |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| П1 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 144 |
| П2 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | 148 |
| П3 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | 76 |
| П4 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | 132 |
| Объемы завоза, т | 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |  |

Решение задачи начинается с распределения у имеющихся у поставщиков объемов вывоза между потребителями с учетом объемов завоза. Для первоначального распределения используются способы: северо-западного угла, наименьшего элемента по строке, наименьшего элемента по столбцу, наименьшего элемента матрицы.

Способ северо-западного угла состоит в том, что распре­деление объемов вывоза производится, начиная с верхнего лево­го угла таблицы и кончая нижним углом ее. Результаты распреде­ления показаны в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
| 92 | 52 |  |  |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | -6 |
|  | 32 | 80 | 36 |  |  |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | 6 |
|  |  |  | 76 | 0 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | 15 |
|  |  |  |  | 96 | 36 |
| Потенциалы столбцов | | 24 | 30 | 36 | 39 | 15 | -7 |  |

Проверка плана на оптимальность. Когда исходный план получен и рассчитана соответствующая ему суммарная тонно-километровая работа, определяют, является ли этот план оптимальным. Для проверки плана на оптимальность применяется метод потенциалов.

Сущность метода потенциалов состоит в том, что для каж­дой строки и каждого столбца таблицы (матрицы) определяют спе­циальные числа, называемые потенциалами. С помощью этих потен­циалов можно установить, нужно ли заполнять свободную клетку матрицы или ее нужно оставить незаполненной.

Для решения задач методом потенциалов исходный план дол­жен иметь количество заполненных клеток m + n – 1 (m - число строк, n - число столбцов). Если план не отвечает этим требованиям, то не для всех строк и столбцов можно рассчи­тать потенциалы, а без них нельзя проверить план на оптималь­ность.

Потенциалы строк и столбцов определяются по заполненным клеткам, находящимся на их пересечении.

Элемент заполненной клетки должен равняться сумме потен­циалов строки и столбца, на пересечении которых находится эта заполненная клетка.

Для начала вычислений первый потенциал для строки или столбца принимается условно равным нулю, все остальные потенциалы определяются с помощью элементов заполненных клеток.

Обозначив потенциалы строк ui, потенциалы столбцов Vj, элементы заполнения клеток , можно записать порядок расчета потенциалов для общего случая.

Из основного требования  = ui + Vj вытекает:

ui =  - Vj; Vj =  - ui

Из этих выражений видно, что для расчета потенциала строки необходимо иметь заполненную клетку, в столбце которой потенциал уже определен, а для расчета потенциала столбца нужна заполненная клетка, имеющая потенциал в строке.

Потенциалы показаны в таблице.

После того, как по строкам и столбцам определены потенциа­лы, с их помощью выясняется, является ли план оптимальным, и если нет, то как его можно улучшить. С этой целью для каждой свободной клетки вычисляется сумма потенциалов строк и столбцов, на пересечении которых находится эта клетка.

Сравнение суммы потенциалов с величиной элемента в свобод­ных клетках позволяет определить, нужно ли заполнять эту клетку или ее нужно оставить свободной.

При решении задач на минимум функционала (в нашем случае на минимум тонно-километровой работы) не заполняются те свобод­ные клетки, в которых сумма потенциалов меньше величины эле­мента (в нашем случае - расстояния).

Иными словами, если характеристика, значение которой равно разности  - (ui + Vj), положительная, то свободная мет­ка не заполняется при решении задачи на минимум функции.

Свободные клетки, имеющие нулевое значение характеристики, показывают на то, что их заполнение приведет к перераспределению поставок, но объем работ (значение функционала) останется неиз­менным.

Суммы потенциалов, значения элементов и характеристики для незаполненных клеток приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры клеток | П1-М3 | П1-М4 | П1-М5 | П1-M6 | П2-М1 | П2-М5 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М2 | П3-М3 | П3-М6 | П4-М1 | П4-М2 | П4-М3 | П4-М4 |
| Суммы потенциалов | 36 | 39 | 15 | -7 | 18 | 9 | -13 | 30 | 36 | 42 | -1 | 39 | 45 | 51 | 54 |
| Значение элементов | 42 | 15 | 39 | 21 | 9 | 27 | 29 | 24 | 22 | 20 | 23 | 11 | 36 | 27 | 40 |
| Характеристики | 6 | -24 | 24 | 28 | -9 | 18 | 42 | -6 | -14 | -22 | 24 | -28 | -9 | -24 | -14 |

В первоначальном плане шесть клеток имеют положительные характеристики, в девяти клетках характеристики отрицательные.

Так как задача решается на минимум целевой функции, то именно эти отрицательные клетки должны быть заполнены поставщиками. Но заполнение свободной клетки и связанное с ним пере­распределение поставок производится не изолированно, а в связи с несколькими заполненными клетками. Эта связь выявляется путем построения замкнутых многоугольников, вершинами которых явля­ются клетки таблицы. Одна вершина многоугольника находится в свободной клетке, а все остальные - в заполненных клетках. Многоугольник, или как его называют цепь, имеет прямые углы и четное число вершин.

В результате перераспределения в каждой вершине (клетке) цепи происходит изменение величины поставок: в одних клетках они увеличиваются, в других - уменьшаются.

Те клетки цепи, у которых поставки увеличиваются, называ­ются положительными, а те, у которых поставки уменьшаются - отрицательными. Каждая цепь имеет одинаковое число положитель­ных и отрицательных вершин (клеток). Положительные и отрица­тельные вершины чередуются. Если свободную клетку, в которую предполагается произвести запись, принять как положительную (поскольку изменение произойдет в сторону увеличения), то сле­дующая клетка будет отрицательной, затем опять положительной, снова отрицательной, и т.д.

Из свободных клеток для заполнения выбирают обычно клетку, которая имеет наибольшую отрицательную характеристику. В нее записывают самую наименьшую величину из отрицательных вершин цепи.

+П4М1 -П1М1 +П1М2 -П2М2 +П2М4 -П3М4 +П3М5 -П4М5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
| 60 | 84 |  |  |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | -6 |
|  |  | 80 | 68 |  |  |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | 6 |
|  |  |  | 44 | 32 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | 15 |
| 32 |  |  |  | 64 | 36 |
| Потенциалы столбцов | | 24 | 30 | 36 | 39 | 15 | -7 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры  клеток | П1-М3 | П1-М4 | П1-М5 | П1-М6 | П2-М1 | П2-М2 | П2-М5 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М2 | П3-М3 | П3-М6 | П4-М2 | П4-М3 | П4-М4 |
| Суммы  потенциалов | 36 | 39 | 15 | -7 | 18 | 24 | 9 | -13 | 30 | 36 | 42 | -1 | 45 | 51 | 54 |
| Значение  элементов | 42 | 15 | 39 | 21 | 9 | 24 | 27 | 29 | 24 | 22 | 20 | 23 | 36 | 27 | 40 |
| Характеристики | 6 | -24 | 24 | 28 | -9 | 0 | 18 | 42 | -6 | -14 | -22 | 24 | -9 | -24 | -14 |

+П2М5 -П4М5 +П4М1 -П1М1 +П1М4 -П2М4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
| 16 | 84 |  | 44 |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | 18 |
|  |  | 80 | 68 |  |  |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | -22 |
|  |  |  |  | 76 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | -13 |
| 76 |  |  |  | 20 | 36 |
| Потенциалы столбцов | | 24 | 30 | 12 | 15 | 43 | 21 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры  клеток | П1-М3 | П1-М5 | П1-М6 | П2-М1 | П2-М2 | П2-М5 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М2 | П3-М3 | П3-М4 | П3-М6 | П4-М2 | П4-М3 | П4-М4 |
| Суммы  потенциалов | 12 | 43 | 21 | 42 | 48 | 61 | 39 | 2 | 8 | -10 | -7 | -1 | 17 | -1 | 2 |
| Значение  элементов | 42 | 39 | 21 | 9 | 24 | 27 | 29 | 24 | 22 | 20 | 45 | 23 | 36 | 27 | 40 |
| Характеристики | 30 | -4 | 0 | -33 | -24 | -34 | -10 | 22 | 14 | 30 | 52 | 24 | 19 | 28 | 38 |

+П2М5 -П4М5 +П4М1 -П1М1 +П1М4 -П2М4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
|  | 84 |  | 60 |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | 18 |
|  |  | 80 | 52 | 16 |  |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | 12 |
|  |  |  |  | 76 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | 21 |
| 92 |  |  |  | 4 | 36 |
| Потенциалы столбцов | | -10 | 30 | 12 | 15 | 9 | -13 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры  клеток | П1-М1 | П1-М3 | П1-М5 | П1-М6 | П2-М1 | П2-М2 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М2 | П3-М3 | П3-М4 | П3-М6 | П4-М2 | П4-М3 | П4-М4 |
| Суммы  потенциалов | -10 | 12 | 9 | -13 | 8 | 30 | 5 | 2 | 42 | 24 | 27 | -1 | 51 | 33 | 36 |
| Значение  элементов | 24 | 42 | 39 | 21 | 9 | 24 | 29 | 24 | 22 | 20 | 45 | 23 | 36 | 27 | 40 |
| Характеристики | 34 | 30 | 30 | 34 | 1 | -6 | 24 | 22 | -20 | -4 | 18 | 24 | -15 | -6 | 4 |

+П3М2 -П1М2 +П1М4 -П2М4 +П2М5 -П3М5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
|  | 32 |  | 112 |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | -2 |
|  |  | 80 |  | 68 |  |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | -8 |
|  | 52 |  |  | 24 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | 1 |
| 92 |  |  |  | 4 | 36 |
| Потенциалы столбцов | | 10 | 30 | 32 | 15 | 29 | 7 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры  клеток | П1-М1 | П1-М3 | П1-М5 | П1-М6 | П2-М1 | П2-М2 | П2-М4 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М3 | П3-М4 | П3-М6 | П4-М2 | П4-М3 | П4-М4 |
| Суммы  потенциалов | 10 | 32 | 29 | 7 | 8 | 28 | 13 | 5 | 2 | 24 | 7 | -1 | 31 | 33 | 16 |
| Значение  элементов | 24 | 42 | 39 | 21 | 9 | 24 | 33 | 29 | 24 | 20 | 45 | 23 | 36 | 27 | 40 |
| Характеристики | 14 | 10 | 10 | 14 | 1 | -4 | 20 | 24 | 22 | -4 | 38 | 24 | 5 | -6 | 24 |

+П4М3 -П2М3 +П2М5 -П4М5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
|  | 32 |  | 112 |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | -2 |
|  |  | 76 |  | 72 |  |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | -8 |
|  | 52 |  |  | 24 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | -5 |
| 92 |  | 4 |  |  | 36 |
| Потенциалы столбцов | | 16 | 30 | 32 | 15 | 29 | 13 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры  клеток | П1-М1 | П1-М3 | П1-М5 | П1-М6 | П2-М1 | П2-М2 | П2-М4 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М3 | П3-М4 | П3-М6 | П4-М2 | П4-М4 | П4-М5 |
| Суммы  потенциалов | 16 | 32 | 29 | 13 | 14 | 28 | 13 | 11 | 8 | 24 | 7 | 5 | 25 | 10 | 24 |
| Значение  элементов | 24 | 42 | 39 | 21 | 9 | 24 | 33 | 29 | 24 | 20 | 45 | 23 | 36 | 40 | 30 |
| Характеристики | 8 | 10 | 10 | 8 | -5 | -4 | 20 | 18 | 16 | -4 | 38 | 18 | 11 | 30 | 6 |

+П2М1 -П2М3 +П4М3 -П4М1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
|  | 32 |  | 112 |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | -2 |
| 76 |  |  |  | 72 |  |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | -8 |
|  | 52 |  |  | 24 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | 0 |
| 16 |  | 80 |  |  | 36 |
| Потенциалы столбцов | | 11 | 30 | 27 | 15 | 29 | 8 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры  клеток | П1-М1 | П1-М3 | П1-М5 | П1-М6 | П2-М2 | П2-М3 | П2-М4 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М3 | П3-М4 | П3-М6 | П4-М2 | П4-М4 | П4-М5 |
| Суммы  потенциалов | 11 | 27 | 29 | 8 | 28 | 25 | 13 | 6 | 3 | 19 | 7 | 0 | 30 | 15 | 29 |
| Значение  элементов | 24 | 42 | 39 | 21 | 24 | 30 | 33 | 29 | 24 | 20 | 45 | 23 | 36 | 40 | 30 |
| Характеристики | 13 | 15 | 10 | 13 | -4 | 5 | 20 | 23 | 21 | 1 | 38 | 23 | 6 | 25 | 1 |

+П2М2 -П2М5 +П3М5 -П3М2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и объемы вывоза, т | | Потребители и объемы завоза | | | | | | Потенциалы строк |
| М1 | М2 | М3 | М4 | М5 | М6 |
| 92 | 84 | 80 | 112 | 96 | 36 |
| П1 | 144 | 24 | 30 | 42 | 15 | 39 | 21 | 0 |
|  | 32 |  | 112 |  |  |
| П2 | 148 | 9 | 24 | 30 | 33 | 27 | 29 | -6 |
| 76 | 52 |  |  | 20 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| П3 | 76 | 24 | 22 | 20 | 45 | 21 | 23 | -12 |
|  |  |  |  | 76 |  |
| П4 | 132 | 11 | 36 | 27 | 40 | 30 | 8 | -4 |
| 16 |  | 80 |  |  | 36 |
| Потенциалы столбцов | | 15 | 30 | 31 | 15 | 33 | 12 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шифры  клеток | П1-М1 | П1-М3 | П1-М5 | П1-М6 | П2-М3 | П2-М4 | П2-М6 | П3-М1 | П3-М2 | П3-М3 | П3-М4 | П3-М6 | П4-М2 | П4-М4 | П4-М5 |
| Суммы  потенциалов | 15 | 31 | 33 | 12 | 25 | 9 | 6 | 3 | 18 | 19 | 3 | 0 | 26 | 11 | 29 |
| Значение  элементов | 24 | 42 | 39 | 21 | 30 | 33 | 29 | 24 | 22 | 20 | 45 | 23 | 36 | 40 | 30 |
| Характеристики | 9 | 11 | 6 | 9 | 5 | 24 | 23 | 21 | 4 | 1 | 42 | 23 | 10 | 29 | 1 |

Все свободные клетки имеют положительные характеристики, которые свидетельствуют о том, что дальнейшее улучшение плана невозможно и полученный план является оптимальным.

Объем работ составит: 32 \* 30 + 112 \* 15 + 76 \* 9 + 52 \* 24 + 20 \* 27 + 76 \* 21 + 16 \* 11 + 80 \* 27 + 36 \* 8 = 9332 ткм.