Контрольная работа

по высшей математике

по теме:

Решения неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Комплексные числа

Выполнила:

Студентка II курса

Экономического факультета

Очного отделения

2007г

**I.** у″ - 4y′ + 4y = соs4х

у = U + - общ. реш. н. д. у.

у″ - 4у′ + 4у = 0

k2 - 4k + 4 = 0

k1; 2 = 2

1) U =?

U = C1e2x + С2е2х ∙ х

2) =? = Acos4x + Bsin4x′ = - 4Asin4x + 4Bcos4x

y″ = - 16Acos4x - 16Bsin4x

16Acos4x - 16Bsin4x + 16Asin4x + 16Bcos4x + 4Acos4x +4Bsin4x =

= cos4x + 0 ∙ sin4x

12Acos4x - 12Bsin4x + 16Asin4x + 16Bcos4x = cos4x + 0 ∙ sin4x

12A + 16A = 016B - 12B = 0

4A = 04B = 0

A = 4 B = 4

= 4cos4x + 4sin4x

y = C1e2x + C2e2x · x + 4cos4x + 4sin4x - общее решение н. д. у.

Найдем частное решение при условии:

у (0) = 1 у′ (0) = 0

у′ = 2С1e2x + 2C2e2x · x - 16sin4x + 16cos4x

1 = C1 + C2 + 4С1 + С2 = 3 С1 + 13 = 3

0 = 2C1 + 2C2 + 162С1 + 2С2 = 16

С1 + С2 = 13

С1 = - 10С2 = 13

у = - 10е2х + 13е2х· x + 4cos4x + 4sin4x - частное решение при заданных условиях

**II.** у″ - 4y′ + 4y = 5х2 + 3х + 1

у = U + - общее решение н. д. у.

у″ - 4у′ + 4у = 0

k2 - 4k + 4 = 0

k1; 2 = 2

1) U =?

U = C1e2x + С2е2х ∙ х

2) =? = Ах2 + Вх + С′ = 2Ах + В

у″ = 2А

2А - 8В + 4В + 4Ах + 4Вх + 4С = 5х2 + 3х + 1

4А = 5А = 5/4 В = 3 С = 1/4

8А + 4В = 3

2А - 4В + 4С = 1

= 5/4х2 + 3 + 1/4

у = C1e2x + С2е2х ∙ х + 5/4х2 + 3 + 1/4 - общее решение н. д. у.

Найдем частное решение при условии:

у (0) = 1 у′ (0) = 0

у′ = 2С1e2x + 2C2e2x + 5/2х - 1/8

1 = C1 + C2 + 5/4 C1 + C2 = 1/4

0 = 2C1 + 2C2 + 5/22C1 + 2C2 = 5/2

C1 + С2 = 9/4

C1 = - 2С2 = 9/4

у = - 2e2x + 9/4е2х ∙ х + 5/4х2 + 3 + 1/4 - частное решение при заданных условиях.

**III.** у″ - 4у′ + 4у = 2е5х

у = U + - общее решение н. д. у.

у″ - 4у′ + 4у = 0

k2 - 4k + 4 = 0

k1; 2 = 2

1) U =?

U = C1e2x + С2е2х ∙ х

2) =? = Ае5х ′ = 5А5х

у″ = 25Ае5х

25Ае5х - 20Ае5х + 4А5х = 2е5х

9А5х = 2е5х

А = 2/9 = 2/9е5х

у = C1e2x + С2е2х ∙ х + 2/9е5х - общее решение н. д. у.

Найдем частное решение при условии:

у (0) = 1 у′ (0) = 0

у′ = 2C1e2x + 2С2е2х ∙ х + 10/9е5х

1 = C1 + С2 + 2/9C1 + С2 = 7/9

0 = 2C1+ 2С2+ 10/92C1+ 2С2 = 10/9

C1 + С2 = 1/3

C1 + 1/3 = 7/9

С1 = 4/9 С2 = 1/3

у = 4/9e2x + 1/3е2х ∙ х + 2/9е5х - частное решение при заданных условиях.

## Комплексные числа

√ - 1 = i - мнимое число

(√ - 1) 2 = i 2 i 2 = - 1

i 3 = i 2 ∙ i = - 1 ∙ i = - i

i 4 = i 2 ∙ i 2 = ( - 1) ∙ ( - 1) = 1

а + вi - комплексные числа, где: а, в - действительные числа или а, в є R

Геометрический смысл комплексного числа:

в

. (а; в)

ρ в ρ = √ а 2 + в 2 = ⎜а + вi⎥

) d а

а d = arctg в/а –

аргумент комплексного числа

(находится с учетом четверти)

tg

нет

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| d | 0 0 | П/6 | П/4 | П/3 | П/2 |
| tg | 0 | √ 3/ 3 | 1 | √ 3 | --- |

- +

0 0

+ -

нет

cosd = a / ρ a = ρcosd

sind = в / ρ в = ρsind

а + вi = ρcosd + i ρsind

а + вi = ρ (cosd + i sind) –

комплексное число в тригонометрической форме

Действия с комплексными числами:

Сложение:

а1 + в1i + а2 + в2i = а1 + а2 + (в1 + в2) i

Умножение:

(а1 + в1i) (а2 + в2i) = а1а2 +в1в2i 2 + а1в2i

а1а2 - в1в2 + (в1а2 + а2в2) i

Формула Эйлера: Комплексное число в показательной форме:

е iу = cosу + isinу z = ρе i φ

Примеры по возведению комплексного числа в степень в тригонометрической и показательной формах:

**1) (**7 + 3i) (3 + 7i) = 21 + 21i 2 + 9i + 49i = 58i

(7 + 3i) = √ 58 (cosarctg 3/ 7 + isinarctg 3/ 7) = е ln √ 58 ⋅ е arctg 3/7 = е ln √ 58 + i arctg 3/7

ρ1 = √ 58

φ1 = arctg 3/ 7

(3 + 7i) = √ 58 (cosarctg 7/ 3 + isinarctg 7/ 3) = е ln √ 58 ⋅ е arctg 7/ 3 = е ln √ 58 + i arctg 7/ 3

ρ2 = √ 58

φ2 = arctg 7/ 3

√ 58 (cosarctg 3/ 7 + isinarctg 3/ 7) √ 58 (cosarctg 7/ 3 + isinarctg 7/ 3) =

= 58 (cos (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3) + i (sin (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3))) =

= е ln 58 ⋅ е i (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3) = е ln 58 + i (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3)

При решении примера использовали формулу:

ρ1 (cosφ1 + isinφ1) ρ2 (cosφ2 + isinφ2) = ρ1 ρ2 (cos (φ1 + φ2) + i (sin (φ1 +φ2))

Проверка:

е ln 58 + i (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3) = е ln 58 ⋅ е i (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3) =58 (cos (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3) + i (sin (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3)

cos (arctg 3/ 7 + arctg 7/ 3) = cos (arctg 3/ 7) cos (arctg 7/ 3) -

sin (arctg 3/ 7) sin (arctg 7/ 3)

cos (arctg 3/ 7) = 1/ (√ 1 + tg2 (arctg 3/ 7)) = 1/ √ 1 + (9/49) = 7/√ 58

cos (arctg 7/ 3) = 3/√ 58

sin (arctg 3/ 7) = √ 1 - cos2arctg 3/ 7 = √ 1 - (7/√ 58) 2 = √ 9/ 58 = 3/√ 58 sin (arctg 7/3) = √ 1 - cos2arctg 7/ 3 = 7/√ 58

cos (arctg 3/ 7 - arctg 7/ 3) = 7/√ 58 ⋅ 3/√ 58 - 3/√ 58 ⋅ 7/√ 58 = 0

sin (arctg 3/ 7 - arctg 7/ 3) = 3/√ 58⋅ 3/√ 58 ⋅ 3/√ 58⋅ 3/√ 58 = 0

Возведение в степень:

(7 + 3i) (3 + 7i) = √ 58 (cosarctg 3/7 + isinarctg 3/7) = е ln √ 58 + i arctg 3/7

(7 + 3i) 2 = 49 + 42i + 9i2 = 40 + 42i

(√ 58 (cosarctg 3/7 + isinarctg 3/7)) 2 = 58 (cos2arctg 3/7 + isin2arctg 3/7) =

= е ln √ 58 + i arctg 3/7

Проверка:

е ln √ 58 + i arctg 3/7 = 58 (cos2arctg 3/7 + isin2arctg 3/7)

cos2arctg 3/ 7 = 2cos2arctg 3/7 - 1 = 2 ⋅ (7/√ 58) 2 - 1 = 40/58

sin2arctg 3/ 7 = 2sin2arctg 3/ 7 cosarctg 3/ 7 = 2 ∙ (3/√ 58) ∙ (7/√ 58) = 42/58

58 (40/58 + 42/58 ⋅ i) = 40 + 42i

При решении примера применяли следующие формулы:

(ρ (cosd + i sind)) п = ρ п (cosпd + i sinпd) п є N

е х + iу = е х (cosу + isinу)

**2) (**3 + 4i) (4 + 3i) = 12 + 12i 2 + 16i + 9i = 25i

(3 + 4i) = 5 (cosarctg 4/ 3 + isinarctg 4/ 3) = е ln 5 ⋅ е arctg 4/ 3 = е ln 5 + i arctg 4/ 3

ρ1 = √ 25 = 5

φ1 = arctg 4/ 3

(4 + 3i) = 5 (cosarctg 3/ 4 + isinarctg 3/ 4) = е ln 5 ⋅ е arctg 3/ 4 = е ln 5 + i arctg 3/ 4

ρ2 = 5

φ2 = arctg 3/ 4

5 (cosarctg 4/ 3 + isinarctg 4/ 3) 5 (cosarctg 3/ 4 + isinarctg 3/ 4) =

= 25 (cos (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4) + i (sin (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4))) =

= е ln 25⋅ е i (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4) = е ln 25 + i (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4)

При решении примера использовали формулу:

ρ1 (cosφ1 + isinφ1) ρ2 (cosφ2 + isinφ2) = ρ1 ρ2 (cos (φ1 + φ2) + i (sin (φ1 +φ2))

Проверка:

е ln 25 + i (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4) = е ln 25 ⋅ е i (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4) =25 (cos (arctg 4/ 3 +

+ arctg 3/ 4) + i (sin (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4)))

cos (arctg 4/ 3 + arctg 3/ 4) = cos (arctg 4/ 3) cos (arctg 3/ 4) -

sin (arctg 4/ 3) sin (arctg 3/ 4)

cos (arctg 4/ 3) = 1/ (√ 1 + tg2 (arctg 4/ 3)) = 1/ √ 1 + (16/ 9) = 3/ 5

cos (arctg 3/ 4) = 4/ 5

sin (arctg 4/ 3) = √ 1 - cos2arctg 4/ 3 = √ 1 - 9/ 5 = 4/5

sin (arctg 3/ 4) = √ 1 - cos2arctg 3/ 4 = 3/ 5

cos (arctg 4/ 3 - arctg 3/ 4) = 3/ 5 ⋅ 4/5 - 3/ 5 ⋅ 4/5 = 0

sin (arctg 4/ 3 - arctg 3/ 4) = 4/ 5 ⋅ 3/5 - 4/ 5 ⋅ 3/5 = 0

Извлечение корня третий степени из комплексного числа:

Применяем формулу:

п√ ρ (cosd + i sind) = п√ ρ (cos d + 2Пк / п + i sin d + 2Пк / п) к є (0; 1;...; п - 1)

3√ 3 +4i = 3√ 25 (cosarctg 4/3 + 2Пк/3 +isinarctg 4/3 + 2Пк/3)

z1 = 6√ 25 (cosarctg (4/3) / 3 + isinarctg (4/3) / 3) к = 0

z2 = 6√ 25 (cosarctg (4/3 + 2П) / 3 + isinarctg (4/3 + 2П) / 3) к = 1

z3 = 6√ 25 (cosarctg (4/3 + 4П) / 3 + isinarctg (4/3 + 4П) / 3) к = 2