Задача 1

В стержне постоянного сечения площадью А требуется:

1. Построить эпюру N.

2. Выписать выражение наибольшего по модулю нормального напряжения

3. Определить полное удлинение бруса

4. Определить потенциальную энергию бруса

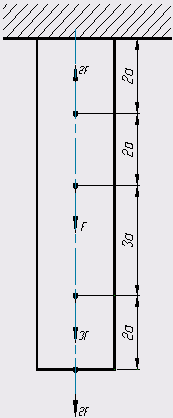


Рис. 1. Расчетная схема

Исходные данные: а = 2,4 м; F = 18 кН; A = 10 см2; E = 120 ГПа;

Решение.

Система статически определима и может быть описана одним уравнением равновесия из условия.



-R - 2F + F + 3F + 2F = 0

R = 4F= 4\*18 = 72 кН

При выборе знаков принято, что силы, вызывающие растяжение стержня, учитываются со знаком +, а сжимающие – со знаком "–".

2. Для построения эпюр разбиваем стержень на участки и применяем метод сечений, рассекая стержень в пределах каждого участка и, отбрасывая верхнюю часть.



Рис. 2. Разбивка стержня на участки

Отброшенные силы заменяем продольной силой N, уравновешивающей усилия на рассматриваемом участке. Из схемы видно, что для анализа усилий стержень нужно разбить на 4 участка.

Участок 1: 2F - N1= 0; N1 = 2F = 36 кН;

Участок 2: 2F +3F – N2 = 0; N2 = 5F = 90 кН;

Участок 3: 2F +3F + F– N3 = 0; N3 = 6F = 108 кН;

Участок 4: 2F +3F + F - 2F– N4 = 0; N4 = 4F = 72 кН

Из расчета видно, что стержень растянут на всех участках. По полученным значениям строим эпюру продольных сил, выполняя правило, по которому в точке приложения силы наблюдается скачок на величину этой силы.



Рис. 3. Эпюра N.

Нормальные напряжения  в поперечном сечении стержня при растяжении-сжатии определяются делением продольной силы в этом сечении на площадь сечения, с учетом знака.



Очевидно, что в стержне постоянного сечения наибольшая величина нормального напряжения будет наблюдаться на участке, в пределах которого действуют наибольшие внутренние усилия. В нашем случае это участок 3.

N3| / А3 = 108 / 10 = 10,8 кН/см2 = 108 МПа

Перемещения стержня от действия системы сил определяются как сумма перемещений от действия каждой силы в отдельности



Участок 1:

l1 = N1l1 / EA1 = 36\* 2\*2,4 / (1,2 \* 105 \* 10-3) = 1,44 мм

Участок 2:

l2 = l1 + l12 = 0,144 + N2 l2/EA2 = 1,44 + 90\*3\*2,4/(1,2\*105\*10-3) = 6,84 мм;

Участок 3:

l3 = l2 + l23 = 0,684 + N3 l3/EA3 =

6,84+ 108 \* 2 \* 2,4 / (1,2 \* 105 \* 10-3) = 11,16 мм;

Участок 4:

l4 = l3 + l34 = 1,116+N4 l4/EA4 =

11,16 + 72 \* 2 \* 2,4 / (1,2 \* 105 \* 10-3) = 14,04 мм;

Потенциальную энергию каждого участка при растяжении можно определить по формуле

,



Участок 1:

U1 = N12l1 / 2EA = 362 \* 2\*2,4/ (2\*1,2 \* 105 \* 10-3) = 25,92 кДж

Участок 2:

U2 = N22l2 / 2EA = 902\*3\*2,4/(2\*1,2\*105\*10-3) = 243,00 кДж;

Участок 3:

U3 = N32l3/ 2EA= 1082 \* 2 \* 2,4 / (2\*1,2 \* 105 \* 10-3) = 233,28 кДж;

Участок 4:

U4 = N24 l4/EA= 722 \* 2 \* 2,4/ (2\*1,2 \* 105 \* 10-3) = 103,6800 кДж;

Суммарная потенциальная энергия составит:

U = Ui = 25,92+243+233,28+103,68 = 605,88 кДж;

Задача 2

Для бруса, показанного на рис. 1, нагруженного силами F и Q, требуется:

1. Построить эпюру продольных сил

2. Составить в раскрытом виде выражения перемещения сечений в точках приложения сил F и Q

3. Построить эпюры продольных сил N для случая, когда средний участок бруса нагревается на t ° и силовое нагружение отсутствует



Рис. 1. Расчетная схема

Исходные данные: а = 2,4 м, F =18 кН, Q =26 кН ∆t = 26°С; A = 10 см2; E = 120 ГПа;  = 10-6;

Решение.

Система один раз статически неопределима, потому что в заделках имеется две неизвестные реакции опор, которые не могут быть определены одним уравнением равновесия

RA - F - Q+ RB = 0

Из схемы видно, что нижняя часть стержня сжимается, а верхняя - растягивается. При условии, что общая длина стержня не изменится, так как концы стержня заделаны, общая длина перемещений будет равна 0. Стержень разбивается на 3 участка, в границах которых уравнения перемещений могут быть записаны следующим образом:

Участок 1: ;



Участок 2: ;



Участок 3: ;



Из уравнений видно, что на участках 1 и 2 стержень растягивается, а на участке 3 - сжимается, но поскольку суммарное перемещение будет равно 0, то можем записать

l1 + l2 - l3 = 0,

l1 + l2 = l3 ,

+=



Условием задачи дано, что А2 = 2А1, тогда

+=;



RA2a+a(RA-Q) = 0,5RBa

3RA-Q = 0,5RB

6RA-2Q = RB

Подставив полученное выражение в уравнение равновесия, получим

RA - F - Q+ 6RA - 2Q= 0

RA = (F+3Q) / 7 = (18 + 3\*26)/7 = 13,7 кН

RВ = 6\*13,71 – 2 \* 26 = 30,3 кН

RA - F - Q+ RB = 13,7-18-26+30,3 = 0

2. Для построения эпюр разбиваем стержень на участки и применяем метод сечений, рассекая стержень в пределах каждого участка и, отбрасывая правую часть, Отброшенные силы заменяем продольной силой N, уравновешивающей усилия на рассматриваемом участке. Поскольку небходимые расчеты уже были проведены, то можем провести прямое построение, зная, что в пределах участков внутренние усилия отражаются прямой линией, а на границах участков имеется скачок на величину силы.



Рис. 2. Эпюра внутренних усилий

Оценим температурные удлинения стержня при t = 26 °С. Температурное расширение по условию задачи составляет  =10∙10-6 1/°, При длине нагреваемого участка стержня a = 2,4 м удлинение должно составить:

l = а \*  \* t = 2,4 \* 10 \*10-6\* 26 = 0,000624 м = 0,624 мм

Однако за счет сил сжатия, возникающих в заделке фактическое удлинение будет равно 0. Для расчета усилий примем следующие предпосылки: нагреванию подвергается участок 2, имеющий постоянное сечение, следовательно при отсутствии заделки границы участка 2, а следовательно и границы стержня переместились бы на равное расстояние – 0,624/2 = 0,312 мм. Усилия, возникающие на границах участка 2 также равны Однако перемещению препятствуют усилия в заделке. При отсутствии прочих силовых нагрузок схема нагружения выглядит следующим образом:



Рис. 3. Нагружение стержня вследствие температурных деформаций

Для построения эпюр следует определить эквивалентные усилия на концах, которые могут нейтрализовать такое перемещение.

Силу 2F можно найти из выражения перемещений

2Fa/EA = l2.

0,624\*10-3\*1,2\*105\*0,001/2 = 0,03744 кН

Уравнение равновесия:

-RA+F-F+RB = 0,

Откуда

RA = RB = F = 0,03744 кН



Рис. 3. Эпюра продольных усилий в стержне при температурных деформациях.

Схема, показанная на рисунке, предполагает, что в пределах нагреваемого участка усилия отсутствуют. Однако это невозможно, поэтому следует заменить сосредоточенную нагрузку на среднем участке на распределенную, как показано на рис. 4. Характер эпюры в этом случае также изменится.

Величина распределенной нагрузки будет равна

q = F/0,5а = 37,44/2,4/2 = 7,8 Н/м



Рис. 4. Эпюра продольных усилий в стержне при температурных деформациях с учетом распределенной нагрузки.

Задача 3

Дано: элементарная призма, выделенная из упругого тела.

Координатные напряжения:

z = -30 МПа; y = 20 МПа; yz = - 60 МПа;  = 50°.

Определить:

1. Нормальные и касательные напряжения  на наклонной площадке, определяемой углом ;

2. Величины главных напряжений и положения главных площадок (углы 

3. Величины экстремальных касательных напряжений и положения соответствующих площадок (углы );

4. Построить круг напряжений и проверить по нему величины, найденные в пунктах 1, 2, 3.



Рис. 1. Исходное плоское напряженное состояние

1. В соответствии с заданными знаками определяем, что z обеспечивает сжатие материала, а y — растяжение. Отрицательный знак касательного напряжения yz указывает на то, что оно направлено против хода часовой стрелки

Нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке выражаются через угол  40 °



cos 40° = 0,766; cos 80° = 0,173

sin 40° = 0,642; sin 80° = 0,985

-30\*0,7662 + 20\*0,6422 -60\*0,984 = -68,40 МПа

 = (-30-20)/2\*0,985 + 60\*0,173 = -14,25 МПа

2.



= (-30+20)/2 ±0,5=-5±65 МПа,



1 = 60 МПа;

2 = -70 МПа;

Проверка:



-30+20 = 60-70

-10=-10 МПа

Определяем угол наклона главных площадок к заданным:

tg20=== 2,4



20=67,38°;

0=33,69°;

Угол положительный, поэтому заданные площадки должны быть повернуты против хода часовой стрелки и на полученных главных площадках показываем главные напряжения. При этом максимальное напряжение будет в тех четвертях, где сходятся стрелки касательных напряжений

Углы 2 соответственно будут равны:

0 = 33,69°;

1 +90 ° = 123,69°;



Рис. 2. Положение главных напряжений

3. Известно, что направления площадок с экстремальными касательными напряжениями отличаются от направлений главных площадок на угол /4 или 45°. То есть

1 +45°= 78,69°;

 +45 ° = 168,69°;



Рис. 3. Положение экстремальных напряжений

При этом направления экстремальных касательных напряжений должны сходиться у того ребра элемента, где проходит главное напряжение 1.

Величины экстремальных касательных напряжений равны

= (60-(-70))/2 = 65,00 МПа



Проверку расчетов выполняем при помощи круга Мора. В системе координат  откладываем отрезки, соответствующие 2 с учетом знаков. Границы этих отрезков определяют диаметр круга. Точка пересечения прямой, проведенной из крайней левой точки окружности под соответствующим углом , с противоположной стороной окружности, даст координаты, соответствующие значениям 

Так как главная площадка поворачивалась относительно исходного положения призмы против часовой стрелки, то для получения исходных значений напряжений следует поворачивать отрезок в обратную сторону — по часовой стрелке (отрезок АB).



Рис. 4. Круг Мора

Задача 4

Используя данные, полученные в задаче 4 выписать в раскрытом виде

1. Относительные удлинения max

2. Углы сдвига y2 и max

3. Величину удельной потенциальной энергии

Решение

Согласно закону Гука  = E, где E – модуль Юнга, зависящий от конкретного материала. Перемещение материала происходит по направлению главных напряжений, то есть

2/E;

max = 1/E;

Согласно заданию E = 100 ГПа, тогда

2 = -70 / 105 = -0,0007

1 = 60 / 105 = 0,0006

Отрицательный знак указывает на то, что по линии действия 2 элементарная призма будет укорачиваться.

Угол сдвига может быть определен по формуле

,



где G – модуль упругости второго рода, связанный с модулем Юнга при помощи коэффициента Пуассона v. На главных площадках касательные напряжения равны 0, соответственно в плоскостях главных площадок деформации сдвига наблюдаться не будет. Направление деформации сдвига происходит под углом 45° к плоскости главных площадок, то есть под действием напряжения max . По условию задачи v=0,2, тогда

max = 2\*1,2\*65/105 = 0,0016°

Согласно IV теории прочности удельная потенциальная энергия изменения формы определяется выражением

= 1,2\*602/(3\*105) = 0,014 кДж



Задача 5

Для сечения, показанного на рис. 1, требуется определить:

1. Координаты центра тяжести сечения С;

2. Вычертить в масштабе сечение, провести главные центральные оси Xc Yc и выписать относительно них развернутые выражения осевых моментов инерции Ixc и Iyc



Рис. 1. Расчетная схема.

Решение:

Фигура может быть разбита на две элементарные фигуры: прямоугольник и окружность

1. Координаты центра тяжести определяем по формулам

;



Площади фигур определяются по формулам:

Прямоугольник: A = bh

A1 = 26\*32 = 832 см2;

Окружность: A = r2

A2 = 3,14\*32 = 28,26 см2;

Проведем вспомогательные оси координат через левый и нижний габариты фигуры и определим для этого положения координаты центра тяжести. Координаты центра тяжести прямоугольника лежат на пересечении диагоналей и легко определяются графически. Координата центра тяжести окружности находится в ее центре и также может быть определена простым замером. Очевидно, что координата XC cоставной фигуры, показанной на рис. 1, лежит на оси симметрии, что должно подтвердиться расчетом

XC = (832\*13 – 28,26\*13)/(832-28,26) = 13 см

YC = (832\*16 – 28,26\*29)/(832-28,26) = 15,5429 см

Через центр тяжести проводим центральные оси.



Рис. 2. Определение координат центра тяжести составной фигуры

2. Осевые моменты инерции сечения определяем по формулам



Моменты инерции для элементарных фигур равны:

Прямоугольник: Jx = bh3/12; Jy=hb3/12

Окружность: Jx = Jy= d4/64

Определяем численные значения:

Прямоугольник:

эпюра напряжение энергия деформация

Jx1 = (26\*323)/12 = 70997,33 см4;

Jy1 = (32\*263)/12 = 46869,33 см4;

Окружность:

Jx = Jy= 3,14 \* 64/64 = 63,59 см4;

JxС = 70997,33+ 832\*0,4571 - (63,59 + 28,26\*13,4571) = 70933,7496 см4

Jy = 46869,33 + 832\*0 - (63,59 + 28,26\*0) = 46805,74см4

3. Две взаимно перпендикулярные оси, из которых хотя бы одна является осью симметрии фигуры будут ее главными осями, а главные оси, проходящие через центр тяжести сечения называются главными центральными осями. Таким образом , оси Хс и Yc совпадают с осями U и V, так как ось Yc проходит через ось симметрии фигуры, а обе оси вместе проходят через центр тяжести.

Задача 6

Для балки, показанной на рис. 1, требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

2. Подобрать для балки размеры прямоугольного сечения bxh при расчетном сопротивлении R=10 МПа;

3. Для сечения с наибольшей поперечной силой построить эпюру касательных напряжений



Рис. 1. Расчетная схема

а = 3,6 м, h = 2b

q = 4 кН/м

F = 10 кН;

M = 150 кН м.

Решение:

Предварительно примем, что реакции опор направлены: вверх и составим уравнения моментов относительно точек А и В.



Рис.2

M(A) = 0

RB\*4a + F\*3а - M - q\*2a2 = 0;

RB = (M + q\*2a2 – 3Fa) /4a ;

RB = (150 +4\*2\*3,62 -3\*10\*3,6) / (4\*3,6) = 10,117 кН ;

M(B) = 0

q\*2a\*3a - Fa - RА\*4a – M = 0;

RА = (q\*6a2 - Fa - M)/ 4a ;

RА = (4\*6\*3,62 - 10\*3,6 - 150) /(4\*3,6) = 8,683 кН ;

Для проверки составим систему уравнений проекций сил на ось Y

P(Y) = 0

RA + RB – q2a + F = 0;

8,683 + 10,117 - 4\*2\*3,6 + 10 = 0,0

Расчет верен.

Из суммы проекций сил на ось Х очевидно, что реакция Rx в точке В равна 0.

Для построения эпюр следует рассмотреть балку в характерных сечениях. При построении эпюры Q сосредоточенные силы вызывают скачок эпюры, а моменты не оказывают на нее влияния.

При построении эпюры М рассматривается влияние сил, оставшихся на рассматриваемой части балки на точку сечения. При этом учитывается только влияние моментов. Изгибаюший момент вызывает скачок на величину момента,

Для построения эпюры М требуется найти координату экстремального значения изгибающего момента в опасном сечении, определяемом положением точки на эпюре поперечных сил, где Q = 0. Из эпюры видно, что это координата z. Так как треугольники, образованные наклонной линией от распределенной нагрузки подобны, то соотношения их соответствующих сторон одинаковы, тогда

z = 3,6 / (1+ 1/(8,683/20,117)) = 1,085 м

Величину экстремального момента удобнее определить из рассмотрения левой части балки при сечении возле координаты z.

Мz + qz2/2 – RАz = 0

Мz = RАz - qz2/2 = 8,683\*1,085 - 4\*1,0852/2 = 7,067 кН м

В сечении по точке приложения силы F удобнее рассматривать левую часть балки, заменяя отсеченную часть внутренним моментом, который равен

МF = RB a = 10,117\*3,6 = 36,421 кН м

В сечении по точке приложения сосредоточенного момента М удобнее рассматривать левую часть балки, заменяя отсеченную часть внутренним моментом, который равен

ММ2 = RB\*2a + F \* a = 10,117\*2\*3,6 + 10\*3,6 = 108,842 кН м

Величина момента слева от точки приложения сосредоточенного момента М определяется скачком на величину момента

ММ1 = ММ2 – М = 108,842-150 = -41,158 кН м

Расчеты показывают, что сечение в точке приложения сосредоточенного момента М является самым нагруженным и, следовательно, наиболее опасным



Рис. 3. Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M.

Условие прочности для балки выглядит следующим образом



По условию задачи дано:

[] = R = 10 МПа = 1 кН/см2,

Подставляя эти значения,

Mmax = 108,842 кН м = 10884,2 кН см

Wx = 10884,2 / 1 = 10884,2 см3

Для прямоугольника Wx = bh2/6 , тогда при условии h = 2b

Wx = b(2b)2/6 = 4b3/6

b = = 25,368 см



h = 2b = 2\*25,368 = 50,736 см

Принимаем сечение 26х52 см с площадью A = 26\*52 = 1352 cм2

Определяем касательные напряжения в точке с наибольшей поперечной силой. Это также точка приложения сосредоточенного момента М

,



где k – коэффициент, зависящий от формы сечения. Для прямоугольного сечения k = 1,5.

max = 1,5 \* 20,117 / 1352 = 0,022 кН/см2 = 0,22 МПа



Рис. 4. Эпюра касательных напряжений

Задача 7

Для заданной схемы требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил;

2. Подобрать по ГОСТ двутавровое сечение балки, принимая расчетное сопротивление изгибу Rи = 160 МПа

3. Построить в опасном сечении эпюру нормальных напряжений

4. В сечении с наибольшей поперечной силой построить эпюру касательных напряжений.



Рис. 1. Расчетная схема .

Исходные данные:

а = 3,6 м,

q = 4 кН/м

F = 10 кН;

M = 150 кН м.

2. Отбросим заделку, заменив ее действие действием сил реакции. В сплошной заделке возникает три реакции: Момент MR и две реакции Rx и Ry.



Рис. 2. Расчетная схема

Составим уравнения равновесия, приняв направление по часовой стрелке за отрицательное, а против часовой стрелки – за положительное.

M(A) = 0

MR – М - qa\*1,5а + F\*2a = 0;

MR = M + 1,5qa2 - 2Fa;

MR =150 + 1,5\*4\*3,62 – 2\*10\*3,6 =155,76 кН м;

Составим систему уравнений проекций сил на ось Y

P(Y) = 0

Ry + F – qa = 0;

Ry = qa-F = 4\*3,6-10 =4,4 кН;

Из построения проекций сил на ось Х видно, что реакция RX = 0.

Для построения эпюр следует рассмотреть балку в характерных сечениях. При построении эпюры Q сосредоточенные силы вызывают скачок эпюры, а моменты не оказывают на нее влияния. На участке действия распределенной нагрузки эпюра выражается наклонной линией. При построении эпюры М рассматривается влияние сил, оставшихся на рассматриваемой части балки на точку сечения. При этом учитывается только влияние моментов. Изгибаюший момент вызывает скачок на величину момента. Рассмотрим более подробно сечения в характерных точках балки. На первом участке отбрасываем правую часть балки, заменяя ее действием внутреннего момента М1, тогда

-М1 + MR – Ryа =0

М1 = MR – Ryа =155,76-4,4\*3,6 = 139,92 кН м

На третьем участке отсечем левую часть балки. Для оставшейся части уравнение равновесия будет равно

М3 - M= 0

М3 = M= 150 кН м

На втором участке эпюра выражается параболической кривой с перегибом в точке, соответствующей координате z.

z = 3,6 / (1+ 1/(4,4/10)) = 1,100 м

Уравнение равновесия для координаты Z рассматриваем, отбросив правую часть балки.

-М2 + MR – Ry(а+z)+q\*z2/2 = 0

М2 = MR – Ry(а+z)+q\*0,125a2 = 155,76-4,4\*4,7+2\*1,12 = 137,500 кН м



Рис. 3. Эпюры N и М.

Условие прочности для балки выглядит следующим образом



По условию задачи [] = Rи = 160 МПа = 16 кН/см2,

Подставляя эти значения,

Mmax = 155,76 кН м = 15576 кН см

Wx = 15576 / 16 = 973,5 см3

Параметры двутавра подбираем по справочнику. Ближайшая подходящая балка - №45, имеющая Wx = 1231 см3, при площади сечения А = 84,7 см2.

Максимальное значение напряжения составит

= 15576 / 1231 = 12,65 кН/см2 = 126,5 МПа



Согласно закону распределения нормальных напряжений имеем

= 15576 / 27696 \* 45/2 = 12,65 МПа



Рис. 4. Эпюра нормальных напряжений для опасного сечения

Наибольшая поперечная сила наблюдается в сечении, где приложена сила F. Для этой точки касательное напряжение равно в соответствии с формулой Журавского

,



где d – толщина стенки двутавра

max = 10\*708 / (27696\*0,9) = 0,28 кН/см2 = 2,8 МПа

В месте соприкосновения полок со стенкой касательные напряжения определяются как

,



где — статический момент полки двутавра относительно оси Х, равный



=16\*1,42(45/2-1,42/2) = 495,07 см3



А = 10\*495,07 / (27696\*0,9) = 0,171 кН/см2 = 1,71 МПа

Касательными напряжениями на полках двутавровой балки можно пренебречь ввиду их незначительности



Рис. 5. Касательные напряжение в двутавровой балке в точке действия наибольших перерезывающих сил.