## Введение

1. Рефлексивность:



2. Слабая рефлексивность:



3. Сильная рефлексивность:



4. Антирефлексивность:



5. Слабая антирефлексивность:



6. Сильная антирефлексивность:



7. Симметричность:



8. Антисимметричность:



9. Асимметричность:



10. Сильная линейность:



11. Слабая линейность:



12. Транзитивность:



Рефлексивность, свойство бинарных (двуместных, двучленных) *отношений,* выражающее выполнимость их для пар объектов с совпадающими членами (так сказать, между объектом и его "зеркальным отражением"): отношение *R* называется рефлексивным, если для любого объекта *х* из области его определения выполняется *xRx.* Типичные и наиболее важные примеры рефлексивных отношений: отношения типа *равенства (тождества, эквивалентности, подобия* и т.п.: любой предмет равен самому себе) и отношения нестрогого порядка (любой предмет не меньше и не больше самого себя). Интуитивные представления о "равенстве" (эквивалентности, подобии и т.п.), очевидным образом наделяющие его свойствами *симметричности* и *транзитивности,* "вынуждают" и свойство Р., поскольку последнее свойство следует из первых двух. Поэтому многие употребительные в математике отношения, по определению Р. не обладающие, оказывается естественным доопределить таким образом, чтобы они становились рефлексивными, например, считать, что каждая прямая или плоскость параллельна самой себе, и т.п.

## Глава 1. Элементы теории множеств

## 1.1 Множества

Наиболее простая структура данных, используемая в математике, имеет место в случае, когда между отдельными изолированными данными отсутствуют какие-либо взаимосвязи. Совокупность таких данных представляет собой *множество*. Понятие множества является неопределяемым понятием. Множество не обладает внутренней структурой. Множество можно представить себе как совокупность элементов, обладающих некоторым общим свойством. Для того чтобы некоторую совокупность элементов можно было назвать множеством, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

Должно существовать правило, позволяющее определить, принадлежит ли указанный элемент данной совокупности.

Должно существовать правило, позволяющее отличать элементы друг от друга. (Это, в частности, означает, что множество не может содержать двух *одинаковых* элементов).

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами. Если элемент принадлежит множеству , то это обозначается:



Если каждый элемент множества является также и элементом множества , то говорят, что множество является *подмножеством* множества :



Подмножество множества называется *собственным подмножеством*, если



Используя понятие множества можно построить более сложные и содержательные объекты.

## 1.2 Операции над множествами

Основными операциями над множествами являются *объединение*, *пересечение* и *разность*.

*Определение 1*. *Объединением* двух множеств называется новое множество



*Определение 2*. *Пересечением* двух множеств называется новое множество



*Определение 3*. *Разностью* двух множеств называется новое множество



Если класс объектов, на которых определяются различные множества обозначить (*Универсум*), то *дополнением* множества называют разность



## 1.3 Декартово произведение множеств

Одним из способов конструирования новых объектов из уже имеющихся множеств является *декартово произведение множеств*.

Пусть и - множества. Выражение вида , где и , называется *упорядоченной парой*. Равенство вида означает, что и . В общем случае, можно рассматривать *упорядоченную n-ку* из элементов . Упорядоченные n-ки иначе называют *наборы* или *кортежи*.



*Определение 4*. *Декартовым (прямым) произведением множеств* называется множество упорядоченных n-ок (наборов, кортежей) вида



*Определение 5*. *Степенью декартового произведения* называется число множеств n, входящих в это декартово произведение.



Замечание. Если все множества одинаковы, то используют обозначение



.



## 1.4 Отношение

*Определение 6*. Подмножество декартового произведения множеств называется *отношением степени n (n-арным отношением*).



*Определение 7*. Мощность множества кортежей, входящих в отношение , называют *мощностью отношения* .



Замечание. Понятие отношения является очень важным не только с математической точки зрения. Понятие отношения фактически лежит в основе всей реляционной теории баз данных. Как будет показано ниже, отношения являются математическим аналогом *таблиц*. Сам термин "реляционное представление данных", впервые введенный Коддом [43], происходит от термина *relation*, понимаемом именно в смысле этого определения.

Т. к. любое множество можно рассматривать как декартовое произведение степени 1, то любое подмножество, как и любое множество, можно считать отношением степени 1. Это не очень интересный пример, свидетельствующий лишь о том, что термины "отношение степени 1" и "подмножество" являются синонимами. Нетривиальность понятия отношения проявляется, когда степень отношения больше 1. Ключевыми здесь являются два момента:

*Во-первых*, все элементы отношения есть *однотипные* кортежи. Однотипность кортежей позволяет считать их аналогами строк в простой таблице, т.е. в такой таблице, в которой все строки состоят из одинакового числа ячеек и в соответствующих ячейках содержатся одинаковые типы данных. Например, отношение, состоящее из трех следующих кортежей { (1, "Иванов", 1000), (2, "Петров", 2000), (3, "Сидоров", 3000) } можно считать таблицей, содержащей данные о сотрудниках и их зарплатах. Такая таблица будет иметь три строки и три колонки, причем в каждой колонке содержатся данные одного типа.

В противоположность этому рассмотрим множество { (1), (1,2), (1, 2,3) }, состоящее из *разнотипных* числовых кортежей. Это множество не является отношением ни в , ни в , ни в . Из кортежей, входящих в это множество нельзя составить простую таблицу. Правда, можно считать это множество отношением степени 1 на множестве всех возможных числовых кортежей всех возможных степеней



,



но такая трактовка ничего нового, по сравнению с понятием подмножества, не дает.

*Во-вторых*. За исключением крайнего случая, когда отношение есть само декартово произведение , отношение включает в себя *не все возможные кортежи* из декартового произведения. Это значит, что для каждого отношения имеется *критерий*, позволяющий определить, какие кортежи входят в отношение, а какие - нет. Этот критерий, по существу, определяет для нас *смысл (семантику)* отношения.



Действительно, каждому отношению можно поставить в соответствие некоторое логическое выражение , зависящее от n параметров (n-местный предикат) и определяющее, будет ли кортеж принадлежать отношению . Это логическое выражение называют *предикатом отношения* . Более точно, кортеж принадлежит отношению тогда и только тогда, когда предикат этого отношения принимает значение "истина". В свою очередь, каждый n-местный предикат задает некоторое n-арное отношение. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между n-арными отношениями и n-местными предикатами.



Если это не вызывает путаницы, удобно и отношение, и его предикат обозначать одной и той же буквой. Например, отношение имеет предикат .



## 2. Примеры отношений

## 2.1 Бинарные отношения (отношения степени 2)

В математике большую роль играют бинарные отношения, т.е. отношения, заданные на декартовом произведении двух множеств .



## 2.1.1 Отношение эквивалентности

*Определение 8*. Отношение на множестве называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:



для всех (рефлексивность)



Если , то (симметричность)



Если и , то (транзитивность)



Обычно отношение эквивалентности обозначают знаком или и говорят, что оно (отношение) задано на множестве (а не на ). Условия 1-3 в таких обозначениях выглядят более естественно:



для всех (рефлексивность)



Если , то (симметричность)



Если и , то (транзитивность)



Легко доказывается, что если на множестве задано отношение эквивалентности, то множество разбивается на взаимно непересекающиеся подмножества, состоящие из эквивалентных друг другу элементов (*классы эквивалентности*).



Пример 1. Рассмотрим на множестве вещественных чисел отношение, заданное просто равенством чисел. Предикат такого отношения:



, или просто



Условия 1-3, очевидно, выполняются, поэтому данное отношение является отношением эквивалентности. Каждый класс эквивалентности этого отношения состоит из одного числа.

Пример 2. Рассмотрим более сложное отношение эквивалентности. На множестве целых чисел зададим отношение "равенство по модулю n" следующим образом: два числа и *равны по модулю n*, если их остатки при делении на n равны. Например, по модулю 5 равны числа 2, 7, 12 и т.д.



Условия 1-3 легко проверяются, поэтому равенство по модулю является отношением эквивалентности. Предикат этого отношения имеет вид:



Классы эквивалентности этого отношения состоят из чисел, дающих при делении на n одинаковые остатки. Таких классов ровно n:

[0] = {0, n, 2n, …}

[1] = {1, n+1, 2n+1, …}

…

[n-1] = {n-1, n+n-1, 2n+n-1, …}

## 2.1.2 Отношения порядка

*Определение 9*. Отношение на множестве называется *отношением порядка*, если оно обладает следующими свойствами:



для всех (рефлексивность)



Если и , то (антисимметричность)



Если и , то (транзитивность)



Обычно отношение порядка обозначают знаком . Если для двух элементов и выполняется , то говорят, что "предшествует" . Как и для отношения эквивалентности, условия 1-3 в таких обозначениях выглядят более естественно:



для всех (рефлексивность)



Если и , то (антисимметричность)



Если и , то (транзитивность)



Пример 3. Простым примером отношения порядка является отношение, задаваемое обычным неравенством на множестве вещественных чисел . Заметим, что *для любых чисел* и выполняется либо , либо , т.е. *любые* два числа сравнимы между собой. Такие отношения называются *отношениями полного порядка*.



Предикат данного отношения есть просто утверждение .



Пример 4. Рассмотрим на множестве всех сотрудников некоторого предприятия отношение, задаваемое следующим образом: сотрудник предшествует сотруднику тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:



является начальником (не обязательно непосредственным)



Назовем такое отношение "быть начальником". Легко проверить, что отношение "быть начальником" является отношением порядка. Заметим, что в отличие от предыдущего примера, *существуют такие пары* сотрудников и , для которых не выполняется ни , ни (например, если и являются сослуживцами). Такие отношения, в которых есть несравнимые между собой элементы, называют *отношениями частичного порядка*.



## 2.1.3 Функциональное отношение

*Определение 10*. Отношение на декартовом произведении двух множеств называется *функциональным отношением*, если оно обладает следующим свойством:



Если и , то (однозначность функции).



Обычно, функциональное отношение обозначают в виде *функциональной зависимости -* тогда и только тогда, когда . Функциональные отношения (подмножества декартового произведения!) называют иначе *графиком функции* или *графиком функциональной зависимости*.



Предикат функционального отношения есть просто выражение функциональной зависимости .



## 2.1.4 Еще пример бинарного отношения

Пример 5. Пусть множество есть следующее множество молодых людей: {Вовочка, Петя, Маша, Лена}, причем известны следующие факты:



Вовочка любит Вовочку (эгоист).

Петя любит Машу (взаимно).

Маша любит Петю (взаимно).

Маша любит Машу (себя не забывает).

Лена любит Петю (несчастная любовь).

Информацию о взаимоотношения данных молодых людей можно описать бинарным отношением "любить", заданном на множестве . Это отношение можно описать несколькими способами.



Способ 1. Перечисление фактов в виде произвольного текста (как это сделано выше).

Способ 2. В виде графа взаимоотношений:

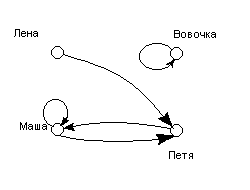


Рисунок 1 Граф взаимоотношений

Способ 3. При помощи матрицы взаимоотношений:

Таблица 1. Матрица взаимоотношений

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Кого  Кто | Вовочка | Петя | Маша | Лена |
| Вовочка | Любит |  |  |  |
| Петя |  |  | Любит |  |
| Маша |  | Любит | Любит |  |
| Лена |  | Любит |  |  |

Способ 4. При помощи таблицы фактов:

Таблица 2 Таблица фактов

|  |  |
| --- | --- |
| Кто любит | Кого любят |
| Вовочка | Вовочка |
| Петя | Маша |
| Маша | Петя |
| Маша | Маша |
| Лена | Петя |

С точки зрения реляционных баз данных наиболее предпочтительным является четвертый способ, т.к он допускает наиболее удобный способ хранения и манипулирования информацией. Действительно, перечисление фактов как текстовая форма хранения информации уместна для литературного произведения, но с трудом поддается алгоритмической обработке. Изображение в виде графа наглядно, и его удобно использовать как конечную форму представления информации для пользователя, но хранить данные в графическом виде неудобно. Матрица взаимоотношений уже больше соответствует требованиям информационной системы. Матрица удобна в обработке и компактно хранится. Но одно небольшое изменение, например, появился еще Вася и влюбился в несчастную Лену, требует перестройки *всей* матрицы, а именно, добавления *и колонок, и столбцов*. Таблица фактов свободна от всех этих недостатков - при добавлении новых действующих лиц просто добавляются новые строки.

Что касается предиката данного отношения, то он имеет следующий вид (дизъюнктивная нормальная форма):

R (x,y) = { (x = "Вовочка" AND y = "Вовочка") OR (x = "Петя" AND y = "Маша") OR (x = "Маша" AND y = "Петя") OR (x = "Маша" AND y = "Маша") OR (x = "Лена" AND y = "Петя") }

Замечание. Приведенное отношение не является ни транзитивным, ни симметричным или антисимметричным, ни рефлексивным, поэтому оно не является ни отношением эквивалентности, ни отношением порядка, ни каким-либо другим разумным отношением.

Замечание. Большая часть мировой литературы существует и имеет смысл лишь постольку, поскольку бинарное отношение "любить" не является отношением эквивалентности. В частности, по этой причине человечество не разбивается на классы эквивалентности взаимно любящих особей. Изучением характеристик данного отношения и соответствующего ему предиката занималось (и продолжает заниматься) большое количество экспертов, таких как Толстой Л.Н., Шекспир В. и др.

## 2.2 n-арные отношения (отношения степени n)

В математике n-арные отношения рассматриваются относительно редко, в отличие от баз данных, где наиболее важными являются именно отношения, заданные на декартовом произведении *более чем двух множеств*.

Пример 6. В некотором университете на математическом факультете учатся студенты Иванов, Петров и Сидоров. Лекции им читают преподаватели Пушников, Цыганов и Шарипов, причем известны следующие факты:

Пушников читает лекции по алгебре и базам данных, соответственно, 40 и 80 часов в семестр.

Цыганов читает лекции по геометрии, 50 часов в семестр.

Шарипов читает лекции по алгебре и геометрии, соответственно, 40 и 50 часов в семестр.

Студент Иванов посещает лекции по алгебре у Шарипова и по базам данных у Пушникова.

Студент Петров посещает лекции по алгебре у Пушникова и по геометрии у Цыганова.

Студент Сидоров посещает лекции по геометрии у Цыганова и по базам данных у Пушникова.

Для того чтобы формально описать данную ситуацию (например, в целях разработки информационной системы, учитывающей данные о ходе учебного процесса), введем три множества:

Множество преподавателей = {Пушников, Цыганов, Шарипов}.



Множество предметов = {Алгебра, Геометрия, Базы данных}.



Множество студентов = {Иванов, Петров, Сидоров}.



Имеющиеся факты можно разделить на две группы.1 группа (факты 1-3) - факты о преподавателях, 2 группа (факты 4-6) - факты о студентах.

Для того чтобы отразить факты 1-3 (характеризующие преподавателей и читаемые ими лекции), введем отношение на декартовом произведении , где - множество рациональных чисел. А именно, упорядоченная тройка тогда и только тогда, когда преподаватель читает лекции по предмету в количестве часов в семестр. Назовем такое отношение "Читает лекции по…". Множество кортежей, образующих отношение удобно представить в виде таблицы:



Таблица 3 Отношение "Читает лекции по…"

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A (Преподаватель) | B (Предмет) | Q (Количество часов) |
| Пушников | Алгебра | 40 |
| Пушников | Базы данных | 80 |
| Цыганов | Геометрия | 50 |
| Шарипов | Алгебра | 40 |
| Шарипов | Геометрия | 50 |

Для того чтобы отразить факты 4-6 (характеризующие посещение студентами лекций), введем отношение на декартовом произведении . Упорядоченная тройка тогда и только тогда, когда студент посещает лекции по предмету у преподавателя . Назовем это отношение "Посещать лекции". Его также представим в виде таблицы:



Таблица 4 Отношение "Посещать лекции"

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| C (студент) | B (предмет) | A (Преподаватель) |
| Иванов | Алгебра | Шарипов |
| Иванов | Базы данных | Пушников |
| Петров | Алгебра | Пушников |
| Петров | Геометрия | Цыганов |
| Сидоров | Геометрия | Цыганов |
| Сидоров | Базы данных | Пушников |

Рассмотрим отношение подробнее. Оно задано на декартовом произведении . Это произведение, содержащее 3\*3\*3=27 кортежей, можно назвать "Студенты-Лекции-Преподаватели". Множество представляет собой совокупность *всех* возможных вариантов посещения студентами лекций. Отношение же показывает *текущее* состояние учебного процесса. Очевидно, что отношение является изменяемым во времени отношением.



Итак, факты о ходе учебного процесса удалось отразить в виде двух отношений третьей степени (3-арных), а сами отношения изобразить в виде таблиц с тремя колонками.

Удобство использования табличной формы для задания отношения определяется в данном случае следующими факторами:

Все используемые множества *конечны*.

При добавлении или удалении студентов, предметов, преподавателей просто добавляются или удаляются соответствующие строки в таблице.

Нас сейчас не интересует вопрос, хороши ли полученные отношения. Заметим пока только, что, как показывают следующие замечания, не любую строку можно добавить в таблицу "Посещать лекции".

Замечание. В таблицу "Посещать лекции" нельзя добавить две одинаковые строки, т.к таблица изображает отношение , а в отношении (как и в любом множестве) *не может быть двух одинаковых элементов*. Это пример *синтаксического ограничения -* такое ограничение задано в определении понятия отношение (одинаковых строк не может быть *ни в одной таблице*, задающей отношение).



Замечание. В таблицу "Посещать лекции" нельзя добавить кортеж (Иванов, Геометрия, Пушников). Действительно, из таблицы "Читает лекции по…", представляющей отношение , следует, что Пушников *не читает* предмет "Геометрия". Оказалось, что таблицы связаны друг с другом, и существенным образом! Это пример *семантического ограничения -* такое ограничение является следствием нашей трактовки данных, хранящихся в отношении (следствием понимания *смысла* данных).



## 3. Транзитивное замыкание отношений

Введем понятие *транзитивного замыкания*, связанное с бинарными отношениями, которое понадобится в дальнейшем.

*Определение 11.* Пусть отношение задано на декартовом квадрате некоторого множества . *Транзитивным замыканием* отношения называется новое отношение , состоящее из кортежей , для которых выполняется:



либо кортеж ,



либо найдется конечная последовательность элементов , такая, что все кортежи принадлежат отношению .



Очевидно, что .



Пример 7. Пусть множество представляет собой следующее множество деталей и конструкций:



= {Болт, Гайка, Двигатель, Автомобиль, Колесо, Ось}



причем некоторые из деталей и конструкций могут использоваться при сборке других конструкций. Взаимосвязь деталей описывается отношением ("непосредственно используется в") и состоит из следующих кортежей:



Таблица 5 Отношение R

|  |  |
| --- | --- |
| Конструкция | Где используется |
| Болт | Двигатель |
| Болт | Колесо |
| Гайка | Двигатель |
| Гайка | Колесо |
| Двигатель | Автомобиль |
| Колесо | Автомобиль |
| Ось | Колесо |

Транзитивное замыкание состоит из кортежей (добавленные кортежи помечены серым цветом):



Таблица 6 Транзитивное замыкание отношения R

|  |  |
| --- | --- |
| Конструкция | Где используется |
| Болт | Двигатель |
| Болт | Колесо |
| Гайка | Двигатель |
| Гайка | Колесо |
| Двигатель | Автомобиль |
| Колесо | Автомобиль |
| Ось | Колесо |
| Болт | Автомобиль |
| Гайка | Автомобиль |
| Ось | Автомобиль |

Очевидный смысл замыкания состоит в описании включения деталей друг в друга не только непосредственно, а через использование их в промежуточных деталях, например, болт используется в автомобиле, т.к он используется в двигателе, а двигатель используется в автомобиле.



## Выводы

*Множество* - это неопределяемое понятие, представляющее некоторую совокупность данных. Элементы множества можно отличать друг от друга, а также определять, принадлежит ли данный элемент данному множеству. Над множествами можно выполнять операции объединения, пересечения, разности и дополнения.

Новые множества можно строить при помощи понятия *декартового произведения (*конечно, есть и другие способы, но они нас в данный момент не интересуют). Декартово произведение нескольких множеств - это множество *кортежей*, построенный из элементов этих множеств.

*Отношение* - это подмножество декартового произведения множеств. Отношения состоят из *однотипных* кортежей. Каждое отношение имеет *предикат отношения* и каждый n-местный предикат задает n-арное отношение.

Отношение является математическим аналогом понятия "таблица".

Отношения обладают *степенью* и *мощностью*. Степень отношения - это количество элементов в каждом кортеже отношения (аналог количества столбцов в таблице). Мощность отношения - это мощность множества кортежей отношения (аналог количества строк в таблице).

В математике чаще всего используют *бинарные отношения (*отношения степени 2). В теории баз данных основными являются отношения степени . В математике, как правило, отношения заданы на бесконечных множествах и имеют бесконечную мощность. В базах данных напротив, мощности отношений конечны (число хранимых строк в таблицах всегда конечно).

