МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

"Гомельский государственный университет

имени Франциска Скорины"

Математический факультет

Кафедра алгебры и геометрии

Курсовая работа

**БИПРИМАРНЫЕ ГРУППЫ**

Исполнитель:

студентка группы H.01.01.01 М-33

Стародубова Н.С.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры Алгебры и геометрии

Монахов В. С.

Гомель 2003

**Содержание**

Введение

1.Основные обозначения

2. Разрешимость факторизуемой группы с разложимыми факторами

3. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта

4. Произведение бипримарной и 2-разложимой групп

5. Произведение бипримарной и примарной групп

6. Доказательство теоремы (3)

Заключение

Список литературы

**Введение**

В данной курсовой работе приводятся свойства конечных групп, являющихся произведением двух групп, а именно являющихся произведением двух групп, одна из которых группа Шмидта, а вторая 2-разложимая, произведением бипримарной и 2-разложимой групп.

В третьем пункте данной курсовой работы доказываются следующие теоремы:

**Теорема.** *Пусть и --- подгруппы конечной группы и пусть . Если подгруппы и -разложимы для каждого , то разрешима.*

**Теорема.** *Пусть и --- подгруппы конечной группы и пусть . Предположим, что и --- -замкнуты для каждого . Если и -разложимы и -разложимы, то разрешима.*

В четвертом пункте доказазываются приведенные ниже теоремы.

**Теорема.** *Пусть есть группа Шмидта, --- 2-разложимая группа, порядки и взаимно просты. Если и --- конечная неразрешимая группа, то , , и --- простое число или для некоторого простого .*

**Теорема.** *Пусть --- группа Шмидта; --- -разложимая группа, где . Если и --- простая группа, то , или и --- простое число.*

В пятом пункте доказываются следующие теоремы:

**Теорема.** *Пусть конечная группа является произведением своих подгрупп и взаимно простых порядков, и пусть --- бипримарная группа, а --- 2-разложимая группа четного порядка. Предположим, что в есть неединичная циклическая силовская подгруппа . Тогда, если неразрешима, то изоморфна или .*

**Теорема.** *Пусть неразрешимая группа является произведением бипримарной подгруппы и примарной подгруппы . Тогда, если среди силовских подгрупп группы есть циклическая, то изоморфна одной из следующих групп:*

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) , где --- силовская 3-подгруппа;

7) , порядок равен , а .

**1. Основные обозначения**

|  |  |
| --- | --- |
|   | группа |
|  |  является подгруппой группы  |
|  |  является нормальной подгруппой группы  |
|  |  прямое произведение подгрупп и  |
|  |  подгруппа Фраттини группы  |
|  |  фактор-группа группы по  |
|  |  множество всех простых делителей натурального числа  |
|  |  множество всех простых делителей порядка группы  |
|  |  коммутант группы  |
|  |  индекс подгруппы в группе  |

**2. Разрешимость факторизуемой группы с разложимыми факторами**

Конечная группа называется -разложимой для простого числа , если силовская -подгруппа выделяется в ней прямым множителем. Нильпотентная группа -разложима для каждого . Через обозначается множество всех простых делителей порядка группы .

**Теорема** *Пусть и --- подгруппы конечной группы и пусть . Если подгруппы и -разложимы для каждого , то разрешима.*

Теорема (1) обобщает известную теорему Виландта-Кегеля о разрешимости конечной группы, являющейся произведением нильпотентных подгрупп [??].

Для доказательства теоремы (2) нам потребуется следующая лемма(3), которая несколько уточняет лемму Кегеля(4). Напомним, что --- центр , а если --- подгруппа группы , то --- наименьшая нормальная в подгруппа, содержащая . Группа называется *-замкнутой*, если в ней силовская -подгруппа нормальна.

**Лемма** *Пусть и --- подгруппы конечной группы , обладающие следующими свойствами:*

1) для всех ;

2) , где .

Тогда .

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства леммы Кегеля. Пусть --- наибольшая -подгруппа, содержащая и перестановочная с каждой подгруппой, сопряженной с . Предположим, что не содержится в . Это означает, что существуют элементы и такие, что не принадлежит . Поэтому --- собственная подгруппа в и есть -группа. Кроме того, перестановочна с каждой сопряженной с подгруппой, так как этим свойством обладает . Теперь для всех , что противоречит выбору .

Итак, . Значит, и --- нормальная в -подгруппа. Из условия 2) следует, что и . Так как и , то . Поэтому .

**Лемма** *Пусть конечная группа с -замкнутыми подгруппами и . Если , то .*

Доказательство. Так как , то для всех , . Первое условие леммы (5) выполнено. Так как выполняется и второе, то .

 *Секцией группы*  называется фактор-группа некоторой подгруппы из . Если не содержит секций, изоморфных симметрической группе четырех символов, то называется *-свободной*.

**Лемма** *Если конечная группа не является -свободной, то существуют -подгруппы и такие, что нормальна в и .*

Доказательство. По условию в группе существует секция , изоморфная . Пусть --- нормальная в подгруппа индекса , содержащая подгруппу с индексом . По лемме Фраттини , где --- силовская -подгруппа из , Так как имеет индекс в силовской -подгруппе из , то разрешима и содержит -холловскую подгруппу . Кроме того, и .

**Лемма** *Конечная группа, содержащая нильпотентную -холловскую подгруппу, -разрешима.*

Доказательство. Достаточно показать непростоту группы в случае, когда делит . Предположим, что простая и делит . В -свободных группах нет нильпотентных -холловских подгрупп [??], отличных от -силовской. Если не -свободна, то по лемме (??) существует ненильпотентная -подгруппа. Это противоречит теореме Виландта [??]. Лемма доказана.

Через обозначим произведение всех разрешимых нормальных в подгрупп.

**Лемма** *Пусть конечная группа и пусть разрешима, а взаимно прост с . Если в существует нилъпотентная -холловская подгруппа, то разрешима.*

Доказательство. Если --- -группа, то разрешима по лемме Сыскина(2). Пусть делит и --- минимальная нормальная в подгруппа. Если , то и разрешима по индукции, поэтому разрешима и . Пусть . Тогда и имеет порядок взаимно простой с . Значит нильпотентная -холловская подгруппа из содержится в и -разрешима по лемме(2). Из минимальности следует, что разрешима. Итак, в любом случае содержит разрешимую нормальную подгруппу . Фактор-группа удовлетворяет условиям леммы и по индукции разрешима. Поэтому разрешима и . Лемма доказана.

Теорема (??) вытекает из следующей более общей теоремы

**Теорема** *Пусть и --- подгруппы конечной группы и пусть . Предположим, что и --- -замкнуты для каждого . Если и -разложимы и -разложимы, то разрешима.*

Доказательство индукцией по порядку . Пусть --- минимальная нормальная в подгруппа. Фактор-группа , а подгруппы и будут - и -разложимыми и -замкнутыми для каждого . По индукции разрешима, а неразрешима. Поэтому и . Следовательно, в единственная минимальная нормальная подгруппа.

Пусть и пусть и --- силовские -подгруппы из и соответственно. Так как и р-замкнуты и , то по лемме (??). Но содержит точно одну минимальную нормальную подгруппу. Поэтому либо , либо . Итак для каждого , либо не делит , либо не делит . Следовательно, порядки и взаимно просты. Но теперь --- простая группа.

Так как группа Судзуки нефакторизуема(4), то по теореме Глаубермана (4)порядок делится на , а по теореме Фомина (2) порядок одного из факторов, пусть порядок , делится на . Теперь в существует нильпотентная -холловская подгруппа. По лемме (3)группа разрешима. Теорема доказана.


# 3. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта

Пусть конечная группа является произведением двух своих подгрупп и , причем есть группа Шмидта, т. е. ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Признаки разрешимости группы при дополнительных ограничениях на подгруппы и получили Б. Хупперт(2), В. А. Ведерников(4), И. П. Докторов(4), П. И. Трофимов(3). Если дедекиндова, т. е. в все подгруппы инвариантны, то простая группа описана автором в(5). Как сообщил недавно С. А. Сыскин, им изучена простая группа в случае, когда --- нильпотентная группа.

Основным результатом настоящей заметки является

**Теорема** *Пусть есть группа Шмидта, --- 2-разложимая группа, порядки и взаимно просты. Если и --- конечная неразрешимая группа, то , , и --- простое число или для некоторого простого .*

 обозначает наибольшую разрешимую инвариантную в подгруппу.

Из этой теоремы непосредственно следует описание простых групп , если --- группа Шмидта, а --- -разложимая группа, где состоит из простых делителей порядка и 2 (см. теорему(2)). В теореме (5) доказано, что неразрешимая группа , где подгруппа есть группа Шмидта, а --- нильпотентная подгруппа, есть группа из заключения теоремы(4).

Рассматриваются только конечные группы. обозначает порядок группы , а --- множество всех простых делителей . Если --- некоторое множество простых чисел, то --- наибольшая инвариантная в -подгруппа. --- подгруппа, порожденная всеми сопряженными с подгруппами в . Остальные обозначения можно найти в [??].

Свойства групп Шмидта хорошо известны [??], наиболее полно они изложены в(5). В данной работе они используются без ссылок.

Следующие два результата о простых группах понадобятся при доказательстве.

**Теорема Мазуров -- Сыскин 9** *Если --- простая группа с силовской 2-подгруппой, изоморфной неабелевой силовской 2-подгруппе из группы Шмидта, то для некоторого .*

**Теорема Гольдшмидт 10** *Если в простой группе силовская 2-подгруппа неабелева и , для всех и некоторой абелевой неединичной подгруппы из , то или .*

**Лемма**  *Пусть разрешимая группа , где --- группа нечетного порядка, --- 2-замкнутая группа четного порядка и . Если , то*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы . Введем следующие обозначения: ; --- минимальная инвариантная в подгруппа; ; --- силовская 2-подгруппа; --- ее дополнение. Ясно, что . Если , то , отсюда и . Пусть и --- минимальная инвариантная -подгруппа в . Тогда и , где --- силовская -подгруппа для . Можно считать, что , поэтому . Кроме того, неинвариантна в , значит --- собственная в подгруппа. Замечание Фраттини дает, что . Теперь и . Так как , то , т. е. --- собственная в подгруппа. Порядки и взаимно просты, поэтому . По индукции , поэтому и . Лемма доказана.

Доказательство теоремы(4). Допустим, что теорема неверна и группа --- контрпример минимального порядка. Пусть , --- инвариантная силовская -подгруппа, --- силовская -подгруппа. Так как факторгруппа группы Шмидта является либо группой Шмидта, либо циклической -группой, то благодаря теореме В. А. Ведерникова (5)можно считать, что .

Допустим, что группа непроста и --- минимальная инвариантная в подгруппа. Тогда --- неразрешимая группа.

Предположим, что не содержит . Тогда нильпотентна, а так как , то по теореме Я. Г. Берковича (6) подгруппа имеет четный порядок. Теперь по теореме 1 из (5) получаем, что силовская 2-подгруппа в неабелева. Так как , то из свойств групп Шмидта следует, что содержится в и --- силовская 2-подгруппа в . Если непроста, то --- неразрешимая группа, где --- некоторая инволюция из центра . Так как и --- группа Шмидта четного порядка, то по индукции , или , --- простое число. Замечая, что и --- абелева группа порядка 4 или , получаем, что, . Теперь должно быть четным числом, значит, . В этих случаях и --- группа кватернионов порядка 8, что противоречит тому, что . Следовательно, --- простая группа. По теореме Мазурова-Сыскина группа изоморфна . Поэтому , значит, и

Порядок факторгруппы равен , и делится на . Так как , то делит порядок . Это противоречит взаимной простоте порядков факторов.

Следовательно, содержит подгруппу . Так как --- циклическая силовская подгруппа в , то --- простая группа и по индукции , или , где --- простое число. Так как , разрешима, a , то . Теперь изоморфна некоторой подгруппе из . Если или , то или . допускает факторизацию с группой Шмидта порядка 21 и 2-группой порядка 16. Группа не допускает требуемой факторизации. Если --- простое число, то и --- простое число. Так как , где , то . Противоречие.

Таким образом, --- простая группа.

Предположим, что силовская 2-подгруппа группы абелева. Тогда по результату Уолтера [??] группа может быть изоморфной только одной из следующих групп: , или , группе Янко порядка 175560 или группе типа Ри. Из групп для указанных лишь группы или , где --- простое число, допускают нужную факторизацию [??]. Группа Янко не допускает требуемой факторизации [??]. Порядок группы делится более чем на три простых числа, и силовская 3-подгруппа содержит свой централизатор, элемент порядка 9 и неабелева(5). Поэтому неизоморфна .

В дальнейшем будем считать, что силовская 2-подгруппа в неабелева. Так как порядки и взаимно просты, то некоторая силовская 2-подгруппа из содержится либо в , либо в . Если , то и группа изоморфна для некоторого . Но в этом случае , поэтому , и делит . Так как , то делит . Но порядок делится на , а значит, и на . Противоречие.

Следовательно, . Теперь , , --- инвариантное 2-дополнение в . Если , то и ввиду леммы Бернсайда [??]. Поэтому , --- элементарная абелева -группа и --- показатель числа по модулю . Из результатов Уолеса [??] непосредственно получаем, что . Противоречие.

Значит, . Введем следующие обозначения: --- минимальная инвариантная в подгруппа; --- силовская подгруппа из , содержащая ; ; . Так как , то и разрешима. Кроме того, и по лемме С. А. Чунихина ((4), см. также лемму 1.16.1 из(3)) не содержит подгрупп инвариантных в . Применяя лемму (??) настоящей работы, получаем, что . Так как и , то и . Таким образом, .

Пусть . Покажем, что для всех . Возьмем произвольный элемент , . Тогда , поэтому , . Теперь . Так как , то . Применяя результат Гольдшмидта, получаем: или . Но этот изоморфизм ввиду невозможен. Противоречие. Теорема доказана.

**Лемма** *Пусть --- простое число, делящее порядки групп и . Если --- группа Шмидта, а --- -разложимая группа, то группа непроста.*

Доказательство. Пусть --- силовская -подгруппа из , а --- силовская -подгруппа из , для которых и есть силовская -подгруппа в [??].

Пусть инвариантна в . Тогда для любого , , имеем: . По лемме Кегеля [??] группа непроста.

Пусть неинварпантна в . Тогда циклическая и каждая собственная подгруппа из инвариантна в . Если --- силовская подгруппа в , то и , где --- силовская подгруппа из . По лемме Бернсайда группа непроста. Пусть не является силовской в . Тогда содержится как подгруппа индекса в некоторой группе , . Для элемента теперь содержит и . Если , то непроста по лемме Бернсайда. Если , то и непроста по лемме С. А. Чунихина.

Теперь из теоремы (2) и леммы (5) вытекает

**Теорема** *Пусть --- группа Шмидта; --- -разложимая группа, где . Если и --- простая группа, то , или и --- простое число.*

Ясно, что условие теоремы (??) охватывает случай, когда нильпотентна.

**Теорема** *Пусть --- неразрешимая группа, где --- группа Шмидта, --- нильпотентная группа. Тогда . и --- простое число, или для некоторого простого числа .*

Доказательство. Пусть группа --- контрпример минимального порядка. Как и в теореме (??), пусть . Ясно, что . Группа не является произведением группы Шмидта и нильпотентной группы, поэтому из теоремы (??) следует, что порядки и не взаимно просты, а из леммы (??) вытекает, что --- непростая группа.

Допустим, что порядок делится на и пусть --- силовская -подгруппа из . Тогда --- неразрешимая группа, поэтому из теоремы Виландта-Кегеля следует, что . Так как есть -группа, то и по лемме из (4) группа есть -группа, противоречие. Следовательно, порядок не делится на . Но тогда делит порядок . Рассуждая как и в лемме, получаем, что , а из следует, что .

Пусть --- минимальная инвариантная в подгруппа. В силу теоремы Виландта-Кегеля и разрешима. Если , то, применяя к индукцию, получаем, что или и --- простое число, а группа из заключения теоремы, противоречие. Значит, , кроме того, и , где --- силовская -подгруппа из , --- инвариантное -дополнение в . Проверка показывает, что --- простая группа. Пусть --- силовская -подгруппа из , для которой . Если , то централизатор элемента из содержит подгруппы и , что противоречит простоте . Далее, , поэтому --- подгруппа. Но , значит, .

Пусть --- силовская 2-подгруппа в , тогда --- силовская в . Как и в теореме (??), можно показать, что неабелева и неизоморфна . Значит, . Пусть , --- дополнение к в . Если , то повторение соответствующих рассуждений из теоремы приводит к противоречию. Значит, . Так как , то из результата Уолеса заключаем, что изоморфна одной из следующих групп: , , , , , . Для них группа Шмидта должна иметь соответственно следующие порядки: , , , , , , причем , 5, 7, 7, 13 или 17 соответственно. Но это возможно лишь когда или и в силовская 3-подгруппа абелева. Так как и в и силовские 3-подгруппы неабелевы, то получили противоречие. Теорема доказана.


# 4. Произведение бипримарной и 2-разложимой групп

В (1) описаны конечные неразрешимые группы, являющиеся произведением двух подгрупп взаимно простых порядков, одна из которых есть группа Шмидта, а вторая --- 2-разложимая группа (см. также(2)). Все свойства группы Шмидта хорошо известны, в частности, она бипримарна, т. е. ее порядок делится в точности на два различных простых числа, и в ней содержится неединичная циклическая силовская подгруппа.

Развивая указанный результат работы(6), мы доказываем в настоящей заметке следующую теорему.

**Теорема** *Пусть конечная группа является произведением своих подгрупп и взаимно простых порядков, и пусть --- бипримарная группа, а --- 2-разложимая группа четного порядка. Предположим, что в есть неединичная циклическая силовская подгруппа . Тогда, если неразрешима, то изоморфна или .*

 обозначает произведение всех разрешимых инвариантных в подгрупп.

**Следствие** *Пусть группа обладает факторизацией, указанной в теореме(3). Тогда, если порядок не равен 3 или 1, то разрешима.*

Доказательство теоремы 1 начинается с изучения частного случая, когда подгруппа примарная. Описанию этого случая, причем без предположения четности порядка подгруппы , посвящена

**Теорема** *Пусть неразрешимая группа является произведением бипримарной подгруппы и примарной подгруппы . Тогда, если среди силовских подгрупп группы есть циклическая, то изоморфна одной из следующих групп:*

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) , где --- силовская 3-подгруппа;

7) , порядок равен , а .

Так как бипримарные группы разрешимы, то группа из теоремы (7) имеет порядок, делящийся в точности на три различных простых числа. Такие простые группы к настоящему времени известны лишь в случае, когда они содержат циклическую силовскую подгруппу. Этим и вызвано требование цикличности силовской подгруппы в условии теоремы(8), а следовательно, и в условии теоремы(8).

Если будут известны все простые группы порядка , где , и --- различные простые числа, то методы доказательства теоремы (5) позволят описать неразрешимые группы с указанной в теореме (5) факторизацией без предположения цикличности подгруппы .

Используются следующие обозначения: и --- симметрическая и знакопеременная группы степени , , и --- циклическая, элементарная абелева и соответственно диэдральная группы порядка . Полупрямое произведение групп и с инвариантной подгруппой обозначается через . Примарной называется группа, порядок которой есть степень простого числа.

**Предварительные леммы**

**Лемма** *Если группа является произведением двух подгрупп и взаимно простых порядков и --- субинвариантная в подгруппа, то .*

Доказательство. Если --- инвариантная в подгруппа, то --- -холловская в подгруппа, где , а --- -холловская в подгруппа(9). Поэтому . Если теперь --- инвариантная в подгруппа, то опять



и т. д.

**Лемма** *Если группа является произведением примарной подгруппы нечетного порядка и 2-разложимой подгруппы, то разрешима.*

Доказательство. Пусть , --- -группа, --- нечетное простое число, --- 2-разложимая группа. В существует силовская -подгруппа такая, что , где --- некоторая силовская -подгруппа из (7). Так как разрешима, то , где --- -холловская подгруппа из . Но теперь . По лемме Бернсайда (5)группа непроста. Инвариантная подгруппа в по лемме факторизуема, т. е. , поэтому разрешима по индукции. Фактор-группа также разрешима по индукции. Поэтому разрешима и .

**Лемма** *Группы и не содержат бипримарные холловские подгруппы.*

Доказательство. Пусть . Тогда порядок равен и силовская 7-подгруппа в самоцентрализуема. Так как порядок больше порядка , то не содержит подгруппы порядка .

Предположим, что существует подгруппа порядка . По теореме Силова о числе силовских подгрупп подгруппа 7-замкнута, т. е. подгруппа порядка 7 из инвариантна в . Но теперь изоморфна подгруппе группы всех автоморфизмов , которая изоморфна . Противоречие.

Допустим, что есть подгруппа порядка . Как и в предыдущем случае, подгруппа не может быть 7-замкнутой. Так как индекс в нормализатора силовской 7-подгруппы сравним с 1 по модулю 7, то и . Поэтому 4 должно делить порядок , а это невозможно. Таким образом, в нет бипримарных холловских подгрупп.

Теперь пусть . Тогда порядок равен , силовская 3-подгруппа из неабелева и . Силовская 2-подгруппа также неабелева и имеет экспоненту 2. Нормализатор силовской 5-подгруппы в имеет порядок 20, а централизатор в совпадает с [??].

Предположим, что существует подгруппа порядка . Тогда 3-замкнута, а так как ненильпотентна, то . Подгруппа неабелева, поэтому минимальная инвариантная в подгруппа имеет порядок не более чем . Теперь изоморфна подгруппе из группы всех авторморфизмов . Но --- элементарная абелева, поэтому , где , и имеет порядок, не делящийся на 5. Таким образом, , но тогда . Противоречие.

Допустим, что существует подгруппа порядка . Пусть --- минимальная инвариантная в подгруппа. Так как имеет порядок 20, то неинвариантна в и есть 2-группа. По теореме Машке [??] подгруппа есть прямое произведение неприводимых -групп . Подгруппа самоцентрализуема, поэтому не централизуют и по [??] порядок равен для всех . Следовательно, и . Фактор-группа имеет порядок 20, поэтому она 5-замкнута и инвариантна в . Теперь . Пересечение инвариантно в , поэтому . Таким образом, , и изоморфна циклической группе порядка 4 из . Это противоречит тому, что имеет экспоненту 2.

Если G содержит подгруппу порядка , то индекс этой подгруппы в будет равен 5. Поэтому изоморфна подгруппе симметрической группы степени 5. Но порядок больше порядка . Противоречие.

**Лемма** *Группа содержит подгруппу порядка и не содержит бипримарные холловские подгруппы других порядков.*

Доказательство. Пусть . Тогда порядок равен и --- дважды транзитивная группа степени 13. Поэтому стабилизатор одной точки будет холловской подгруппой порядка . Силовская 3-подгруппа в неабелева. Нормализатор силовской 13-подгруппы имеет порядок , а централизатор --- 13 [??].

Пусть --- подгруппа порядка . По теореме Силова --- 13-замкнута. Поэтому центр неединичен. Противоречие.

Допустим, что есть подгруппа порядка . Так как не 13-замкнута, то минимальная инвариантная в подгруппа есть 3-группа. Подгруппа абелева, поэтому . Теперь силовская 13-подгруппа централизует . Значит, центр отличен от 1. Противоречие.


# 5 Произведение бипримарной и примарной групп

В этом параграфе мы докажем теорему(1), сформулированную во введении.

 Доказательство теоремы(3). Через обозначим циклическую силовскую -подгруппу в . Порядки и взаимно просты, поэтому в каждая субинвариантная подгруппа факторизуема. Фактор-группа удовлетворяет условию теоремы(5). Так как , то при по индукции фактор-группа изоморфна одной из групп, перечисленных в заключении теоремы(3). Следовательно, можно считать, что .

Пусть --- минимальная инвариантная в подгруппа. Подгруппа неразрешима и является произведением изоморфных простых групп. Порядок делится на , и силовская -подгруппа в --- циклическая, поэтому --- простая группа.

Предположим, что в есть еще одна минимальная инвариантная подгруппа . Тогда . Но силовские -подгруппы и содержатся в циклической -группе , поэтому . Следовательно, --- единственная в минимальная инвариантная подгруппа.

Централизатор подгруппы инвариантен в , и . Из единственности следует, что , поэтому изоморфна группе автоморфизмов .

Порядок простой группы делится в точности на три простых числа и силовская -подгруппа в циклическая. Поэтому изоморфна , где , 7, 8, 9 или 17, , , [??]. Кроме того, --- бипримарная холловская подгруппа в . В группах , , и нет бипримарных холловских подгрупп (см. [??] и лемму (??) настоящей работы).

Если изоморфна , или 7, то и имеет порядок 2. Поэтому либо , либо , или 7. Группа допускает единственную факторизацию, а именно . Группа допускает только две факторизации с взаимно простыми порядками факторов: и .

Допустим, что --- собственная в подгруппа. Если , то , . Так как , то --- подгруппа индекса 2 в , а . Подгруппа имеет единичный центр, поэтому централизатор в имеет порядок 1 или 2. В первом случае и из пункта 4) теоремы (??). Во втором случае и силовская 2-подгруппа в ) должна быть абелевой, что невозможно. Таким образом, если , то , а .

Пусть теперь . Если , то индекс в равен 2, а так как --- совершенная группа, то . Но это противоречит тому, что в силовская 2-группа диэдральная. Поэтому для одна возможность: . Но тогда , а , т. е. для возможна единственная факторизация, указанная в пункте 5).

Теперь рассмотрим случай, когда . Эта группа допускает единственную факторизацию, указанную в пункте 3) теоремы. Пусть . Так как --- подгруппа индекса 3 в , то . Причем , а . Но тогда ,а --- силовская 3-подгруппа из .

Осталось рассмотреть случай, когда . Так как индекс в группе автоморфизмов равен 2, то либо , либо . Но в нет подгрупп индекса 13.

Применяя лемму (??), заключаем, что из пункта 7) теоремы. Теорема (??) доказана полностью.

**Следствие**  *Пусть группа является произведением бипримарной подгруппы с неединичной циклической силовской подгруппой и примарной подгруппы . Тогда, если порядок не равен 3 или 7, то разрешима.*

Доказательство. Пусть --- контрпример минимального порядка. Так как фактор-группа неразрешима, то из теоремы 2 следует, что она изоморфна , где , 7 или 8; , или 7; . Поэтому порядок -группы равен 3 или 7. Значит, или 7, .

Пусть --- минимальная разрешимая инвариантная в подгруппа. Ясно, что есть -группа, а так как циклическая, то порядка . Централизатор подгруппы инвариантен в , поэтому . Кроме того, . Если , то разрешима по индукции, a примарна или бипримарна, т. е. разрешима и , противоречие. Следовательно, , и содержится в центре группы .

Пусть --- коммутант группы . По [??] пересечение равно 1. Значит, не содержится в . Из цикличности следует, что подгруппа имеет порядок, не делящийся на , т. е. разрешима. Теперь и разрешима, противоречие. Следствие доказано.

Группы Шмидта и -квазинильпотентные группы обладают неединичной циклической силовской подгруппой. Поэтому следствие обобщает результаты И. П. Д окторова [??] и М. И. Кравчука [??].


# 6. Доказательство теоремы (3)

Допустим, что теорема неверна и группа --- контрпример минимального порядка. Пусть --- циклическая силовская -подгруппа в , а , где --- силовская 2-подгруппа в , --- ее инвариантное дополнение в . В силу леммы (??) условие теоремы выполняется для , поэтому мы можем считать, что .

Пусть --- минимальная инвариантная в подгруппа. Тогда неразрешима, и по лемме (??) порядок делится на . Силовская -подгруппа циклическая, поэтому --- простая группа. Теперь, если --- другая инвариантная в подгруппа, то силовская -подгруппа пересекается с не по единице. Из минимальности следует, что содержится в . Таким образом, --- единственная минимальная инвариантная в подгруппа. Так как централизатор подгруппы инвариантен в и пересекается с по единице, то и . Следовательно, изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы .

Если --- собственная в подгруппа, то по индукции изоморфна . Но тогда изоморфна , противоречие.

Таким образом, --- простая группа. В силу теоремы (??) подгруппа неединична.

Введем следующие обозначения: --- минимальная инвариантная в подгруппа, --- силовская подгруппа из , содержащая , . Так как инвариантна в , то .

Допустим, что . Напомним, что --- наибольшая инвариантная в группе -подгруппа. Так как и , то и . Поэтому . Пусть . Покажем, что для всех . Возьмем произвольный элемент , . Тогда , поэтому для некоторого . Теперь . Так как инвариантна в , то . По теореме Гольдшмидта получаем, что либо абелева, либо изоморфна или . Если абелева, то группа разрешима, противоречие. Так как , то изоморфизм с группами и ) невозможен.

Таким образом, . Группа , и не содержит подгрупп, инвариантных в . По лемме 1 из [??] группа неразрешима. Значит, бипримарна, и делит порядок . По индукции изоморфна или .

Допустим, что имеет четный порядок. Подгруппа факторизуема, a инвариантна в , значит, и . Если содержит неединичную подгруппу, инвариантную в , то и содержит подгруппу, инвариантную в , противоречие. По лемме 1 из [??] подгруппа неединична, противоречие. Следовательно, порядок нечетен.

Теперь силовская 2-подгруппа из изоморфна силовской 2-подгруппе из группы или , т. е. --- диэдральная группа порядка 8 или 16. Поэтому и изоморфна или , нечетное. Но этот изоморфизм ввиду невозможен. Теорема доказана.

Доказательство следствия теоремы. Пусть утверждение неверно и группа --- контрпример минимального порядка. Фактор-группа неразрешима и по теореме она изоморфна или . Поэтому порядок -группы равен 3 или 7. Значит, . Теперь, повторяя дословно второй и третий абзацы доказательства следствия теоремы, мы приходим к противоречию.


# Заключение

Итак, в данной курсовой работе приводятся свойства конечных групп, являющихся произведением двух групп, одна из которых группа Шмидта, а вторая 2-разложимая, произведением бипримарной и 2-разложимой групп. Доказываются следующие теоремы:

Теорема.*Пусть и --- подгруппы конечной группы и пусть . Если подгруппы и -разложимы для каждого , то разрешима.*

Теорема.*Пусть и --- подгруппы конечной группы и пусть . Предположим, что и --- -замкнуты для каждого . Если и -разложимы и -разложимы, то разрешима.*

Теорема.*Пусть есть группа Шмидта, --- 2-разложимая группа, порядки и взаимно просты. Если и --- конечная неразрешимая группа, то , , и --- простое число или для некоторого простого .*

Теорема.*Пусть --- группа Шмидта; --- -разложимая группа, где . Если и --- простая группа, то , или и --- простое число.*

Теорема.*Пусть конечная группа является произведением своих подгрупп и взаимно простых порядков, и пусть --- бипримарная группа, а --- 2-разложимая группа четного порядка. Предположим, что в есть неединичная циклическая силовская подгруппа . Тогда, если неразрешима, то изоморфна или .*

Теорема.*Пусть неразрешимая группа является произведением бипримарной подгруппы и примарной подгруппы . Тогда, если среди силовских подгрупп группы есть циклическая, то изоморфна одной из следующих групп:*

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ;

6) , где --- силовская 3-подгруппа;

7) , порядок равен , а .


# Список литературы

[1] Huppert B., Endliche Gruppen. I, Berlin--Heidelberg --- N. Y., Springer--Verlag, 1967.

[2] Glauberman G., Factorizations in local subgroups of finite groups, Reg. Con. Ser. Math., № 33, (1977), 77.

[3] Сыскин С. А., Об одном вопросе Р. Бэра, Сиб. матем. ж. 20, № 3 (1979), 679-681.

[4] Монахов В. С., Произведение сверхразрешимой и циклической или примерной групп, Сб., Конечные группы (Тр. Гомельского семинара), Минск, "Наука и техника", 1978, 50-63

[5] Фомин А. Н., Одно замечание о факторизуемых группах, Алгебра и логика, 11, № 5 (1972), 608-611.

[6] В. Huppert, Math. Zeit., 64, 138, 1956.

[7] В. А. Ведерников, Матем. зам., 3, 201, 1968.

[8] И. П. Докторов, ДАН БССР, 13, 101, 1969.

[9] П. И. Трофимов, ДАН СССР, 167, 523, 1966.

[10] В. С. Монахов, ДАН БССР, 18, № 7, 584, 1974.

[11] С. А. Чунихин, Л. А. Шеметков, сб. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 7, 1971.

[12] О. Ю. Шмидт, Матем. сб., 31, 366, 1924.

[13] L. Redei, Publ. Math. Debrecen,4, 303, 1956.

[14] В. Д. Мазуров, С. А. Сыскин, Матем. заметки, 14, 217,1973.

[15] D. Gодdsсhmidt, Not. Amer. Math. Soc., 20, № 1, 1973.

[16] Я. Г. Бeркович, ДАН СССР, 171, 770, 1966.

[17] В. С. Монахов, ДАН БССР, 15, 877, 1971.

[18] Z. Jankо, J. Algebra, 3, 147. 1966.

[19] Н. Ward, Trans. Amer. Math. Soc., 121, 62, 1966.

[20] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Berlin, 1967.

[21] D. Wales, Algebra, 20, 124, 1972.

[22] С. А. Чyнихин, Труды семинара по теории групп, М.-Л., 1938.

[23] С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, Минск, 1964.

[24] В. Huppert, N. Itо, Math. Z., 61, 94, 1954.

[25] J. Walter, Annals Math., 89, 405, 1969.

[26] N. Ito, Acta scient. math., 15, 77, 1953.

[27] В. С. Монахов, Матем. зам., 16, 285, 1974.

[28] Монахов В. С., О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта, Докл. АН БССР, 18, № 10 (1974), 871-874.

[29] Конечные группы, Тр. Гомельского семинара, Минск, Наука и техника, 1975.

[30] Huppert В., Endliche Gruppen, Bd. I, Berlin, Springer- Verlag, 1967.

[31] Leon J., Wales D., Simple groups of order 2aZbpc with cyclic Sylow -groups, J. Algebra, 29 № 2 (1974), 246-254.

[32] Докторов И. П., Об одном классе факторизуемых групп, Докл. АН БССР, 13, № 2 (1969), 101-102.

[33] Goldschmidt D., 2-fusion in finite groups, Ann. Math., 99, № 1 (1974), 70-117.

[34] Монахов B.C., К двум теоремам Ведерникова, Докл. АН БССР, 15, № 10 (1971), 877-880.

[35] Gоrеnstein D., Walter J., The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, J. Algebra, 2 (1965), 85-151, 218-270, 334-397.