**Исследование распределения температуры в тонком цилиндрическом стержне**

Курсовая работа по информатике

Исполнитель: Солнцев П.В.

Санкт-Петербургский Государственный Технологический Институт (Технический Университет)

Санкт-Петербург 2001

**Введение**

В решении любой прикладной задачи можно выделить три основных этапа: построение математической модели исследуемого объекта, выбор способа и алгоритма решения полученной модели, численная реализация алгоритма.

Цель данной работы – на примере исследования распределения температуры в тонком цилиндрическом стержне освоить основные методы приближённых вычислений, приобрести практические навыки самостоятельных исследований, существенно опирающихся на использование методов прикладной математики.

**Постановка задачи**

Физическая модель

В ряде практических задач возникает необходимость исследования распределения температуры вдоль тонкого цилиндрического стержня, помещённого в высокотемпературный поток жидкости или газа. Это исследование может проводиться либо на основе обработки эксперимента (измерение температуры в различных точках стержня), либо путём анализа соответствующей математической модели.

В настоящей работе используются оба подхода.

Тонкий цилиндрический стержень помещён в тепловой поток с постоянной температурой , на концах стержня поддерживается постоянная температура 0.

1.2 Математическая модель

Совместим координатную ось абсцисс с продольной осью стержня с началом в середине стержня. Будем рассматривать задачу (распределения температуры по стержню) мосле момента установления режима Т0.

Первая математическая модель использует экспериментальные данные, при этом измеряют температуру Ui стержня в нескольких точках стержня с координатами xi. Результаты измерения Ui рассматривают как функцию регрессии и получают статистики. Учитывая чётность U(x) можно искать её в виде многочлена по чётным степеням x (ограничимся 4-ой степенью этого многочлена).

 (1.1)

Задача сводится к отысканию оценок неизвестных параметров, т.е. коэффициентов a0 , a1 и a2 , например, методом наименьших квадратов.

Вторая математическая модель, также использующая экспериментальные данные, состоит в применении интерполяционных формул и может употребляться, если погрешность измерений температуры Ui пренебрежимо мала, т.е. можно считать, что U(xi)=Ui

Третья математическая модель основана на использовании закона теплофизики. Можно доказать, что искомая функция U(x) имеет вид:

 (1.2)

где коэффициент теплопроводности, коэффициент теплоотдачи, D – диаметр стержня, температура потока, в который помещён стержень.

Ищем U(x) как решение краевой задачи для уравнения (1.2) с граничными условиями:

 (1.3)

на отрезке [-L|/2;L/2], где L – длина стержня, постоянная температура, поддерживаемая на концах стержня.

Коэффициент теплопроводности  зависит от температуры:

 (1.4)

где начальное значение коэффициента теплопроводности, вспомогательный коэффициент.

Коэффициент теплоотдачи вычисляют по формуле:

 (1.5)

т.е. как среднее значение функции

за некоторый отрезок времени от 0 до Т, здесь значение при t стремящемся к бесконечности, b – известный коэффициент.

Время Т0, по истечении которого распределение температуры в стержне можно считать установившимся определяется по формуле:

 (1.6)

где а – коэффициент температуропроводности, наименьший положительный корень уравнения:

 (1.7)

Задание курсовой работы

Вариант № 136

Исходные данные:

L = 0.0386 м

D = 0,00386 м

оС

оС

141,85 (Вт/м\*К)

2,703\*10-4

6,789\*10-7

3,383\*102 (Вт/м2\*К)

218 оС

 А = 3,043\*10-5 (м2/с)

11

|  |  |
| --- | --- |
| X, м | U, oC |
| 0 | 353 |
| 0,00386 | 343 |
| 0,00772 | 313 |
| 0,01158 | 261 |
| 0,01544 | 184 |
| 0,01930 | 74 |

**2. Обработка результатов эксперимента.**

**2.1 Задача регрессии. Метод наименьших квадратов.**

Ищем функцию регрессии в виде (1.1). Оценки коэффициентов находим с помощью МНК, при этом наименьшими будут оценки, обеспечивающие минимум квадратов отклонений оценочной функции регрессии от экспериментальных значений температуры; суммирование ведут по всем экспериментальным точкам, т.е. минимум величины S:

 (2.1)

В нашем случае необходимым т достаточным условием минимума S будут:

Где k = 0, 1, 2. (2,2)

Из уравнений (2.1) и (2.2) получаем:

 (2.3)

Сумма

Система (2.3) примет вид:

 (2.4)

В результате вычислений получаем Sk и Vj. Обозначим матрицу коэффициентов уравнения (2.4) через “p”:

Методом Гаусса решаем систему (2.4) и найдём обратную матрицу p-1. В результате получаем:

Подставляя в (2.1) найденные значения оценок коэффициентов ак, находим минимальное значение суммы S:

 Smin=0.7597

При построении доверительных интервалов для оценок коэффициентов определяем предварительно точечные оценки.

Предполагается, что экспериментальные значения xi измерены с пренебрежимо малыми ошибками, а случайные ошибки измерения величины Ui независимы и распределены по нормальному закону с постоянной дисперсией , которая неизвестна. Для имеющихся измерений температуры Ui неизвестная дисперсия оценивается по формуле:

Где r – число степеней свободы системы, равное разности между количеством экспериментальных точек и количеством вычисляемых оценок коэффициентов, т.е. r = 3.

Оценка корреляционной матрицы имеет вид:

Оценки дисперсий параметров оценок коэффициентов найдём по формулам:

 Где Sk – минор соответствующего диагонального элемента матрицы нормальной системы;

 главный определитель нормальной системы.

В нашем случае:

S0=3.5438 10-22

S1=-8.9667 10-14

S2=6.3247 10-7

Откуда:

Найденные оценки коэффициентов распределены по нормальному закону, т.к. линейно зависят от линейно распределённых экспериментальных данных Ui.

Известно, что эти оценки несмещённые и эффективные. Тогда случайные величины:

 Имеют распределения Стьюдента, а r = 3.

Выбираем доверительную вероятность =0,9 и по таблице Стьюдента находим критическое значение равное 2,35, удовлетворяющее равенству:

Доверительные интервалы для коэффициентов:

 (2.4\*)

В нашем случае примут вид:



**2.2 Проверка статистической гипотезы об адекватности модели задачи регрессии.**

Имеется выборка объёма n экспериментальных значений (xi;Ui). Предполагаем, что ошибки измерения xi пренебрежимо малы, а случайные ошибки измерения температур Ui подчинены нормальному закону с постоянной дисперсией Мы выбрали функцию регрессии в виде:

Выясним, нельзя ли было ограничиться многочленом второго порядка, т.е. функцией вида:

 (2.5)

C помощью МНК можно найти оценки этих функций и несмещённый оценки дисперсии отдельного измерения Ui для этих случаев:

Где r1 = 4 (количество точек – 6, параметра – 2).

Нормальная система уравнений для определения новых оценок коэффициентов функции (2.5)с помощью МНК имеет вид:

 (2.7)

Решая эту систему методом Гаусса, получим:

 (2.8)

Чем лучше функция регрессии описывает эксперимент, тем меньше для неё должна быть оценка дисперсии отдельного измерения Ui, т.к. при плохом выборе функции в дисперсию войдут связанные с этим выбором дополнительные погрешности. Поэтому для того, чтобы сделать выбор между функциями U(x) и U(1)(x) нужно проверить значимость различия между соответствующими оценками дисперсии, т.е. проверить гипотезу:

Н0 – альтернативная гипотеза

Т.е. проверить, значимо ли уменьшение дисперсии при увеличении степени многочлена.

В качестве статического критерия рассмотрим случайную величину, равную:

 (2.9)

имеющую распределение Фишера с(r ; r1) степенями свободы. Выбираем уровень распределения Фишера, находим критическое значение F\*, удовлетворяющее равенству: p(F>F\*=

В нашем случае F=349.02, а F\*=10,13.

Если бы выполнилось практически невозможное соотношение F>F, имевшее вероятность 0,01, то гипотезу Н0 пришлось бы отклонить. Но в нашем случае можно ограничиться многочленом

, коэффициенты в котором неодинаковы.

3. Нахождение коэффициента теплопроводности .

 Коэффициент вычислим по формуле (1.5), обозначим:

 (3.1)

Определим допустимую абсолютную погрешность величины интеграла I, исходя из требования, чтобы относительная погрешность вычисления не превосходила 0,1%, т.е.:

 (3.2)

Т.к. из (3.1) очевидно, что , то условие (3.2) заведомо будет выполнено, если:

 (3.3)

Т.е. в качестве предельно допустимой абсолютной погрешности вычисления интеграла I возьмём 0,001Т (3.4)

Т=218 оС, следовательно, 0,218 оС.

**3.1 Вычисление интеграла I методом трапеции**

 **Использование теоретической оценки погрешности**

Для обозначения требуемой точности количества частей n, на которые нужно разбить отрезок интегрирования [0;T] определяется по формуле:

, где M[f”(t)], t e [0;T], f(t)=e-bt3

Учитывая формулу (3.4) получаем:

 (3.5)

Дифференцируя f(t), получим:

А необходимое условие экстремума: f”(t)-f’’’(t)=0, откуда получаем:

Далее вычисляем значения f’’(t) при t=t1, t=t2, t=0 и t=T, получаем:

f’’(t1)=1.5886 10-4

f’’(t2)=-1.6627 10-4

f’’(0)=0

f’’(T)=7.4782 10-6

Итак: M1,5886 10-4, откуда n=25.66; принимаем N=26.

Далее вычислим интеграл I:

Погрешность вычисления :



3.2 Вычисление интеграла I методом парабол

При расчётах будем использовать теоретическую оценку погрешности с помощью правила Рунге. Для обеспечения заданной точности количество частей n, на которое следует разделить интервал интегрирования можно определить по формуле:

, откуда:

Нахождение М4 можно провести аналогично нахождению М2 в предыдущем пункте, но выражение для fIV(t) имеет довольно громоздкий вид. Поэтому правило Рунге – наиболее простой способ.

Обозначим через In и I2n значение интеграла I, полученное при разбиении промежутка интегрирования соответственно на n и 2n интервалов. Если выполнено равенство: |I2n-In| = 15 , то |I-I2n|=

Будем , начиная с n=2, удваивать n до тех пор, пока не начнёт выполняться неравенство (\*1), тогда:

 (3.6)

Согласно формуле парабол (3.7):

Результаты вычислений сведём в таблицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | In | I2n |
| 4 | 102.11 |  |
| 8 | 101.61 | 0.5017 |

По формуле (3.7) I = 101,61 что в пределах погрешности совпадает со значением, полученным по методу трапеций

|  |  |
| --- | --- |
| n=8 | n=4 |
| ti (8) | y8 | ti (4) | y4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 27.25 | 0.9864 |  |  |
| 54.5 | 0.8959 | 54.5 | 0.8959 |
| 81.75 | 0.6901 |  |  |
| 109 | 0.4151 | 109 | 0.4151 |
| 136.25 | 0.1796 |  |  |
| 163.5 | 0.0514 | 163.5 | 0.0514 |
| 190.75 | 0.0089874 |  |  |
| 218 | 0.00088179 | 218 | 0.00088179 |

**4. Вычисление времени Т0 установления режима**

**4.1 Решение уравнения комбинированным методом**

Время установления режима определяется по формулам (1.6) и (1.7).

Проведём сначала отделение корней. Имеем y = ctg(x) и y = Ax. Приведём уравнение к виду: A x sin(x)-cos(x) = 0. Проведём процесс отделения корня.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| F(x) | -1 | -0.6285 | 0.4843 |
| x | 0.01 | 0.05 | 0.1 |

т.е. с [0.01;0.05]

Убедимся, что корень действительно существует и является единственным на выбранном интервале изоляции.

f(a) f(b)<0 – условие существования корня выполняется

f’(x) на [a;b] – знакопостоянна: f’(x)>0 – условие единственности также выполняется. Проведём уточнение с погрешностью не превышающей 

Строим касательные с того конца, где f(x) f”(x)>0

f”(x)=(2A+1)cos(x) – A x sin(x). f”(x)>0 на (a;b), следовательно касательные строим справа, а хорды слева. Приближение корня по методу касательных:

по методу хорд:

Вычисление ведём до того момента, пока не выполнится условие:

Результаты вычислений заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | an | bn | f(an) | f(bn) |
| 0 | 0.05 | 0.1 | -0.6285 | 0.4843 |
| 1 | 0.07824 | 0.08366 | -0.0908 | 0.0394 |
| 2 | 0.08202 | 0.08207 | -9.1515 10-4 | 3.7121 10-4 |
| 3 | 0.08206 | 0.08206 | -8.4666 10-8 | 3.4321 10-8 |

Т0 = 72,7176 секунд.

4.2 Решение уравнения комбинированным методом

Приведём f(x) = 0 к виду x = (x). Для этого умножим обе части на произвольное число , неравное нулю, и добавим к обеим частям х:

X = x - f(x)

xx - A x sin(x) + cosx)

В качестве возьмём:

где М = max [f’(x)] на [a;b], а m = min [f’(x)] на [a’b]

В силу монотонности f’(x) на [a;b] имеем m = f’(а), М = f’(b). Тогда 0,045.

Приближение к корню ищем по следующей схеме:

Вычисление ведём до тех пор, пока не выполнится условие:

 (q = max |’(x)| на [a’b])

’(x) на [a’b] монотонно убывает, поэтому максимум его модуля достигается на одном из концов.

’(0,05) = 0,3322 ’(0,1) = -0,3322, следовательно, q = 0.3322 < 1. В этом случае выполняется условие сходимости и получается последовательность:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| i | xi | ( xi) |  xi |
| 0 | 0.075 | 0.082392 | 0.00739 |
| 1 | 0.082392 | 0.082025 | 0.000367 |
| 2 | 0.082025 | 0.08206 | 3.54 10-5 |
| 3 | 0.08206 | 0.082057 | 3.33 10-6 |
| 4 | 0.082057 | 0.082057 | 3.15 10-7 |

Итак, с погрешностью, меньшей 10-4, имеем:

Т0 = 72,7176 с. , 0.03142

5. Решение краевой задачи

Используем метод малого параметра. Краевую задачу запишем в виде:

 (5.1)

Введя новую переменную y = (U - , запишем (5.1) в виде:

 (5.2)

0.18L/2 =0.0193. В качестве малого параметра возьмём .

 Тогда, подставив y(x) в уравнение (5.2) и перегруппировав члены при одинаковых степенях , получим:

 (5.3)

Ограничимся двумя первыми членами ряда:

Из (5.2) и (5.3) находим общее решение уравнения для y0:

где y0 с тильдой – частное решение данного неоднородного уравнения; y(1) и y(2) – линейно независимые решения однородного уравнения.

Корни уравнения:

y0общ = 1 + c1ch(px)+c2sh(px), где p = 0.01953

Константы найдём из граничных условий:

откуда с1 = 0, с2 = -0,57; т.е. имеем функцию:

y0 = 1 - 0.57 sh(px)

Общее решение:

Частное решение:

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получим:

А1 = 0; А2 = -0,1083; В1 = 0; В2 = 17,1569;

Тогда общее решение для y1 имеет вид:

с3 = 0; с4 = 0,0462

Перейдя к старой переменной U, получим:



Итоговое уравнение:

Пользуясь этой формулой, составим таблицу значений функции U(x):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | U(x) | U |
| 0 | 352.9075 | 353 |
| 0.0019 | 350.4901 |  |
| 0.0039 | 343.1972 | 343 |
| 0.0058 | 330.9053 |  |
| 0.0077 | 313.4042 | 313 |
| 0.0097 | 290.391 |  |
| 0.0116 | 261.4598 | 261 |
| 0.0135 | 226.0893 |  |
| 0.0154 | 1836255 | 184 |
| 0.0174 | 133.2579 |  |
| 0.0193 | 74 | 74 |

Используя данную таблицу, строим график функции U(x).

 [см. приложение 1]

**6. Заключение**

Решение задачи на ЭВМ при помощи вычислительной системы ManhCad 7.0 дало результаты (функцию распределения температуры в тонком цилиндрическом стержне), полученные по решению практического задания и обработкой эксперимента (функции регрессии), которые практически (в пределах погрешности) совпадают с экспериментальными значениями.

**Список литературы**

1. Методические указания «Методы приближённых вычислений. Решение нелинейных уравнений» (ЛТИ им. Ленсовета, Л. 1983)

2.Методические указания «Приближённые методы ислисления определённых интегралов» (ЛТИ им. Ленсовета, Л. 1986)

Методические указания «Изучение распределения температуры в тонком цилиндрическом стержне» (ЛТИ им. Ленсовета, Л. 1988)