Министерство образования и науки Украины

Донецкий Национальный университет

**Курсовая работа**

**на тему: «Математические модели поведения производителей»**

Выполнила: студентка II курса группа А

Полева Е. Л.

Проверила: Жилина Л. С.

Донецк-2008

**Содержание**

Определение математической модели

Общая схема принятия решений

Типы задач на оптимизацию

Модель фирмы

Задачи

Список литературы

**Определение математической модели**

Важным фактором, определяющим роль математики в различных приложениях, является возможность описания наиболее существенных черт и свойств изучаемого объекта на языке математических символов и соотношений. Такое описание принято называть математическим моделированием или формализацией.

**Определение 1.** *Математической моделью* реального объекта (явления) называется ее упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений).

Для построения математической модели конкретной экономической задачи (проблемы) рекомендуется выполнение следующей последовательности работ:

1. Определение известных и неизвестных величин, а также существующих условий и предпосылок (что дано и что требуется найти?);
2. Выявление важнейших факторов проблемы;
3. Выявление управляемых и неуправляемых параметров;
4. Математическое описание посредством уравнений, неравенств, функций и иных отношений взаимосвязей между элементами модели (параметрами, переменными), исходя из содержания рассматриваемой задачи.

Известные параметры задачи относительно ее математической модели считаются *внешними* (заданными априори, т. е. до построения модели). В экономической литературе их называют *экзогенными переменными*. Значение же изначально неизвестных переменных вычисляются в результате исследования модели, поэтому по отношению к модели они считаются *внутренними* . В экономической литературе их называют *эндогенными переменными*.

С точки зрения назначения, можно выделить *описательные модели* и *модели принятия решения*. *Описательные модели* отражают содержание и основные свойства экономических объектов как таковых. С их помощью вычисляются числовые значения экономических факторов и показателей.

Модели принятия решения помогают найти наилучшие варианты плановых показателей или управленческих решений. Среди них наименее сложным являются оптимизационные модели, посредством которых описываются (моделируются) задачи типа планирования, а наиболее сложными —игровые модели, описывающие задачи конфликтного характера с учетом пересечения различных интересов. Эти модели отличаются от описательных тем, что в них имеется возможность выбора значений управляющих параметров (чего нет в описательных моделях).

**Общая схема принятия решения**

В математической экономике трудно переоценить роль моделей принятия решения. Наиболее частое применение находят те из них, которые сводят исходные задачи оптимального планирования производства, рационального распределения ограниченных ресурсов и эффективной деятельности экономических субъектов к экстремальным задачам, к задачам оптимального управления и к игровым задачам. Какова же общая структура таких моделей?

Любая задача принятия решения характеризуется наличием лица или лиц, преследующих определенные цели и имеющих для этого определенные возможности. Поэтому для выявления основных элементов модели принятия решения требуется ответить на следующие вопросы:

* кто принимает решение?
* каковы цели принятия решения ?
* в чем состоит принятие решения ?
* каково множество возможных вариантов достижения цели?
* при каких условиях происходит принятие решения?

Итак перед нами некая общая задача принятия решения. Для построения ее формальной схемы (модели) введем общие обозначения.

Буквой *N* обозначим множество всех, принимающих решение сторон. Пусть *N={1,2,..., n},* т.е. имеется всего n участников идентифицируемых только номерами. Каждый элемент называется лицом, принимающим решение (ЛПР). (например, отдельная личность, фирма, плановый орган большого концерна, правительства и др.).



Предположим, что множество всех допустимых решений (альтернатив, стратегий) каждого ЛПР предварительно изучено и описано математически (например, в виде системы неравенств). Обозначим их через *X1 , X2 ,..., Xn.* После этого процесс принятия решения всеми ЛПР сводится к следующему формальному акту: каждое ЛПР выбирает конкретный элемент из своего допустимого множества решений , ,..., . В результате получается набор х =(х1 ,...,хn) выбранных решений, который мы называем ситуацией.



Для оценки ситуации х с точки зрения преследуемых целей ЛПР строятся функции *f1 ,..., fn* (называемыми целевыми функциями или критериями качества), ставящие в соответствие каждой ситуации х числовые оценки *f1(x),..., fn(x)* (например, доходы фирм в ситуации х, или их затраты и т. д.). Тогда цель *i*-го ЛПР формализуется следующим образом: выбрать такое свое решение , чтобы в ситуации *х =(х1 ,...,хn)* число *fi(х)* было как можно большим (или меньшим). Однако достижение этой цели от него зависит частично в виду наличия других сторон, влияющих на общую ситуацию x с целью достижения своих собственных целей. Этот факт пересечения интересов (конфликтность) отражается в том, что функция *fi* помимо *xi* зависит и от остальных переменных *xj (j i).* Поэтому в моделях принятия решения со многими участниками их цели причодится формализовать иначе, чем максимизация или минимизация значений функции *fi(х).* Наконец, пусть нам удалось математически описать все те условия, при которых происходит принятие решения. (описание связей между управляемыми и неуправляемыми переменными, описание влияния случайных факторов, учет динамических характеристик и т. д.). Совокупность всех этих условий для простоты обозначим одним символом .



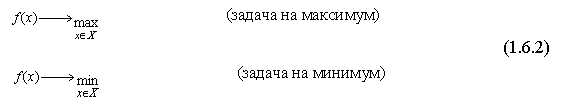
Таким образом, общая схема задачи принятия решения может выглядеть так:

(1)



Конкретизируя элементы модели (1.6.1.), уточняя их характеристики и свойства, можно получть тот или иной конкретный класс моделей принятия решения. Так если в (1.6.1.) *N* состоит только из одного элемента *(n=1),* а все условия и предпосылки исходной реальной задачи можно описать в виде множества допустимых решений этого единственного ЛПР, то из (1.6.1.) получаем структуру оптимизационной (экстремальной) задачи: < Х, f >. В этой схеме ЛПР может рассматриваться как планирующих орган. С помощью данной схемы можно написать экстремальные задачи двух видов:

(2)



Если в экстремальной задаче явно учитывается фактор времени, то она называется задачей оптимального управления. Если n 2 , то (1.6.1.) является общей схемой задачи принятия решения в условиях конфликта, т. е. в тех ситуациях, когда имеет место пересечение интересов двух или более сторон.



Часто у ЛПР имеется не одна, а несколько целей. В этом случае из (1) получаем схему , где все функции *f1(x),..., fn(x)* определены на одном и том же множестве Х. Такие задачи называются задачами многокритериальной оптимизации.



Имеются классы задач принятия решения, получившие свои названия исходя из их назначения: системы массового обслуживания, задачи управления запасами, задачи сетевого и календарного планирования, теория надежности и др.

Если элементы модели (1) не зависят явно от времени, т. е. процесс принятия решения сводится к мгновенному акту выбора точки из заданного множества, то задача называется *статической.* В противном случае, т. е. когда принятие решения представляет собой многоэтапный дискретный или непрерывный во времени процесс, задача называется *динамической*. Если элементы модели (1) не содержат случайных величин и вероятностных явлений, то задача называется детерминированной, в противном случае — стохастической.

**Типы задач на оптимизацию**

***Задача оптимального раскроя материала*** . Фирма изготавляет изделие состоящее из р деталей. Причем в одно изделие эти детали входят в количествах *k1 ,..., kr* . С этой целью производится раскрой m партий материала. В i-ой партии имеется *bi* единиц материала. Каждую единицу материала можно раскроить на детали n способами. При раскрое единицы *i*-ой партии *j*-м способом получается *аijr* деталей *r-го* вида. Требуется составить такой план раскроя материала, чтобы из них получить максимальное число изделий.

***Транспортная задача.*** Имеется *n* поставщиков и *m* потребителей одного и того же продукта. Известны выпуск продукции у каждого поставщика и потребности в ней каждого потребителя, затраты на перевозки продукции от поставщика к потребителю. Требуется построить план транспортных перевозок с минимальными транспортными расходами с учетом предложения поставщиков и спроса потребителей.

***Задача о назначениях на работу .*** Имеется *n* работ и *n* исполнителей. Стоимость выполнения работы *i* исполнителем *j* равна *cij*. Нужно распределить исполнителей на работы так, чтобы минимизировать затраты на оплату труда.

***3адача о смесях (о рационе).*** Из m видов исходных материалов каждый из которых состоит из n компонент, составить смесь, в которой содержание компонент должно быть не меньше *b1 ,...,bn* .Известны цены единиц материалов *с1 ,...,сm* и удельный вес *j-*го компонента в единице *i-го* материала. Требуется составить смесь, в которой затраты будут минимальными.

***Задача о рюкзаке.*** Имеется n предметов. Вес предмета *i* равен *рi* , ценность – *сi (i=1,...,n).* Требуется при заданной ценности груза выбрать совокупность предметов минимального веса.

***Задача о коммивояжере.*** Имеется *n* городов и заданы расстояния *cij* между ними *(j,i=1,...,n).* Выезжая из одного (исходного) города, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах по одному разу и вернуться в исходный город. Нужно определить в каком порядке следует обьезжать города, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим.

***Задача о станках.*** На универсальном станке обрабатываются одинаковые партии из n деталей. Переход от обработки детали *i* к обработке детали *j* требует переналадки станка, которая занимает *cij* времени. Требуется определить последовательность обработки деталей, при которой общее время переналадок станка при обработку партии деталей минимально.

***Задача о распределении капиталовложений.*** Имеется *n* проектов, причем для каждого проекта *j* известны ожидаемый эффект от его реализации и необходимая величина капиталовложений *gj* . Общий объем капиталовложений не может превышать заданной величины *b*. Требуется определить, какие проекты необходимо реализовать, чтобы суммарный эффект был наибольшим.



***Задача о размещении производства***. Планируется выпуск m видов продукции, которые могли бы производиться на n предприятиях *(n>m).* Издержки производства и сбыта единицы продукции, плановый объем годового производства продукции и плановая стоимость единицы продукции каждого вида известны. Требуется из *n* предприятий выбрать такие *m*, каждое из которых будет производить один вид продукции.

**Модель фирмы**

Пусть производственная фирма выпускает один вид продукции или много видов, но в постоянной структуре. Тогда годовой выпуск фирмы в натурально-вещественной форме X - это число единиц продукции одного вида или число много номенклатурных агрегатов. Для производства продукции фирма использует настоящий труд *L* ( среднее число занятых в год либо отработанные за год человеко-часы) прошлый труд в виде средств труда *К* (основные производственные фонды) и предметов труда *М* (затраченные за год топливо, энергия, сырьё, материалы, комплектующие и т.п.).

Каждый из этих трех агрегированных видов ресурсов (труд, фонды и материалы) имеет определенное число разновидностей (труд разной квалификации, оборудование различного вида и т.п.). Обозначим вектор-столбец возможных объемов затрат различных видов ресурсов через *х=(х1 ...,* *хn)'.* Тогда технология фирмы определяется ее производственной функцией, выражающей связь между затратами ресурсов и выпуском:

*X=F(x). (3)*

Предполагается, что *F(x)* является дважды непрерывно-дифференцируемой и неоклассической, кроме того, ее матрица вторых производных отрицательно определена.

Если цена единицы продукции равна р, а цена единицы ресурса *j-го* вида — *wj ,j= 1, ..., n,* то каждому вектору затрат х отвечает прибыль *П(х) = pF(x)-wx, ( 4)* где *w= (w1, w2 ..., wn)* — вектор-строка цен ресурсов. Цены ресурсов имеют естественный и понятный смысл: если *хj* — среднегодовое число занятых определенной профессии, то *wj* - годовая заработная плата одного работника данной профессии; если *хj* — по-купные материалы (топливо, энергия и т.п.), то *wj* — покупная цена единицы данного материала; если *хj* — производственные фонды определенного вида, то *wj* — годовая арендная плата за единицу фондов или стоимость поддержания единицы фондов в исправности, если фирма владеет этими средствами.

В (4) *R = pX= pF(x)* - стоимость годового выпуска фирмы или ее годовой доход, *С = wx* — издержки производства или стоимость затрат ресурсов за год.

Если нет других ограничений на размеры вовлекаемых в производ-ство ресурсов, кроме естественного требования их неотрицательности, то задача на максимум прибыли приобретает вид

*max [pF(x)- wx]*  (5)

Это задача нелинейного программирования с *п* условиями неотрицательности *х*>0, необходимыми условиями ее решения являются условия Куна-Таккера (см. В. А. Колемаев «Математическая экономика», с.236, Приложение 4)

(6)



Если в оптимальном решении использованы все виды ресурсов, т.е. *х\**>0, то условия (6) принимают вид



или (7)



т.е. в оптимальной точке стоимость предельного продукта данного pесурса должна равняться его цене.

Точно такое же по форме решение имеет задача на максимум выпуска при заданном объеме издержек

*max F(x), (8) wx С, х 0*



Это задача нелинейного программирования с одним линейным ограничением и условием неотрицательности переменных. Согласно теории (см. Приложение 4) вначале строим функцию Лагранжа

*L(x,) = F(x) + (C-wx),*



затем максимизируем ее при условии неотрицательности переменных. Для этого необходимо выполнение условий Куна—Таккера

(9)



Как видим, условия (9) полностью совпадают с (6), если



***Пример .*** Выпуск однопродуктовой фирмы задается следующей проиводственной функцией Кобба-Дугласа:

*Х= F(K, L)* = *3K2/3L1/3*

*Определить максимальный выпуск, если на аренду фондов и оплату труда выделено 150 д.е., стоимость аренды единицы фондов wк= 5 д.е./е.ф., ставка заработной платы wL = 10 д.е./чел.*

*Какова предельная норма замены одного занятого фондами в оптимальной точке?*

Решение. Поскольку *F(0,L) = F(K, 0) = 0*, то в оптимальном решении *К\* > 0, L\*>0*, поэтому условия (9) принимают вид

(10)



или в нашем случае



Поделив первое уравнение на второе, получаем



Подставив это соотношение в условие *wKK\* + wLL\** = 150, находим



Решение можно проиллюстрировать геометрически. На рис. 1 изображены изокосты (линии постоянных издержек для *С* = 50, 100, 150) и изокванты (линии постоянных выпусков для *Х*= 25,2; 37,8).



Рисунок 1

Изокосты имеют следующие уравнения:

*5K+10L=C = const.*

Изокванты имеют следующие уравнения:

В оптимальной точке *К\** = 20, *L\** = 5 изокванта *X\** = 37,8 и изокоста, проходящие через эту точку, касаются, поскольку согласно (10) нормали к этим кривым, заданные градиентами , коллинеарны.



Норма замены труда фондами в оптимальной точке



т.е. один работающий может быть заменен двумя единицами фондов.

Решая задачу фирмы (5) на максимум прибыли, находим единственный оптимальный набор ресурсов *х\** >0 (рассматриваем случай, когда все ресурсы войдут в набор). Этому набору отвечает единственное значение издержек *С\* = wx\** . Решим теперь задачу (8) на максимум выпуска при заданных издержках *С\** . Если *F(x)* — неоклассическая производственная функция, то в оптимальном решении *х\** > 0, причем это решение единственно.

Таким образом, с одной стороны,

,



а с другой стороны –. Поскольку *П(х\*) = pF(x\*)-wx\* pF()-w=П() и wx\*= w=С\*, то* , но , поэтому .



Так как решение задачи на максисмум прибыли (5) единственно, то *= х\**. Итак, если задача на максимум прибыли имеет единственное решение *х\* > 0*, то ей отвечает задача на максимум выпуска при заданных издержках *С\* = wx\**, причем последняя имеет такое же решение, как и первая (см. рис. 1).



Геометрическое место точек касания изокост и изоквант при разных значениях издержек С определяет долгосрочный путь развития фирмы *Х(С),* т.е. показывает, как будет увеличиваться (уменьшаться) выпуск, если издержки возрастут (уменьшатся). Поскольку эта зависимость монотонна, то существует обратная монотонная функция издержек

*С = С(Х).*

Поскольку *Х(С)* — максимальный выпуск при заданных издержек то издержки *С(Х)*, отвечающие этому максимальному выпуску *X*, — минимальные издержки.

Если известна функция минимальных издержек *С(Х),* оптимальный размер выпуска снова определяется из условия максимума прибыли

*max П(х), П(х) = рХ -С(X).* (11)

Приравниваем к нулю производную:



т.е. в оптимальной точке предельные издержки равны цене выпуска:



(кроме того, максимум прибыли достигается при ). Рассмотрим *п* соотношений (7)



Эти соотношения могут быть разрешены относительно *х* в окрестности оптимальной точки, если якобиан *|J| 0*, где



Это означает, что должен быть отличен от нуля гессиан *|Н|* производственной функции (но *Н* отрицательно определена, поэтому действительно *|Н| =0*). Тогда

*х\* = х\* (р,w)*  (12)

или

*хj\* = хj\* (р,w), j = 1,…,n*

Эти *п* уравнений задают **функции спроса** (на ресурсы), найденные с помощью модели поведения фирмы. Функции спроса на ресурсы могут быть также найдены экспериментально с помощью методов математической статистики по выборочным данным. **Функция предложения**

*Х\*(р, w) = F [x\*(p, w)].*

Подобно уравнениям Слуцкого, показывающим реакцию потребителя на изменения цен товаров, аналогичные уравнения описывают реакцию производителя на изменения цен выпуска и ресурсов.

При заданных ценах *р, w* поведение производителя определяется следующими соотношениями (всего *(п + 1)* соотношение):

*Х\*(р, w) = F [x\*(p, w)],*

*.*



**Задачи**

1. Производственная функция *Х=* описывает зависимость между затратами ресурсов *х1, х2 , х3* и выпуском *Х.*



Определить максимальный выпуск, если

*х1+х2+х3*=9.

Каковы предельные продукты в оптимальной точке?

*Решение.*

Согласно условиям (8) для задачи на максимум выпуска, должны выполняться:

*max F(x), wx С, х 0.*



Составим функцию Лагранжа:

*L(x,) = F(x) + (C-wx),*



*L(x,)= +;*



Дифференцируя заданную функцию по перменным *х1, х2 , х3,*имеем систему неравенств:



Решая систему, получим значения: при =**4,061**, **0,877**.



Обозначим найденую точку через *М*. Найдем значение функции *Х* в полученой точке:

**11,28.**



Найдем предельные продукты по ресурсам в точке *М*:



1. Производственная функция фирмы имеет следующий вид:

*Х*=3.



Определить предельные продукты по ресурсам и построить изокванту *Х*=3. Написать уравнеие изоклинали (линии наибольшего роста выпуска), проходящей через точку *х1=1, х2=1*, найти норму замены первого ресурса вторым в этой точке.

*Решение.*

Предельным продуктом по первому ресурсу является



по второму –



Уравнение изокванты имеет вид при *Х*=3 :



*х1*

*х2*

Общее уравнение изоклинали имеет вид:  *,* где (х1 0, х2 0) – координаты точки, через которую проходит изоклиналь. Подставим точки в уравнение, получим: .



Норма замены первого ресурса вторым в этой точке равен:



**Список используемой литературы**

1. В. А. Колемаев «Математическая экономика».
2. В. Д. Камаев «Экономическая теория для вузов».
3. В. С. Немчинов «Экономико-математические методы и модели».
4. Ресурс Internet.