##

## **Курсовая работа**

## **"Методические особенности введения показательной функции в курсе математики средней школы"**

##

**Введение**

При изучении степенной функции в школьном курсе математики подходят с позиции изучения таких понятий как, постепенное расширение значения числа , причем рассматриваются не функции, например, , , а вводится понятие степени определенного вида. При изучении понятия степень в школе получаем следующую последовательность:

– степень с натуральным показателем (7 класс)

– степень с нулевым и целым отрицательным показателем (7 класс)

– степень с рациональным нецелым показателем (11 класс)

– степень с иррациональным показателем (11 класс).

Изучение темы «Показательная функция», является важнейшим этапов не только в изучении всех видов функций в школьном курсе математики, но самой математики как целой науки. На изучение темы отводится 6 часов.

Поурочное планирование следующее:

1 урок – лекция;

2 урок – практикум по решению задач.

Решение показательных уравнений и неравенств:

1 урок – решение типовых задач;

2 урок – практикум по решению задач;

3 урок – практикум по решению задач.

4 урок – закрепление изученного материала по теме «Показательная функция».

**1. Формирование понятия функции**

**1.1 Историческое определение функции**

Начиная с XVII в. одним из важнейших понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира.

Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур.

Те вавилонские ученые, которые 4–5 тысяч лет назад нашли для площади S круга радиусом r формулу S=3r2 (грубо приближенную), тем самым установили, пусть и не сознательно, что площадь круга является функцией от его радиуса. Таблицы квадратов и кубов чисел, также применявшиеся вавилонянами, представляют собой задания функции.

Однако явное и вполне сознательное применение понятия функции и систематическое изучение функциональной зависимости берут свое начало в XVII в. в связи с проникновением в математику идеи переменных. В «Геометрии» Декарта и в работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции носило по существу интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых (функции от абсцисс (х); путь и скорость (функции от времени (t) и тому подобное.

Четкого представления понятия функции в XVII в. еще не было, путь к первому такому определению проложил Декарт, который систематически рассматривал в своей «Геометрии» лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических.

Постепенно понятие функции стало отождествляться таким образом с понятием аналитического выражения формулы.

Слово «функция» (от латинского functio – совершение, выполнение)

Лейбниц употреблял с 1673 г. в смысле роли (величина, выполняющая ту или иную функцию). Как термин в нашем смысле выражение «функция от х» стало употребляться Лейбницем и И. Бернулли; начиная с 1698 г. Лейбниц ввел также термины «переменная» и «константа» (постоянная).

Для обозначения произвольной функции от х Иоганн Бернулли применял знак х, называя характеристикой функции, а также букву х Лейбниц употреблял х1, х2 вместо современных .

Эйлер обозначал через то, что мы ныне обозначаем через .

Явное определение функции было впервые дано в 1718 г. одним из учеников и сотрудников Лейбница, выдающимся швейцарским математиком Иоганном Бернулли:

«Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Леонард Эйлер во «Введении в анализ бесконечных» (1748) примыкает к определению своего учителя И. Бернулли, несколько уточняя его.

Определение Л. Эйлера гласит: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств».

Так понимали функцию на протяжении почти всего XVIII в. Даламбер, Лагранж и другие видные математики. Что касается Эйлера, то он не всегда придерживался этого определения; в его работах понятие функции подвергалось дальнейшему развитию в соответствии с запросами математической науки.

В некоторых своих произведениях Л. Эйлер придает более широкий смысл функции, понимая ее как кривую, начертанную «свободным влечением руки». В связи с таким взглядом Л. Эйлера на функцию между ним и его современниками, в первую очередь его постоянным соперником, крупным французским математиком Даламбером, возникла большая полемика вокруг вопроса о возможности аналитического выражения произвольной кривой и о том, какое из двух понятий (кривая или формула) следует считать более широким. Так возник знаменитый спор, связанный с исследованием колебаний струны.

В «Дифференциальном исчислении», вышедшем в свет в 1755 г, Л. Эйлер дает общее определение функции: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». «Это наименование, – продолжает далее Эйлер, – имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество определяется с помощью других».

На основе этого определения Эйлера французский математик С.Ф. Лакруа в своем «Трактате по дифференциальному и интегральному исчислению», опубликованном в 1797 г., смог записать следующее: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих других количеств, называется функцией этих последних независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применить, чтобы перейти от них к первому».

Как видно из этих определений, само понятие функции фактически отождествлялось с аналитическим выражением. Новые шаги в развитии естествознания и математики в XIX в. вызвали и дальнейшее обобщение понятия функции.

Большой вклад в решение спора Эйлера, Даламбера, Д. Бернулли и других ученых XVIII в. по поводу того, что следует понимать под функцией, внес французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830), занимавшийся в основном математической физикой. В представленных им в Парижскую Академию наук в 1807 и 1811 гг., работах по теории распространения тепла в твердом теле Фурье привел и первые примеры функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями. Из трудов Фурье явствовало, что любая кривая независимо от того, из скольких и каких разнородных частей она составлена, может быть представлена в виде единого аналитического выражения и что имеются также прерывные кривые, изображаемые аналитическим выражением. В своем «Курсе алгебраического анализа», опубликованном в 1821 г., французский математик О. Коши обосновал выводы Фурье. Таким образом, на известном этапе развития физики и математики стало ясно, что приходится пользоваться и такими функциями, для определения которых очень сложно или даже невозможно ограничиться одним лишь аналитическим аппаратом.

В 1834 г. в работе «Об исчезании тригонометрических строк» Н.И. Лобачевский, развивая вышеупомянутое эйлеровское определение функции в 1755г., писал:

«Общее понятие требует, чтобы функцией от х называть число, которое дается для каждого х и вместе с х постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной… Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе».

Еще до Лобачевского аналогичная точка зрения на понятие функции была высказана чешским математиком Б. Больцано. В 1837 г. немецкий математик П. Лежен-Дирихле так сформулировал общее определение понятия функции: «у есть функция переменной х (на отрезке (a; b), если каждому значению х (на этом отрезке) соответствует совершенно определенное значение у, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие – аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами».

Прослеживая исторический путь развития понятия функции, невольно приходишь к мысли о том, что эволюция еще далеко не закончена и, вероятно, никогда не закончится, как никогда не закончится и эволюция математики в целом. Новые открытия и запросы естествознания и других наук приведут к новым расширениям понятия функции и других математических понятий.

Математика – незавершенная наука, она развивалась на протяжении тысячелетий, развивается в нашу эпоху и будет развиваться в дальнейшем.

**1.2 Различные подходы к определению понятия функции**

Обоснование функциональной линии как ведущей для школьного курса математики – одно из крупнейших достижений современной методики. Однако реализация этого положения может быть проведена многими различными путями; многообразие путей вызвано фундаментальностью самого понятия функции.

Для того чтобы составить представление об этом многообразии, сравним две наиболее резко различающиеся методические трактовки этого понятия; первую мы назовем генетической, а вторую – логической.

Генетическая трактовка понятия функции основана на разработке и методическом освоении основных черт, вошедших в понятие функции до середины XIX в. Наиболее существенными понятиями, которые при этой трактовке входят в систему функциональных представлений, служат переменная величина, функциональная зависимость переменных величин, формула (выражающая одну переменную через некоторую комбинацию других переменных), декартова система координат на плоскости.

Генетическое развертывание понятия функции обладает рядом достоинств.

В нем подчеркивается «динамический» характер понятия функциональной зависимости, легко выявляется модельный аспект понятия функции относительно изучения явлений природы. Такая трактовка естественно увязывается с остальным содержанием курса алгебры, поскольку большинство функций, используемых в нем, выражаются аналитически или таблично.

Генетическая трактовка понятия функции содержит также черты, которые следует рассматривать как ограничительные. Одним из очень существенных ограничений является то, что переменная при таком подходе всегда неявно (или даже явно) предполагается пробегающей непрерывный ряд числовых значений. Поэтому в значительной степени понятие связывается только с числовыми функциями одного числового аргумента (определенными на числовых промежутках). В обучении приходится, используя и развивая функциональные представления, постоянно выходить за пределы его первоначального описания.

Логическая трактовка понятия функции исходит из положения о том, что строить обучение функциональным представлениям следует на основе методического анализа понятия функции в рамках понятия алгебраической системы. Функция при таком подходе выступает в виде отношения специального вида между двумя множествами, удовлетворяющего условию функциональности. Начальным этапом изучения понятия функции становится вывод его из понятия отношения.

Реализация логического подхода вызывает необходимость иллюстрировать понятие функции при помощи разнообразных средств; язык школьной математики при этом обогащается. Помимо формул и таблиц, здесь находят свое место задание функции стрелками, перечислением пар, использование не только числового, но и геометрического материала; геометрическое преобразование при таком подходе оказывается возможным рассматривать как функцию.

В современном школьном курсе математики в итоге длительных методических поисков в качестве ведущего был принят генетический подход к понятию функции. Одновременно учитывается все ценное, что можно извлечь из логического подхода. Исходя из этого при формировании понятий и представлений, методов и приемов в составе функциональной линии система обучения строится так, чтобы внимание учащихся сосредоточивалось, во-первых, на выделенных и достаточно четко разграниченных представлениях, связанных с функцией, и, во-вторых, на установлении их взаимодействия при развертывании учебного материала. Иными словами, в обучении должна быть выделена система компонентов понятия функции и установлена связь между ними. В эту систему входят такие компоненты:

– представление о функциональной зависимости переменных величин в реальных процессах и в математике;

– представление о функции как о соответствии;

– построение и использование графиков функций, исследование функций;

– вычисление значений функций, определенных различными способами.

В процессе обучения алгебре все указанные компоненты присутствуют при любом подходе к понятию функции, но акцент может быть сделан на одном из них. Как только что мы отметили, функциональный компонент является основой введения и изучения понятия функции. На этой основе при организации работы над определением вводятся и другие компоненты, проявляющиеся в различных способах задания функциональной.

Понятие функции, в системе формирования которого должны присутствовать такие задания, сразу выступает в курсе математики как определённая математическая модель, что и является мотивировкой для его углублённого изучения.

**2 Методика введения понятия функция**

**2.1 Методика введения понятий: функции, аргумента, области определения. Различие индуктивного и дедуктивного подходов**

Не смотря на чрезвычайно большой объем, широту и сложность понятия функции, его простейший вариант дается уже в средних классах школы. Это понятие в дальнейшем играет важную роль, являясь базовым понятием в изучении алгебры и начал анализа. Начиная с 7 класса средней школы идет постепенное изучение свойств функций и функциональных зависимостей. Рассматриваются различные классы функций: начиная с простейших линейных функций и их графиков, затем следуют квадратичные функции, функции обратной пропорциональности и дробно-линейные функции.

В более старших классах вводятся тригонометрические функции, и, наконец, показательные и логарифмические функции. Все эти функции рассматриваются только как функции одной переменной, причем сами переменные не выходят за рамки множества вещественных чисел.

В настоящее время, на волне педагогического поиска, стало появляться множество экспериментальных учебников для использования в школе.

Наряду с добротными, толково написанными учебниками, в школы стала попадать, под предлогом апробации, масса учебников с довольно вольной трактовкой учебного материала, в том числе и глав, касающихся изучения функций. Часто нарушается логический порядок следования изучаемых разделов, допускаются ошибки при построении графиков, материал необоснованно упрощается, примитивизируется или наоборот, чрезмерно перегружается терминами и символикой.

Введение понятия функции – длительный процесс, завершающийся формированием представлений о всех компонентах этого понятия в их взаимной связи и о роли, играемой им в математике и в ее приложениях. Этот процесс ведется по трем основным направлениям:

– упорядочение имеющихся представлений о функции, развертывание системы понятий, характерных для функциональной линии (способы задания и общие свойства функций, графическое истолкование области определения, области значений, возрастания и т. д. на основе метода координат);

– глубокое изучение отдельных функций и их классов;

– расширение области приложений алгебры за счет включения в нее идеи функции и разветвленной системы действий с функцией.

Первое из этих направлений проявляется в курсе школьной алгебры ранее остальных.

В реализации этого направления значительное место отводится усвоению важного представления, входящего в понятие функции, – однозначности соответствия аргумента и определенного по нему значения функции. Для рассмотрения этого вопроса привлекаются различные способы задания функции.

Чаще других в математике и ее приложениях применяется задание функции формулой. Все другие способы играют подчиненную роль. Именно поэтому после первого знакомства с несколькими такими способами основное внимание в обучении уделяется тем функциям и классам, которые имеют стандартную алгебраическую форму их выражения.

Однако при введении понятия, сопоставление разных способов задания функции выполняет важную роль. Во-первых, оно связано с практической потребностью: и таблицы, и графики, как правило, служат для удобного в определенных обстоятельствах представления функции, имеющей аналитическую форму записи. Во-вторых, оно важно для усвоения всего многообразия аспектов понятия функции. Формула выражает функцию лишь будучи включенной в соответствующую систему представлений и операций, а эта система такова, что различные компоненты понятия функции могут быть отображены наиболее естественно различными средствами.

Использование перевода задания функции из одной формы представления в другую – необходимый методический прием при введении понятия функции.

Реализация этого приема состоит в использовании системы заданий, в которых представлены все случаи такого перевода. Если ограничиться основными способами представления функции – формулой, графиком, таблицей, то получится 6 типов упражнений, при которых форма представления меняется, и 3 – при которых она остается такой же. Приведем примеры заданий первого типа – изменения формы представления:

а) Изобразить график функции у = 4х+1 на промежутке [0; 2].

б) Проверить, насколько точна таблица квадратов чисел, взяв несколько значений для аргумента и проведя расчет: x=1,35; 2,44; 9,4; 7; 6,25.

Мы рассмотрим методику работы с этими заданиями только на этапе первоначального ознакомления с понятием функции, на других этапах она может быть совершенно иной. На рассмотренном этапе учащиеся еще не знают общего вида графика линейной функции (задание а)). Поэтому график функции у=4х+1 они могут построить только по точкам. Учитель может обратить внимание на то, что по точкам нельзя построить целиком график функции, если она определена на бесконечном множестве, но заметно, что эти точки лежат на прямой; оказывается, что это замечание верно.

Таким образом, можно установить связи с дальнейшим изучением материала. Способ построения графика функции по точкам иллюстрируется заданием в); пользуясь конкретным содержанием задания, учитель может отметить, что предлагаемые учащимися графики могут отличаться от действительного положения, но что на практике этим приемом часто приходится пользоваться (интерполяция). В задании б) можно отметить связь функциональных представлений с числовой системой – с понятиями точного и приближенного числового значения. С их сопоставлением постоянно приходится сталкиваться при построении графиков, потому что наносить точки на график можно лишь с ограниченной точностью.

В настоящее время в изучении понятия функции в школе преобладающими являются два основных подхода: индуктивный и дедуктивный.

Сложившись исторически, они наиболее полно отвечают целям и задачам образования, и поэтому именно им отдано предпочтение при изучении математики, в том числе функций, в средних классах школ.

Обилие примеров, призванных проиллюстрировать понятие функции, объясняется тем фактом, что проводя аналогии между различными примерами, учащиеся интуитивно нащупывают суть этого понятия, строят догадку относительно функциональных зависимостей в быту и в природе, и получают ее подтверждение в последующих примерах.

Второй не менее важной причиной является то, что каждый из этих примеров содержит функцию заданную одним из возможных способов.

В первом примере она задана аналитически, во втором – графически, в третьем это таблица. Это не случайность, разбирая примеры вместе с учителем, дети сразу привыкают к различным способам задания функций. И когда преподаватель начнет рассказывать параграф о способах задания функций, ученикам будет гораздо легче осознать новый материал, потому что для них он не будет абсолютно новым – они уже сталкивались с этим ранее.

Далее дается само определение функции, вводятся термины аргумент и значение функции.

«В рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Такую зависимость одной переменной от другой называют функциональной зависимостью или функцией.

Независимую переменную иначе называют аргументом, а о зависимой переменной говорят, что она является функцией от этого аргумента.

Так, площадь квадрата является функцией от длины его стороны; путь, пройденный автомобилем с постоянной скоростью, является функцией от времени движения.

Значения зависимой переменной называют значениями функции.

Все значения которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.»

Так на практике реализуется индуктивный подход к изучению функций в школе. Альтернативой ему служит дедуктивный подход, который, хотя и применяется реже, имеет целый ряд положительных аспектов, которые и стали причиной его применения в школе.

Для этого подхода характерно первоначальное, полное и сжатое изложение учебного материала, пусть даже малопонятного при первом прочтении, и дальнейшая углубленная проработка всех примеров, терминов и определений. Такой подход к изучению функций и не только их позволяет учащимся самостоятельно попытаться проследить логические связи в излагаемом материале, резко увеличивает интенсивность мыслительной деятельности, способствует более активному и глубокому запоминанию.

Вот как выглядит изложение той же темы «Понятие функции» в соответствии с дедуктивным подходом:

1. Зависимости одной переменной от другой называют функциональными зависимостями.

2. Зависимость переменной у от переменной х называют функцией, если каждому значению х соответствует единственное значение у. При этом используют запись у = f (х).

3. Переменную х называют независимой переменной или аргументом, а переменную у – зависимой переменной. Говорят, что у является функцией от х.

4. Значение у, соответствующее заданному значению х, называют значением функции.

5. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции; все значения, которые принимает зависимая переменная образуют множество значений функции.

6. Для функции f приняты обозначения: D (f) (область определения функции, E(f) (множество значений функции, f () (значение функции в точке ).

7. Если D(f)= R и E(f)= R, то функцию называют числовой.

8. Элементы множества D(f) также называют значениями аргумента, а соответствующие им элементы E (f) значениями функции.

9. Если функция задана формулой и область определения функции не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл.

10. Графиком функции называют множество всех точек, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты (соответствующим значениям функции.

Затем, на следующих уроках, происходит детальный разбор этого материала при активной работе учащихся. Тщательно рассматриваются все определения, прорешиваются примеры – идет усвоение нового материала.

**2.2 Методика введения показательной функции**

Изучение темы «Показательная функция» в курсе алгебры и начала анализа предусматривает знакомство учащихся с вопросами:

Обобщение понятия о степени; понятие о степени с иррациональным показателем; решение иррациональных уравнений и их систем; показательная функция, ее свойства и график; основные показательные тождества:

; ;

тождественные преобразования показательных выражений; решение показательных уравнений, неравенств и систем; понятие об обратной функции; функция, ее свойства и график;

Основная цель – привести в систему и обобщить имеющиеся у учащихся сведения о степени, ознакомить их с показательной функцией и ее свойствами, научить решать несложные показательные уравнения, их системы (содержащие также и иррациональные уравнения).

Рассматриваются свойства и график показательной функции. Систематизация свойств указанной функции осуществляется в соответствии с принятой схемой исследования функций. Приведен краткий обзор свойств степенной функции в зависимости от различных значений показателя р.

Особое внимание уделяется показательной функции как той математической модели, которая находит наиболее широкое применение при изучении процессов и явлений окружающей действительности. Рассматриваются примеры различных процессов (например, радиоактивный распад, изменение температуры тела); показывается, что решение дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы, является показательная функция. В связи с этим для показательной функции дается формула производной, вывод которой проводится с привлечением интуитивных представлений учащихся.

В ходе изучения свойств показательной функцией учащиеся систематически решают простейшие показательные уравнения и неравенства, а также иррациональные уравнения. По мере закрепления соответствующих умений целесообразно также предлагать им уравнения и неравенства, сводящиеся к простейшим в результате несложных тождественных преобразований.

Появление вычислительной техники в школе открыло возможности, которые связаны с интеграцией новых информационных технологий в учебный процесс по различным школьным предметам. В настоящее время применение различных видов прикладного программного обеспечения носит преимущественно эпизодический характер.

На изучение темы отводится 6 часов. Поурочное планирование следующее:

1 урок – лекция;

2 урок – практикум по решению задач.

Решение показательных уравнений и неравенств:

1 урок – решение типовых задач;

2 урок – практикум по решению задач;

3 урок – практикум по решению задач.

4 урок – закрепление изученного материала по теме «Показательная функция».

Ознакомление учащихся с показательной функцией начиная с изучения свойств степеней.

Курс алгебры знакомит учащихся с понятием степени с рациональным показателем. Таким образом для любого основания степени (где , ). Можно построить функцию: , , область определения которой – множество действительных чисел, необходимо ввести определение, степени с иррациональным показателем. Используемое свойство степени с основным, например, большим единицы (возрастании), рациональное приближение иррационального числа α: r1< α< r2. Исходя из графического изображения зависимости показателя степени и значения степени, показывается, что найдется такое значение y, которое будет наибольшим среди всех ar1 и наименьшим среди всех ar2, которое можно считать значением aα.

Затем формируется определение показательной функции: функция, заданная формулой y=ax (, ), называется показательной функцией с основанием a, и формулируемые основные свойства: D(ax)=R; E(ax)=RТ; ax возрастает при a>1 и ax убывает при 0<a<1; напоминаются основные свойства степеней. Т.о. показательная функция есть систематизация, обобщение и расширение знаний учащихся о свойствах степени.

В качестве приложения свойств показательной функции рассматриваются решения простейших показательных уравнений и неравенств.

Функция – новый математический объект для учащихся.

1. Область определения показательной функции множество действительных чисел.

2. Область значений показательной функции множество действительных чисел.

3. При а>1 функция возрастает на всей числовой прямой.

4. При 0<а<1 функция убывает на всей числовой прямой.

5. При любых действительных х и у справедливо равенство а х \*ау=аху.

6. Область значения функции у=3х+1 числовой промежуток (-4; 4).

7. Область определения показательной функции у=а х промежуток (-4; 4).

8. Функция у=0,2 х убывает на R.

9. Функция у=0,7х возрастает на R.

10. График функции у=2 х проходит через точку (0; 1).

**2.3 Методические особенности изучения степенной функции**

Степень с рациональным показателем является наиболее важным этапом изучения степенной функции , где x>0, α, и наиболее трудным для восприятия материалом в школьном курсе алгебры.

Подходы к изучению степенной функции в науке и в школьном курсе математике различны. Существуют различные способы определения степенной функции; наиболее распространенное и наиболее общее из них – аксиоматическое.

**Определение**. Степенной функцией называется любой непрерывный гамоморфизм группы R в себя, то есть любая функция f, отображающая множество в себя, обладающая свойствами:

1) для всех x, y

2) – непрерывна.

Для некоторых значений α степенная функция допускает продолжение на более широкую область определения, чем . Например, при на , кроме этого ; если же , где , то только на .

При α>0 можно доказать, что lim=0 при , поэтому, чтобы не нарушалась непрерывность функции , и в этомслучае полагают, что .

При нечетном и функция допускает естественное продолжение на всю числовую прямую; при четном n – это невозможно.

Равенство по сути задает функцию как функцию, обратную функции , поэтому функцию , например, можно считать определенной для всех , а функцию только для неотрицательных .

В общем виде на не накладывается никакие условия, поэтому функция считается определенной на множестве .

При изучении степенной функции в школьном курсе математики подходят совсем с других позиций: постепенно расширяются значения числа , причем рассматриваются не функции, например, , , а вводится понятие степени определенного вида.

Получаем следующую последовательность: степень с натуральным показателем (7 класс) – степень с нулевым и целым отрицательным показателем (7 класс) – степень с рациональным нецелым показателем (11 класс) – степень с иррациональным показателем (11 класс).

Основным мотивом введения показателей является выполнение свойств степеней.

, .

Такое расмотрение приводит к ограничениям на и . Подход достаточно естественный и мотивированный, но только до момента рассмотрения степени с рациональным показателем.

Введению степени с рациональным показателем в школьном курсе математики предшествует рассмотрение действий с корнями. Уже на этом этапе проявляются разногласия автором различных учебников и учебных пособий по математике. Большинство из них определяют корень n – ой степени из положительного числа для всех (например, «Математика в понятиях, определениях и терминах» из серии «библиотека учителя математики», учебники по математике К.О. Ананченко и др.). Авторы же учебного пособия по алгебре для 11 класса дают следующее определение.

Пусть k – целое число, n – натуральное число, не равное 1. Степенью положительного числа с рациональным показателем называется положительный корень n – ой степени из числа .

*.*

Такие разногласия вряд ли желательны, поэтому учителю приходится объяснять, что при n=1 получаем равенство.!!!!!

Некоторые задания авторов данного учебного пособия сформулированы, с нашей точки зрения, некорректно. Например, задание 1.134: Запишите корни в виде степени с рациональным показателем: , , .

Выполнить это задание можно только для первого примера, во всех остальных случаях выражения имеют смысл при всех значениях переменных (в последнем примере ), переход от корней к степеням с рациональным показателем сужает область значений, при которых выражения имеют смысл.

Невозможно выполнить и упражнение 1.138.

Вычислите 8) , так как выражение не имеет смысла.

Возникает также правомерный вопрос: почему степень с рациональным нецелым показателем определяется только для положительного числа . Возникает мысль, что можно было бы разделить рациональные не целые показатели на две группы: p – целое число, q – натуральное нечетное число и вторая группа – p – целое число, q – натуральное нечетное число, и получить различные ограничения на переменную , например, , где , но , где не понятно, почему .

Учащимся можно пояснить, что без ограничения невозможно бы провести цепочку преобразований, например, следующих: .

Такие пояснения делают для учащихся более понятным, почему при рассмотрении степени с рациональным нецелым показателем основание должно быть положительным, и при каком показателе основание может быть равным нулю. Хорошо бы также привести и графическую иллюстрацию, показать, что область определения функции – вся числовая прямая, область определения функции – множество неотрицательных чисел.

После этого целесообразно выполнить упражнение 1.137. Имеет ли смысл выражение: , , , и так далее.

Полезно использовать при доказательстве свойств степени с рациональным показателем таблицу «Степени и корни» авторов М.Г. Шраера, В.С. Дувановой «Таблицы по алгебре и началам анализа, 11 классс». Для удобства ссылок в таблице слева помещены свойства арифметических корней, что делает доказательство для учащихся более простым.

Заметим, что свойство 6 степеней с рациональным показателем (при, , при r>0; при r<0) можно в дальнейшем трактовать как возрастание степенной функции на промежутке при r>0 и ее убывание на этом же промежутке при r<0.

Таким образом, подводя итоги можно отметить, что изучение степенной функции – одна из наиболее сложных проблем в дидактике математики.

При построении методики изучения вопросов, связанных со степенной функцией целесообразно направлять учебную деятельность на освоение общих способов действий.

Необходимо выявлять происхождение вводимых понятий с точки зрения теоретического познания основ математики.

Изучение учебного материала полезно выстроить по принципу содержательного обобщения, при этом с самого начала формировать учебную деятельность как научно-теоретическую.

**3. Практическая часть**

**3.1 Урок по теме «Показательная функция»**

Тема урока: «Степень с действительным показателем. Показательная функция.»

Продолжительность: 45 минут.

Тип урока: лекция.

**Цели урока:**

1. Образовательная: ввести понятие показательной функции, рассмотреть ее свойства и построить график. Применить изученные свойства показательной функции в решении конкретных заданий и упражнений.

2. Развивающая: совершенствовать умения сравнивать, анализировать, обобщать, развивать навыки компьютерной обработки информации с помощью электронных таблиц.

3. Воспитательная: воспитывать информационную культуру и культуру общения, готовить обучающихся к жизни в современном информационном обществе.

Структура урока:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Изучение нового материала.
4. Первичное закрепление нового материала.
5. Домашнее задание.

Ход урока.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | **Организационный момент.****Учитель: (**Организует внимание учащихся, предлагает присесть). Здравствуйте, присаживайтесь. | Учащийся присаживаются за парты, в классе устанавливается рабочая атмосфера. |
| 2–3. | **Актуализация опорных знаний и изучение нового материала.****Учитель:** Нам уже известно, что такое степень с рациональным показателем. Теперь определим степень с иррациональным показателем при основании а>0. Пусть s-иррациональное число. Возьмем такие числа r и t, что . Тогда по свойству степеней получаем неравенство .**Опр**. Пусть а>0. Степенью числа a с иррациональным показателем s называется такое число b, что при любых значениях r и t, что выполняется неравенство . Это число b обозначается .Аналогично доказывается и для положительного числа а<0.**Опр**. Пусть . Степенью числа а с иррациональным показателем s называется такое число b, что при любых значениях r и t, что выполняется неравенство . Это число b обозначается .**Теорема**. Для любых значений и при любых действительных s и t привильные равенства:**Пример:** Расставить числа в порядке убывания чисел: **Решение:** Сравним числа 3, 3.5, . И получим, что 3<<3.5. Так и получится расставить с соответствующими основаниями.**Показательная функция:**Рассмотрим выражение , где - постоянная, Это выражение имеет смысл при любом действительном значении , поэтому областью определения является множество всех действительных чисел.**Опр.** Показательной называется функция вида , где - постоянная, Область определения показательной функции – это натуральное множество определения выражения , множество всех действительных чисел.На рисунке 1 показан график функции с основанием  рис. 1.На рисунке 1 показан график функции с основанием рис. 2.Теорема (о свойствах показательной функции ,).Свойства показательной функции:1. Область определения функции − вся числовая прямая.2. Область значений функции − промежуток (0;+).3. Показательная функция наименьшего и наибольшего значения не имеет.4. График показательной функции пересекается с осью ординат в точке (0; 1) и не пересекается с осью обсцисс.5. Показательная функция не имеет нулей функции.6. Показательная функция принимает положительные значениях на всей числовой прямой; все точки ее графика находятся выше оси Ох в I и II координатных углах.7. Показательная функция не является ни четной ни нечетной.8. При показательная функция возрастает на всей области определений. При показательная функция убывает на всей области определения.9. Показательная функция не является переодической.Данные свойства показательной функции примем без доказательства, график функции позволяет наглядно доказать некоторые свойства.**Пример 1**: Записать наибольшее и наименьшее значение функции (если они существуют): a); б) .Решение: а) т.к. 3 >0 и 3>1, то большему значению показателя соответствует и большее значение степени . Однако выражение при х=0 имеет наименьшее значение, а наибольшего не имеет. Значит, при любых значениях x правильное неравенство т.е. б) т.к. 0<0,7<1, то большему значению показателя sin x соответствует меньшее значение степени . Значению выражения sin x при любых значениях х . Таким образом, при любых значениях х правильное неравенство . Значит и правильное неравенство, т.е. . | Определения и все свойства учащиеся записывают в тетради,а остальной материал, излагаемый учителем, слушают и запоминают. За материалом можно следить в учебнике.**Учитель:** Объясняет, что любой график показательной функции проходит через точку (0; 1). Построение графиков функции происходит по табличному (по точечному) способу. |
| 4. | **Первичное закрепление нового материала.****2.10.** Является ли показательной функцией (устно):1. 4. 2. 5. 3. 6. **2.12 Схематически изобразите график функции:**1. 2. 3. 5. 4. 6.  | При выполнении упражнений если возникает трудность, то учитель объясняет сложности в выполнении задания. В 2.12 главное в выполнении это определение показательной функции. |
| 5. | Домашнее задание:Домашнее задание включает в себя задания из тех упражнений, которые выполнялись в классе. Также учащимся необходимо усвоить новый материал про показательную функцию. |  |

**3.2 Урок закрепления изученного материла на тему «Показательная функция»**

Урок 2. Показательная функция её свойства и график

Продолжительность: 45 минут.

Тип урока: лекция.

Цели урока:

1. Образовательная: обучить основным свойствам показательной функции и графика функции .

2. Развивающая: совершенствовать умения сравнивать, анализировать, обобщать, развивать навыки компьютерной обработки информации с помощью электронных таблиц.

3. Воспитательная: воспитывать информационную культуру и культуру общения, готовить обучающихся к жизни в современном информационном обществе.

Структура урока:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний и проверка домашнего задания.
3. Закрепление изученного материала.
4. Домашнее задание.

Ход урока:

1. **Первый этап: Организационный момент.**

Учитель организует внимание и предлагает присесть.

**2. Второй этап. Актуализация опорных знаний и проверка домашнего задания.**

Двое учащихся описывают свойства показательной функции по графикам, построенным на доске.

|  |
| --- |
| График показательной функции |
|  |  |
| **У****1****0****0****0****Х** | **1****0****0****0****Х****У** |

*Пока учащиеся работают у доски, учитель с остальными учениками отвечают на вопросы:*

1) функцию какого вида называют показательной;

2) какова область определения показательной функции;

3) каково множество значений показательной функции;

4) что можно сказать о монотонности показательной функции в зависимости от основания *а*;

5) Область определения функции:

1.у = 2. у = 3.у = 4. у = .

На заранее подготовленных листах, изображены графики функций. Указать область определения и область значений функций (можно в виде карточек раздать нескольким ученикам и добавить задания, например все свойства данных функций).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |
|  |  |  |
|  |

Проверяется работа учеников у доски и исправляются ошибки, если они есть.

1. **Третий этап: Закрепление изученного материала.**

**Задание № 1.**

Найти точку пересечения (общую точку) графиков функции и y=4, и y=0,8.



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

**Задание №2.** (2.29 учебник Кузнецовой Алгебра 11). Решите неравенство

1. ;

2. ;

3. ;

4. .

**Задание №3.** Учитель объясняет как, построить графики функций.

|  |
| --- |
|   |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Задание № 4 (2.33).** Пусть . Изобразите схематично график функции и укажите ее свойства:

1.

2.

3**.**

4.

1. **Четвертый этап: Домашнее задание.**

Учитель задает задания аналогичные, выполненным в классе.

№ 2.31, 2.32. Также еще задается ученикам повторить теорию по показательной функции и свойствам данной функции.

**Заключение**

В данной курсовой работе были рассмотрены аспекты изучения показательной функции в курсе математики в средней школе. В работе указаны основные методические особенности изучения данной темы в школе, а также указаны и разработаны план – конспекты уроков по данной теме и включены в работу. Разработаны мультимедийные перзентации уроков с применением инновационной доски либо проектора.

Данную курсовую работу можно использовать при подготовке к урокам по данной теме в школе. Некоторые методические приемы могут быть использованы также и в работе со студентами.

**Список использованных источников**

1. Дуванова B.C., Шраер М.Г. Таблицы по алгебре и началам анализа для 10 класса и методические указания к ним. – М.: Просвещение, 1991 г. – 22 п.л.м
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, тома I, II. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
3. К.О. Ананченко «Общая методика преподавания математики в школе», Мн., «Унiверсiтэцкае», 1997 г.
4. Н.М. Рогановский «Методика преподавания в средней школе», Мн., «Высшая школа», 1990 г.
5. А.А. Столяр «Логические проблемы преподавания математики», Мн., «Высшая школа», 2000 г.
6. Е.П. Кузнецова «Алгебра 11», Мн., «Народная асвета», 2007 г.
7. К.О. Ананченко Г.Н. Петровский, «Алгебра и начала анализа», Мн., «Народная асвета», 1997 г.
8. Н.Я. Виленкин «Алгебра и математический анализ для 11 класса», М., «Просвещение», 1990 г.
9. Б.М. Ивлев «Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса», М., «Просвещение», 2001 г.
10. А.Н. Колмогоров «Алгебра и начала анализа, 10–11», М., «Просвещение», 1990 г.
11. Мордкович А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10–11 класс», М., «Мнемозина», 2001г.
12. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. Сидоров Ю.В, «Алгебра и начала анализа», учебник для 10–11 классов общеобразовательных, Просвещение 2003г.