**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Федеральное агентство по образованию**

**Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ) МФ**

**Факультет «АТ»**

**Кафедра «О и БД»**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**по предмету**

**«Прикладная Математика»**

**Выполнил студент 2ЭТ гр. Мусиев Г.М.**

**Проверил преподаватель Баламирзоев А.Г.**

**Махачкала 2008 г.**

**Оглавление**

Введение

1. Решение нелинейных уравнений. Метод деления отрезка пополам. Метод касательных. Комбинированный метод хорд и касательных

2. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Методом Крамера. Методом Гаусса. Метод Жордана Гаусса. Метод Зейделя

3. Математическая обработка результатов опыта. Аппроксимация функций. Полином Лагранжа. Метод наименьших квадратов

4. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Метод Рунге – Кутта

5. Практический раздел

**Введение**

В достаточно общем случае процесс решения прикладных задач состоит из следующих этапов:

1. постановка задачи и построение математической модели (этап моделирования);

2. выбор метода и разработка алгоритма (этап алгоритмизации) ;

3. запись алгоритма на языке, понятном ЭВМ (этап программирования);

4. отладка и исполнение программы на ЭВМ (этап реализации);

5. анализ полученных результатов (этап интерпретации).

Фабула практических задач связана с реальными объектами – производственными процессами и явлениями природы, физическими закономерностями, экономическими отношениями и т.п. Решение задач обычно начинается с описания исходных данных и целей на языке строго определенных математических понятий. Точную формулировку условий и целей решения называют математической постановкой задачи. Этап исследования и описания их с помощью математических терминов называется построением математической модели или моделированием. Построение математической модели является наиболее сложным этапом решения задачи. Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений или быть выраженной в форме иных, как угодно сложных, математических структур или соотношений самой различной природы. Математические модели, в частности могут быть непрерывными или дискретными, в зависимости от того, какими величинами – непрерывными или дискретными – они описаны.

Вслед за построением математической модели идет этап поиска и разработки алгоритма решения задачи который называется алгоритмизацией.

Особые трудности на этапе поиска алгоритма заключается в поиске методе решения задачи. Дело в том, что уже для достаточно простых моделей чаще всего не удается получить результат в аналитической форме. Пусть, к примеру, задача свелась к решению уравнения с одной переменной: x - tg x = 0 . При всей тривиальности этой задачи выразить корни уравнения путем аналитических преобразований не удается, и весь арсенал методов «точной» математики оказывается здесь беспомощным. В таких случаях приходится использовать приближенные математические методы, позволяющие получать удовлетворительные результаты. Основными методами решения подобных задач являются численные методы, при использовании которых результат получается путем вычислений. По этой причине наиболее естественный путь реализации численных методов – это использование ЭВМ.

На следующем этапе алгоритм задачи записывается на языке, понятном ЭВМ. Это- этап программирования, затем следует этап реализации- исполнение программы на ЭВМ и получение результатов решения.

Завершающий этап решения задачи - это анализ, или интерпретация результатов. На этом этапе происходит осмысливание полученных результатов, сопоставление их с результатами контрольного просчета, а также с данными, полученными экспериментальным путем. При этом одни результаты могут оказаться приемлемыми, а другие – противоречащими смыслу реальной задачи, такие решения следует отбросить. Высшим критерием пригодности полученных результатов в конечном итоге является практика.

В условиях использования ЭВМ численные методы являются мощным средством решения практических задач, хотя ЭВМ наоборот усложняет оценку точности получаемых результатов, как изложено в известном принципе Питера «ЭВМ многократно увеличивает некомпетентность вычислителя».

На общую погрешность задачи влияет целый ряд факторов, начиная с построения математической модели до производства вычислений. Сюда входят: неустранимая погрешность, погрешность метода, вычислительная погрешность и в итоге, полная погрешность вытекает из суммы всех погрешностей. При решении конкретных задач те или иные виды погрешностей могу отсутствовать или незначительно влиять на конечный результат, тем не менее, в каждом случае необходим полный анализ погрешностей всех видов. Это в полной мере относится и к неустранимой погрешности – погрешности математической модели.

К числу причин следует отнести также промахи, допускаемые в результате решения задачи: использование не тех данных, неверной программы вычислений и т.д. Поэтому необходима грубая прикидка ожидаемого результата, а это невозможно без ознакомления с понятиями приближенных методов вычислений, поэтом рассмотрим некоторые методы приближенных вычислений, применяемые в прикладной математике.

**1. Решение нелинейных уравнений. Метод деления отрезка пополам. Метод касательных. Комбинированный метод хорд и касательных**

Задача о нахождения приближенных значений действительных корней уравнения f(x)=0 предусматривает предварительное отделение корня, т.е. установление промежутка, в котором других корней данного уравнения нет. Будем предполагать, что функция f(x) в промежутке [a, b] непрерывна вместе со своим производным f’(x) и f’’(x), значения f(a) и f(b) функции на концах промежутка имеют разные знаки, т. е. f(a)\*f(b)<0, и обе производные f’(x) и f’’(x) сохраняют знак во всем промежутке [a, b].

Так как действительным корнями уравнения f(x)=0 являются абсциссы точек пересечения кривой у = f(x) с осью Ox, то отделение корня можно произвести графически. Вместо уравнения у = f(x) можно взять уравнения у = rf (x), где r – постоянная величина, отличная от нуля, так как уравнения f(x) =0 и rf (x) =0 равносильны.

Постоянную величину r можно взять так, чтобы ординаты точек графика не были чрезмерно большими или, наоборот, чтобы график не был слишком близок к оси Ox. Иногда бывает полезно уравнение f (x)=0 записать в виде (x) =(x). Действительными корнями исходного уравнения служат абсциссы точек пересечения графиков функций y =(x) и у =(x)



**1.Метод деления отрезка пополам.** Интервал изоляции действительно корня всегда можно уменьшить путем деления его, например, пополам, определяя, на границах какой из частей первоначального интервала функция f (x) меняет знак. Затем полученный интервал снова делят на две части и т.д. Такой процесс проводится до тех пор, пока не перестанут изменяться сохраняемые в ответ десятичные знаки.

**2.Метод** **касательных.** Пусть действительный корень уравнения f (x)=0 изолирован на отрезке [a, b]. Будем предполагать, что все ограничения, сформулированные выше относительно f(x), сохраняют силу и в этом случае. Возьмем на отрезке [a,b] такое число xo, при котором f(xo) имеет тот же знак, что и fn (xo), т.е. f(xo) o) >0 (в частности, за xo может быть принят то из концов отрезка [a,b], в котором соблюдено это условие). Проведем в точке Mo[ xo; f (xo)] касательную к кривой y=f (x).За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox. Это приближенное значение корня находится по формуле



**х1 = х0 - f(хо)/ fI (хо**)

Применив этот прием вторично в точке M1[ x1; f (x1)], найдем

**X2=X1 – f (x1)/(x1)**

и т. д. Полученная таким образом последовательность xo, x1,x2 … имеет своим пределом искомый корень.

Для оценки погрешности приближенного значения корня, найденного методом Ньютона, может быть использовано неравенство

**| х - ξ | <** [**f(ξ)** ]**2/2 ×** max **| fII(х)/** [**fI(х)** ]**3|**

[a., b]

**3. Комбинированный метод хорд и касательных.** Пусть требуется найти действительный корень уравнения f (x)= 0, изолированный на отрезке [a,b]. Предполагается, что f (a) и f (b) имеют равные знаки, а каждая из производных сохраняет определенный знак на отрезке изоляции. Возьмем на отрезке [a,b] такую точку xo, что f (xo) и f” (xo) (при x, принадлежащем промежутку изоляции) имеют одинаковые знаки.

Воспользуемся формулами методов хорд и касательных:

**X11=Xo- f (xo) / f1(xo); X12 = a – (b – a ) f (a) / f (b) – f (a).**

Величины X11 и X12 принадлежат промежутку изоляции, причем f (X11) и f (X12) имеют разные знаки.

**X21=X11- f (x11) / f1(x11); X22=X11-(X12-X11) f (X11) / f (X12) – f (X11).**

Точки X21 и X22 на числовой оси расположены между точками X11 и X12, причем f (X21) и f (X22) имеют разные знаки.

Вычислим теперь значения

**X31=X21- f (x21) / f1(x21); X32=X21-(X22-X21) f (X21) / f (X22) – f (X21).**

Каждая из последовательностей X11, X21, X31,... Xn1, …; X12, X22, X32, …, Xn2, …стремится к искомому корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая – монотонно убывает. Пусть, например, Xn1 < X< Xn2, тогда 0 < X- Xn-1 < Xn2- Xn2 – Xn1. Задав заранее достаточно малое мы можем, увеличивая n, добиться выполнения неравенства Xn2 – Xn1 < ; следовательно, при этом же значении n будет выполняться неравенство



X – Xn1 < . Таким образом, Xn1 является приближенным значением корня X, вычисленным с погрешностью, не превышающей .



Так, например, для нахождения приближенного значения X с точностью до 0,001 нужно определить n таким образом, чтобы значения Xn1 и Xn2, вычисленные с точностью до 0,001, совпадали.

## 

**2. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Методом Крамера. Методом Гаусса. Метод Жордана Гаусса. Метод Зейделя**

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из основных задач вычислительной линейной алгебры. Хотя задача решения системы линейных уравнений сравнительно редко представляет самостоятельный интерес для приложений, от умения эффективно решать такие системы часто зависит сама возможность математического моделирования самых разнообразных процессов с применением ЭВМ. Значительная часть численных методов решения различных (в особенности – нелинейных) задач включает в себя решение систем линейных уравнений как элементарный шаг соответствующего алгоритма. Одна из трудностей практического решения систем большой размерности связанна с ограниченностью оперативной памяти ЭВМ. Хотя объем оперативной памяти вновь создаваемых вычислительных машин растет очень быстро, тем не менее, еще быстрее возрастают потребности практики в решении задач все большей размерности. В значительной степени ограничения на размерность решаемых систем можно снять, если использовать для хранения матрицы внешние запоминающие устройства. Однако в этом случае многократно возрастают как затраты машинного времени, так и сложность соответствующих алгоритмов. Поэтому при создании вычислительных алгоритмов линейной алгебры большое внимание уделяют способам компактного размещения элементов матриц в памяти ЭВМ.

К счастью, приложения очень часто приводят к матрицам, в которых число ненулевых элементов много меньше общего числа элементов матрицы. Такие матрицы принято называть разреженными. Одним из основных источников разреженных матриц являются математические модели технических устройств, состоящих из большого числа элементов, связи между которыми локальны. Простейшие примеры таких устройств – сложные строительные конструкции и большие электрические цепи.

Известны примеры решенных в последние годы задач, где число неизвестных достигало сотен тысяч. Естественно, это было бы невозможно, если бы соответствующие матрицы не являлись разреженными (матрица системы из 100 тыс. уравнений в формате двойной точности заняла бы около 75 Гбайт).

**Методом Крамера.** Известно, что используя матрицы мы можем решать различные системы уравнений, причем эти системы могут быть какой угодно величины и иметь сколько угодно переменных. С помощью нескольких выводов и формул решение огромных систем уравнений становится довольно быстрым и более легким.

В частности, я опишу методы Крамера и Гаусса. Наилегчайшим способом является метод Крамера (для меня ), или как его еще называют – формула Крамера. Итак, допустим, что мы имеем какую-либо систему уравнений

,



в виде матрицы эту систему можно записать таким образом:

A = ,



где ответы будут уравнений будут находится в последнем столбце. Теперь мы введем понятие основного определителя; в данном случае он будет выглядеть таким образом:

= .



Основным определителем как вы уже заметили является матрица составленная из коэффициентов стоящих при переменных. Они также идут в порядке столбцов, т. е. в первом столбце стоят коэффициенты, которые находятся при **x**, во втором столбце при **y**, и так далее. Это очень важно, ибо в следующих действиях мы будем заменять каждый столбец коэффициентов при переменной на столбец ответов уравнений. Итак, как я уже говорил, мы заменяем столбец при первой переменной на столбец ответов, затем при второй, конечно это все зависит от того, сколько переменных нам нужно найти.

1 = , 2 = , 3 = .



Затем нужно найти определители 1 , 2 , 3 . Как находится определитель третьего порядка вы уже знаете. А вот здесь мы и применяем правило Крамера. Оно выглядит так:



**x1 = , x2 = , x3 =**



**–** для данного случая, а в общем виде оно выглядит следующим образом: **xi =** . Определитель составленный из коэффициентов при неизвестных, называется **определителем системы**.



# 2. Метод Гаусса. Одним из самых распространенных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса. Этот метод (который также называют методом последовательного исключения неизвестных) известен в различных вариантах уже более 2000 лет.

Вычисления с помощью метода Гаусса заключаются в последовательном исключении неизвестных из системы для преобразования ее к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей. Вычисления значений неизвестных производят на этапе обратного хода.

**Схема единственного деления.** Рассмотрим сначала простейший вариант метода Гаусса, называемый схемой единственного деления.

Прямой ход состоит из n − 1 шагов исключения.

1-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x1 из уравнений с номерами i = 2, 3, …, n. Предположим, что коэффициент a11 ≠ 0. Будем называть его главным элементом 1-го шага.

Найдем величины

qi1 = ai1/a11 (i = 2, 3, …, n),

называемые множителями 1-го шага. Вычтем последовательно из второго, третьего, …, n-го уравнений системы первое уравнение, умноженное соответственно на q21, q31, …, qn1. Это позволит обратить в ноль коэффициенты при x1 во всех уравнениях, кроме первого. В результате получим эквивалентную систему

a11x1 + a12x2 + a13x3 + … + a1nxn = b1 ,

a22(1)x2 + a23(1)x3 + … + a2n(1)xn = b2(1) ,

a32(1)x2 + a33(1)x3 + … + a3n(1)xn = b3(1) ,

an2(1)x2 + an3(1)x3 + … + ann(1)xn = bn(1).

в которой aij(1) и bij(1) вычисляются по формулам

aij(1) = aij − qi1a1j , bi(1) = bi − qi1b1.

2-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x2 из уравнений с номерами i = 3, 4, …, n. Пусть a22(1) ≠ 0, где a22(1) – коэффициент, называемый главным (или ведущим) элементом 2-го шага. Вычислим множители 2-го шага

qi2 = ai2(1) / a22(1) (i = 3, 4, …, n)

и вычтем последовательно из третьего, четвертого, …, n-го уравнения системы второе уравнение, умноженное соответственно на q32, q42, …, qm2. В результате получим систему

a11x1 + a12x2 + a13x3 +… + a1nxn = b1,

a22(1)x2 + a23(1)x3 +… + a2n(1) = b2(1),

a33(2)x3 +… + a3n(2)xn = b3(2),

an3(2)x3 +… + ann(2)xn = bn(2).

Здесь коэффициенты aij(2) и bij(2) вычисляются по формулам

aij(2) = aij(1) – qi2a2j(1) , bi(2) = bi(1) – qi2b2(1).

Аналогично проводятся остальные шаги. Опишем очередной k-й шаг.

k-й шаг. В предположении, что главный (ведущий) элемент k-го шага akk(k–1) отличен от нуля, вычислим множители k-го шага

qik = aik(k–1) / akk(k–1) (i = k + 1, …, n)

и вычтем последовательно из (k + 1)-го, …, n-го уравнений полученной на предыдущем шаге системы k-e уравнение, умноженное соответственно на

qk+1,k, qk+2,k, …, qnk.

После (n - 1)-го шага исключения получим систему уравнений

a11x1 +a12x2 +a13x3 +… +a1nxn =b1,

a22(1)x2 +a23(1)x3 +… +a2n(1)xn =b2(1),

a33(2)x3 +… +a3n(2)xn =b3(2),

ann(n–1)xn =bn(n–1).

матрица **A**(n-1) которой является верхней треугольной. На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим xn. Подставляя найденное значение xn в предпоследнее уравнение, получим xn–1. Осуществляя обратную подстановку, далее последовательно находим xn–1, xn–2, …, x1. Вычисления неизвестных здесь проводятся по формулам

xn = bn(n–1) / ann(n–1),

xk = (bn(k–1) – ak,k+1(k–1)xk+1 – – akn(k–1)xn) / akk(k–1), (k = n – 1, 1).

Необходимость выбора главных элементов. Заметим, что вычисление множителей, а также обратная подстановка требуют деления на главные элементы akk(k–1). Поэтому если один из главных элементов оказывыется равным нулю, то схема единственного деления не может быть реализована. Здравый смысл подсказывает, что и в ситуации, когда все главные элементы отличны от нуля, но среди них есть близкие к нулю, возможен неконтролируемый рост погрешности.

**Метод Гаусса** с выбором главного элемента по столбцу (схема частичного выбора). Описание метода. На k-м шаге прямого хода коэффициенты уравнений системы с номерами i = k + 1, …, n преобразуются по формулам

aij(k) = aij(k–1) − qikakj , bi(k) = bi(k–1) − qikbk(k–1) , i = k + 1, …, n.

Интуитивно ясно, что во избежание сильного роста коэффициентов системы и связанных с этим ошибок нельзя допускать появления больших множителей qik.

В методе Гаусса с выбором главного элементоа по столбцу гарантируется, что |qik| ≤ 1 для всех k = 1, 2, …, n – 1 и i = k + 1, …, n. Отличие этого варианта метода Гаусса от схемы единственного деления заключается в том, что на k-м шаге исключения в качестве главного элемента выбирают максимальный по модулю коэффициент aikk при неизвестной xk в уравнениях с номерами i = k + 1, …, n. Затем соответствующее выбранному коэффициенту уравнение с номером ik меняют местами с k-м уравнением системы для того, чтобы главный элемент занял место коэффициента akk(k-1). После этой перестановки исключение неизвестного xk производят, как в схеме единственного деления.

**Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора).** В этой схеме допускается нарушение естественного порядка исключения неизвестных.

На 1-м шаге метода среди элементов aij определяют максимальный по модулю элемент ai1j1. Первое уравнение системы и уравнение с номером i1 меняют местами. Далее стандартным образом производят исключение неизвестного xi1 из всех уравнений, кроме первого.

На k-м шаге метода среди коэффициентов aij(k–1) при неизвестных в уравнениях системы с номерами i = k, …, n выбирают максимальный по модулю коэффициент aikjk(k-1). Затем k-е уравнение и уравнение, содержащее найденный коэффициент, меняют местами и исключают неизвестное xjk из уравнений с номерами i = k + 1, …, n.

На этапе обратного хода неизвестные вычисляют в следующем порядке: xjn, xjn–1, …, xj1.

# 3. Метод Зейделя 3.2.1. Приведение системы к виду, удобному для итераций. Для того чтобы применить метод Зейделя к решению системы линейных алгебраических уравнений

**Ax** = **b**

с квадратной невырожденной матрицей **A**, необходимо предварительно преобразовать эту систему к виду

**x** = **Bx** + **c**.

Здесь **B** – квадратная матрица с элементами bij (i, j = 1, 2, …, n), **c** – вектор-столбец с элементами cij (i = 1, 2, …, n).

В развернутой форме записи система имеет следующий вид:

x1 = b11x1 + b12x2 + b13x3 + … + b1nxn + c1

x2 = b21x1 + b22x2 + b23x3 + … + b2nxn + c2

xn = bn1x1 + bn2x2 + bn3x3 + … + bnnxn + cn

Вообще говоря, операция приведения системы к виду, удобному для итераций, не является простой и требует специальных знаний, а также существенного использования специфики системы.

Самый простой способ приведения системы к виду, удобному для итераций, состоит в следующем. Из первого уравнения системы выразим неизвестное x1:

x1 = a11–1 (b1 – a12x2 – a13x3 – … – a1nxn),

из второго уравнения – неизвестное x2:

x2 = a21–1 (b2 – a22x2 – a23x3 – … – a2nxn),

и т. д. В результате получим систему

x1 = b12x2 +b13x3 +… +b1,n–1xn–1 +b1nxn+c1 ,

x2 = b21x1 +b23x3 +… +b2,n–1xn–1 +b2nxn+c2 ,

x3 = b31x1 +b32x2 +… +b3,n–1xn–1 +b3nxn+c3 ,

xn = bn1x1 +bn2x2 +bn3x3 +… +bn,n–1xn–1 +cn ,

в которой на главной диагонали матрицы **B** находятся нулевые элементы. Остальные элементы выражаются по формулам

bij = –aij / aii, ci = bi / aii (i, j = 1, 2, …, n, j ≠ i)

Конечно, для возможности выполнения указанного преобразования необходимо, чтобы диагональные элементы матрицы **A** были ненулевыми.

**Описание метода.** Введем нижнюю и верхнюю треугольные матрицы

000…00b12b13…b1n

**B**1 =b2100…0**B**2 =00b23…b2n

b31b320…0, 000…b3n

bn1bn2bn3…0000…0

Заметим, что **B** = **B**1+ **B**2 и поэтому решение **x** исходной системы удовлетворяет равенству

**x** = **B**1**x + B**2 **x + c.**

Выберем начальное приближение **x**(0) = [x1(0), x2(0), …, xn(0)]T. Подставляя его в правую часть равенства при верхней треугольной матрице **B**2и вычисляя полученное выражение, находим первое приближение

**x**(1) = **B**1**x**(0) + **B**2**x**(1)

Подставляя приближение **x**(1), получим

**x**(2) = **B**1**x**(1) + **B**2**x**(2)

Продолжая этот процесс далее, получим последовательность **x**(0), **x**(1), …, **x**(n), … приближений к вычисляемых по формуле

**x**(k+1) = **B**1(k+1) + **B**2(k) + **c**

или в развернутой форме записи

x1(k+1) =b12x2(k) +b13x2(k) +… +b1nxn(k) +c1 ,

x2(k+1) =b21x1(k+1) +b23x3(k) + … +b2nxn(k) +c2 ,

x3(k+1) =b31x1(k+1) +b32x2(k+1) +… +b3nxn(k) +c3 ,

xn(k+1) =bn1x1(k+1) +bn2x2(k+1) +bn3x3(k+1) +… +cn.

Объединив приведение системы к виду, удобному для итераций и метод Зейделя в одну формулу, получим

xi(k+1) = xi(k) – aii–1(∑j=1i–1 aijxj(k+1) + ∑j=1n aijxi(k) – bi).

Тогда достаточным условием сходимости метода Зейделя будет

∑j=1, j≠i n | aij | < | aii |

(условие доминирования диагонали).

Метод Зейделя иногда называют также методом Гаусса-Зейделя, процессом Либмана, методом последовательных замещений.

**4. Метод Жордана - Гаусса.**

Схема с выбором главного элемента состоит в том, что требование неравенства нулю диагональных элементов akk, на которые происходит деление в процессе исключения, заменятся более жестким: из всех элементов К-го столба выбрать наибольший по модулю и переставить уравнения так, чтобы этот элемент оказался на месте элемента акк. Выбор главного элемента и связанная с ним перестановка строк необходимы в тех случаях, когда на каком-либо i-ом шаге акк=0 либо же акк очень мало по остальными элементами i- го столбца: при делении на такое «малое» акк будут получаться большие числа с большими абсолютными погрешностями, в результате чего решение может сильно исказиться.

Ниже излагается алгоритм полного исключения неизвестных или метод Жордана – Гаусса. Суть метода состоит в том, что, рассмотрев первое уравнение, в нем неизвестное с коеффициэнтом, отличным от нуля (в дальнейшем разрешающий элемент ), и разделив первое уравнение на этот коэффициент, с помощью первого уравнения исключают это неизвестное из всех уравнений, кроме первого. Выбрав во втором уравнении неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, и разделив на него второе уравнение, с помощью второго исключают другие неизвестные из всех уравнений, кроме второго и т.д., т.е. с помощью одного уравнения производят полное исключение одного неизвестного. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут использованы все уравнения.

Как известно, системы линейных алгебраических уравнений могут имеет одно решение, множество решений или системы несовместны. При элементарных преобразованиях элементов матрицы системы эти случаи выявляются в следующем:

1. В процессе исключений левая часть I –го уравнения системы обращается в нуль, а правая часть равна некоторому числу, отличному от нуля. т.е. 02+=bc0.



Это означает, что система не имеет решений, так как I – му уравнению не могут удовлетворять никакие значения неизвестных;

2. Левая и правая части I – го уравнения обращаются в нуль. Это означает, что I – ое уравнение является линейной комбинацией остальных, ему удовлетворяет любое найденное решение системы, поэтому оно может быть отброшено. В системе количество неизвестных больше количества уравнений и, следовательно, такая система имеет множество решений;

3. После того как все уравнения использованы для исключения неизвестных получено решение системы.

Таким образом, конечной целью преобразований Жордана-Гаусса является получение из заданной линейной системы

|  |
| --- |
| a11x1 + a12x2 + … + a1nxn = b1,n+1 |
| a21x1 + a22x2 + … + a2nxn = b2,n+1 |
| am1x1 + am2x2 + … + amnxn = bm.n+1 |

Здесь x1, x2, …, xn — неизвестные, которые надо определить. a11, a12, …, amn — коэффициенты системы — и b1, b2, … bm — свободные члены — предполагаются известными. Индексы коэффициентов (aij) системы обозначают номера уравнения (i) и неизвестного (j), при котором стоит этот коэффициент, соответственно.

Система (1) называется однородной, если все её свободные члены равны нулю (b1 = b2 = … = bm = 0), иначе — неоднородной.

Система (1) называется квадратной, если число **m** уравнений равно числу **n** неизвестных.

Решение системы (1) — совокупность **n** чисел c1, c2, …, cn, таких что подстановка каждого ci вместо xi в систему (1) обращает все ее уравнения в тождества.

Система (1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее нет ни одного решения.

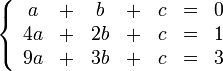
Совместная система вида (1) может иметь одно или более решений.

Решения c1(1), c2(1), …, cn(1) и c1(2), c2(2), …, cn(2) совместной системы вида (1) называются различными, если нарушается хотя бы одно из равенств:

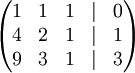
c1(1) = c1(2), c2(1) = c2(2), …, cn(1) = cn(2).

Совместная система вида (1) называется определенной, если она имеет единственное решение; если же у нее есть хотя бы два различных решения, то она называется неопределенной. Если уравнений больше, чем неизвестных, она называется переопределённой.

Решим следующую систему уравнений:



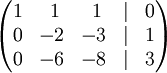
Запишем её в виде матрицы 3×4, где последний столбец является свободным членом:



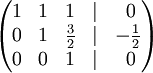
Проведём следующие действия:

* К строке 2 добавим: -4 \* Строку 1.
* К строке 3 добавим: -9 \* Строку 1.

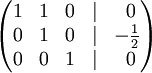
Получим:



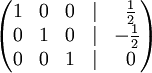
* К строке 3 добавим: -3 \* Строку 2.
* Строку 2 делим на -2



* К строке 1 добавим: -1 \* Строку 3.
* К строке 2 добавим: -3/2 \* Строку 3.



* К строке 1 добавим: -1 \* Строку 2.



В правом столбце получаем решение:

.



**3. Математическая обработка результатов опыта. Аппроксимация функций. Полином Лагранжа. Метод наименьших квадратов**

В вычислительной математике нередки случаи, когда одну функцию приходится заменять другой, более простой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют аппроксимацией функций.



Поводом для аппроксимации функции может послужить, в частности, табличный способ её задания. Предположим, что в результате некоторого эксперимента для конечного набора значений xi величины x из отрезка [a,b].

a=x0 < x1 <…xi… < xn= b

получен набор значений yi величины y (табл. 4.1). Если допустить, что между x и y существует функциональная зависимость y = F(x), можно поставить вопрос о поиске аналитического представления функции F (очевидно, что в такой общей постановке эта задача решается неоднозначно). Точки x0, x1,… xn в этом случае называются узлами. Если расстояние h=xi+1- x1 является постоянным (т.е. независящим от i ), то сетка значений, представленная табл. 4.1, называется равномерной.

Таблица 4.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x0 | x1 | x2 | … | x1 | … | xn |
| F(x) | Y0 | Y1 | Y2 | … | Y1 | … | yn |

Повод для аппроксимации может возникнуть даже тогда, когда аналитическое выражение для некоторой функции y = F(x) имеется. однако оно оказывается мало пригодным для решения поставленной задачи, потому что операция, которую требуется осуществить над этой функцией, трудновыполнима. Элементарный пример - вычисление значения трансцендентной функции «вручную». Действительно, чтобы вычислить , например, In 3,2756, проще всего воспользоваться степенным разложением функции, т.е. заменить трансцендентную функцию степенной. При этом получится, разумеется, приближенное значение функции, но если мы умеем контролировать погрешность, то можно считать, что мы получили интересующий нас результат – хотя бы потому, что в реальности все равно приходится ограничиваться приближенным представлением значений логарифмической функции.

Другая ситуация, когда может потребоваться аппроксимация аналитически заданной функции, - вычисление определённых интегралов. Задача эта, как правило, весьма сложная, часто элементарными приемами невыполнимая. Как вычислить интеграл Он, несомненно, существует, но по Формуле Ньютона – Лейбница вычислен быть практически не может, так как первообразная не выражается в элементарных функциях (как и множество других первообразных от элементарных функций). Аппроксимация подынтегральной функции - один из возможных приемов (и важно отметить, что цель аппроксимации налагает отпечаток на ее способ).



Классический подход к численному решению подобных задач заключается в том, чтобы, опираясь на информацию о функции F, по некоторому алгоритму подобрать аппроксимирующую функцию G, в определенном смысле «близкую» к F.

Чаще всего задача аппроксимации решается с помощью многочленов. Вычисления значений многочлена легко автоматизировать, производная и интеграл от многочлена, в свою очередь, также являются многочленами. Наряду с многочленами для аппроксимации используют ряды Фурье, экспоненциальные и другие элементарные функции.

Для оценки «близости» функций выбирают тот или иной критерий согласия. Эти критерии основаны на использовании той или иной метрики, т.е. способа введения расстояния между функциями, принадлежащими тому или иному классу:

(см. гл. 2).



Например, для функций, ограниченных на отрезке [a,b] расстояние может быть введено следующим образом:

(F(x),G(x))= ;



для функций, непрерывных на отрезке [a,b], по формуле



2dx



(а также многими другими способами).

Для функций, заданных таблично, достаточно распространенным критерием согласия является критерий Чебышева, который определяет расстояние между аппроксимируемой и аппроксимирующей функциями как максимум величины отклонения между функциями в узлах сетки (см. табл. 4.1):



(4.1)



Если =0, т.е. F(xi)=G(xi)=yi, то соответствующий способ аппроксимации называют интерполяцией, а процедуру вычисления значений F(x) с помощью G(x) в точках, не являющихся узлами сетки, - интерполированием.



С геометрической точки зрения график функции G(x) при интерполировании должен проходить через все точки A0(x0,y0), A1(x1,y1),…, An(xn,yn). Подчеркнем, что для значений x, не являющихся узловыми, значения функции G(x) ничем не регламентированы, и в принципе могут значительно отличаться от значений функций F(x)).

Часто процедура аппроксимации связана с другим критерием согласия:

(4.2)



Применяемый на его основе способ аппроксимации получил название метода наименьших квадратов.

Выбор критерия согласия позволяет строить методы, позволяющие однозначно определять параметры аппроксимирующей функции (если задан ее вид).



**Полином Лагранжа.**

Пусть Функция F(x) задана табл. 4.1. Построим многочлен Ln (x), степень которого не выше, чем n, и для которого выполнены условия интерполяции

Ln(x0)=y0, Ln(x1)=y1,…, Ln(xn)=yn. (4.6)

Будем искать Ln (x) в виде

Ln (x),=l0(x)+l1(x)+…+ln(x), (4.7)

где l1(x) – многочлен степени n, причем

l1(xл)= (4.8)



Очевидно, что требование (4.8) с учетом (4.7) вполне обеспечивает выполнение условий (4.6).

Многочлены l1(x)составим следующим образом:

l1(x)=Сi(x - x0)(x - x1)(xi - xi-1)(xi – xi=1) (xi – xn) (4.9)



где Ci – коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (4.8):

Сi =



(заметим, что ни один множитель в знаменателе не равен нулю). Подставим Ci в (4.9) и далее с учетом (4.7) окончательно имеем:

Ln (x)= (4.10)



Это и есть интерполяционный многочлен Лагранжа. По таблице исходной функции F формула (4.10) позволяет довольно просто составить «внешний вид» многочлена.

**Метод наименьших квадратов.**

1) На практике часто приходится решать такую задачу. пусть для двух функционально связанных величин x и y известны n пар соответствующих значений (x1,y1),(x2,y2),…,(xn,yn). Требуется в наперед заданной формуле y=f(x, a1, a2,…,am) определить m параметров a1, a2, …,am (m<n) так, чтобы в эту x и y.

Считается (исходя из принципов теории вероятностей), что наилучшими являются те значения a1, a2, …,am, которые обращают в минимум сумму



(т.е. сумму квадратов отклонений значений y, вычисленных по формуле, от заданных), поэтому сам способ и получил название способа наименьших квадратов.

Это условие дает систему m уравнений, из которых определяются a1,a2,…,am:

(1)



(f=1,2,…, m).

На практике заданную формулу y=f (xk,a1, a2, …, am) иногда приходится (в ущерб строгости полученного решения) преобразовывать к такому виду, чтобы систему (1) было проще решать (см. ниже подбор параметров в формулах y=Aecx и y=Axq). Частные случаи: а) y=a0xm-1+…+ am(m+1 параметров a0, a1, …, am;; n>m+1).

Система (1) принимает следующий вид:

(2)



Эта система m+1 уравнений с m+1 неизвестными всегда имеет единственное решение, так как ее определитель отличен от нуля.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Для определения коэффициентов системы (2) удобно составить вспомогательную таблицу

В последней строке записывают сумму элементов каждого столбца, которые и являются коэффициентами системы (2).

Систему (2) обычно решают методом Гаусса.

б) y=Aecx.

Для упрощения системы (1) эту формулу, связывающую х и у, предварительно логарифмируют и заменяют формулой

1g y=1g .



Система (1) примет в этом случае следующий вид:

(3)



Вспомогательная таблица имеет вид

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| . |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Из систему (3) определяют с и 1g A.

в) y=Axq.

Эту формулу также предварительно логарифмируют и заменяют следующей:



Система (1) теперь примет вид

(4)



Соответствующим образом изменяется и вспомогательная таблица.

2) Часто бывает необходимо заменить наилучшим образом некоторую заданную функцию у =f(x) на отрезке [a, b] многочленом m-й степени: Применение способа наименьших квадратов в этом случае приводит к отысканию коэффициентов а0, а1, …, аm из условия минимума интеграла



Необходимые условия минимума этого интеграла приводят к системе m+1 уравнений с m+1 неизвестными a0, a1, a2,..., am, из которых определяют все эти коэффициенты:

(5)



**4. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Метод Рунге – Кутта**

**1. Метод Эйлера.** Дифференциальное уравнение y’=f(x, y) определяет на плоскости так называемое поле направлений, т.е. в каждой точке плоскости, в которой существует функция f(x, y) задает направление интегральной кривой уравнения, проходящей через эту точку. Пусть требуется решить задачу Коши, т.е. найти решение уравнения y’=f(x, y), удовлетворяющее начальному условию y(x0)=y0. Разделим отрезок [x0, X] на n равных частей и положим (X-x0)/n=h (h – шаг изменения аргумента).Допустим, что внутри элементарного промежутка от x0 до x0+h функция y’ сохраняет постоянное значения f(x0,y0,). Тогда где y1 – значения искомой функции, соответствующее значению х1=x0+h. Отсюда получаем Повторяя эту операцию, получим последовательные значения функции:



Таким образом, можно приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами Mr (xr; yr), где Этот метод называется методом ломаных Эйлера, или просто методом Эйлера.



**2. Метод Рунге – Кутта**. Пусть функция у определяется дифференциальным уравнением y’=f(x, y) при начальном условии y(x0)=y0. При численном интегрировании такого уравнения методом Рунге – Кутта определяют четыре числа:



Если положить то можно доказать что Схема вычислений имеет вид



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Добавка |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**5. Практический раздел**

**1.Решение не линейных уравнений.**

1. Отделить корни графический и уточнить один из них методом касательных с точностью



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Singf(x) | - | - | - | - | - | - | - | + |



т.к. то



x1=6,488

x2=6,401

x3=6,39756

x4=6,397567

**2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.**

1. Решить систему методом Жордана – Гаусса

