**Содержание**

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1.1 Общие понятие теории массового обслуживания

1.2 Моделирование систем массового обслуживания

1.3 Графы состояний СМО

1.4 Случайные процессы

Глава II. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

* 1. Уравнения Колмогорова
  2. Процессы «рождения – гибели»
  3. Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания

Глава III. МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

* 1. Одноканальная СМО с отказами в обслуживании

3.2 Многоканальная СМО с отказами в обслуживании

3.3 Модель многофазной системы обслуживания туристов

3.4 Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

3.5 Одноканальная СМО с неограниченной очередью

3.6 Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

3.7 Многоканальная СМО с неограниченной очередью

3.8 Анализ системы массового обслуживания супермаркета

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Введение**

В настоящее время появилось большое количество литературы, посвященной непосредственно теории массового обслуживания, развитию ее математических аспектов, а также различных сфер ее приложения - военной, медицинской, транспортной, торговле, авиации и др.

Теория массового обслуживания опирается на теорию вероятностей и математическую статистику. Первоначальное развитие теории массового обслуживания связано с именем датского ученого А.К. Эрланга(1878-1929),с его трудами в области проектирования и эксплуатации телефонных станций.

Теория массового обслуживания — область прикладной математики, занимающаяся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых однородные события повторяются многократно, например, на предприятиях бытового обслуживания; в системах приема, переработки и передачи информации; автоматических линиях производства и др. Большой вклад в развитие этой теории внесли российские математики А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, Е.С. Вентцель и др.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами. Задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге включают экономический аспект по определению такого, варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и от простоев каналов обслуживания.

В коммерческой деятельности применение теории массового обслуживания пока не нашло желаемого распространения.

В основном это связано с трудностью постановки задач, необходимостью глубокого понимания содержания коммерческой деятельности, а также надежного и точного инструментария, позволяющего просчитывать в коммерческой деятельности различные варианты последствий управленческих решений.

**Глава I.** **Постановка задач массового обслуживание**

* 1. **Общие понятие теории массового обслуживания**

Природа массового обслуживания, в различных сферах, весьма тонка и сложна. Коммерческая деятельность связана с выполнением множества операций на этапах движения, например товарной массы из сферы производства в сферу потребления. Такими операциями являются погрузка товаров, перевозка, разгрузка, хранение, обработка, фасовка, реализация. Кроме таких основных операций процесс движения товаров сопровождается большим количеством предварительных, подготовительных, сопутствующих, параллельных и последующих операций с платежными документами, тарой, деньгами, автомашинами, клиентами и т.п.

Для перечисленных фрагментов коммерческой деятельности характерны массовость поступления товаров, денег, посетителей в случайные моменты времени, затем их последовательное обслуживание (удовлетворение требований, запросов, заявок) путем выполнения соответствующих операций, время выполнения которых носит также случайный характер. Все это создает неравномерность в работе, порождает недогрузки, простой и перегрузки в коммерческих операциях. Много неприятностей доставляют очереди, например, посетителей в кафе, столовых, ресторанах, или водителей автомобилей на товарных базах, ожидающих разгрузки, погрузки или оформления документов. В связи с этим возникают задачи анализа существующих вариантов выполнения всей совокупности операций, например, торгового зала супермаркета, ресторана или в цехах производства собственной продукции для целей оценки их работы, выявления слабых звеньев и резервов для разработки в конечном итоге рекомендаций, направленных на увеличение эффективности коммерческой деятельности.

Кроме того, возникают другие задачи, связанные с созданием, организацией и планированием нового экономичного, рационального варианта выполнения множества операций в пределах торгового зала, кондитерского цеха, всех звеньев обслуживания ресторана, кафе, столовой, планового отдела, бухгалтерии, отдела кадров и др.

Задачи организации массового обслуживания возникают практически во всех сферах человеческой деятельности, например обслуживание продавцами покупателей в магазинах, обслуживание посетителей на предприятиях общественного питания, обслуживание клиентов на предприятиях бытового обслуживания, обеспечение телефонных разговоров на телефонной станции, оказание медицинской помощи больным в поликлинике и т.д. Во всех приведенных примерах возникает необходимость в удовлетворении запросов большого числа потребителей.

Перечисленные задачи можно успешно решать с помощью методов и моделей специально созданной для этих целей теории массового обслуживания (ТМО). В этой теории поясняется, что обслуживать необходимо кого-либо или что-либо, что определяется понятием «заявка (требование) на обслуживание», а операции обслуживания выполняются кем-либо или чем-либо, называемыми каналами (узлами) обслуживания. Роль заявок в коммерческой деятельности выполняют товары, посетители, деньги, ревизоры, документы, а роль каналов обслуживания — продавцы, администраторы, повара, кондитеры, официанты, кассиры, товароведы, грузчики, торговое оборудование и др. Важно заметить, что в одном варианте, например, повар в процессе приготовления блюд является каналом обслуживания, а в другом - выступает в роли заявки на обслуживание, например к заведующему производством за получением товара.

Заявки в силу массовости поступления на обслуживание образуют потоки, которые до выполнения операций обслуживания называются входящими, а после возможного ожидания начала обслуживания, т.е. простоя в очереди, образуют потоки обслуживания в каналах, а затем формируется выходящий поток заявок. В целом совокупность элементов входящего потока заявок, очереди, каналов обслуживания и выходящего потока заявок образует простейшую одноканальную систему массового обслуживания — СМО.

Под системой понимается совокупность взаимосвязанных и. целенаправленно взаимодействующих частей (элементов). Примерами таких простейших СМО в коммерческой деятельности являются места приема и обработки товаров, узлы расчета с покупателями в магазинах, кафе, столовых, рабочие места экономист та, бухгалтера, коммерсанта, повара на раздаче и т.д.

Процедура обслуживания считается завершенной, когда заявка на обслуживание покидает систему. Продолжительность интервала времени, требуемого для реализации процедуры обслуживания, зависит в основном от характера запроса заявки на обслуживание, состояния самой обслуживающей системы и канала обслуживания.

Действительно, продолжительность пребывания покупателя в супермаркете зависит, с одной стороны, от личностных качеств покупателя, его запросов, от ассортимента товаров, который он собирается приобрести, а с другой - от формы организации обслуживания и обслуживающего персонала, что может значительно повлиять на время пребывания покупателя в супермаркете и интенсивность обслуживания. Например, овладение кассирами-контролерами работы «слепым» методом на кассовом аппарате позволило увеличить пропускную способность узлов расчета в 1,3 раза и сэкономить время, затрачиваемое на расчеты с покупателями по каждой кассе более чем на 1,5 ч в день. Внедрение единого узла расчета в супермаркете дает ощутимые преимущества покупателю. Так, если при традиционной форме расчетов время обслуживания одного покупателя составляло в среднем 1,5 мин, то при введении единого узла расчета — 67 с. Из них 44 с уходят на оформление покупки в секции и 23 с непосредственно на расчеты за покупки. Если покупатель делает несколько покупок в разных секциях, то потери времени сокращаются при приобретении двух покупок в 1,4 раза, трех - в 1,9, пяти — в 2,9 раза.

Под обслуживанием заявок будем понимать процесс удовлетворения потребности. Обслуживание имеет различный характер по своей природе. Однако, во всех примерах поступившие заявки нуждаются в обслуживании со стороны какого-либо устройства. В некоторых случаях обслуживание производится одним человеком (обслуживание покупателя одним продавцом, в некоторых — группой людей (обслуживание больного врачебной комиссией в поликлинике), а в некоторых случаях - техническими устройствами (продажа газированной воды, бутербродов автоматами). Совокупность средств, которые осуществляют обслуживание заявок, называется каналом обслуживания.

Если каналы обслуживания способны удовлетворить одинаковые заявки, то каналы обслуживания называются однородными. Совокупность однородных каналов обслуживания называется обслуживающей системой.

В систему массового обслуживания поступает большое количество заявок в случайные моменты времени, длительность обслуживания которых также является случайной величиной. Последовательное поступление заявок в систему обслуживания называется входящим потоком заявок, а последовательность заявок, покидающих систему обслуживания,— выходящим потоком.

Случайный характер распределения длительности выполнения операций обслуживания наряду со случайным характером поступления требований на обслуживание приводит к тому, что в каналах обслуживания протекает случайный процесс, который "может быть назван (по аналогии с входным потоком заявок) потоком обслуживания заявок или просто потоком обслуживания.

Заметим, что заявки, поступающие в систему обслуживания, могут покинуть ее и будучи не обслуженными. Например, если покупатель не найдет в магазине нужный товар, то он покидает магазин, будучи не обслуженным. Покупатель может покинуть магазин также, если нужный товар имеется, но большая очередь, а покупатель не располагает временем.

Теория массового обслуживания занимается изучением процессов, связанных с массовым обслуживанием, разработкой методов решения типичных задач массового обслуживания.

При исследовании эффективности работы системы обслуживания важную роль играют различные способы расположения в системе каналов обслуживания.

При параллельном расположении каналов обслуживания требование может быть обслужено любым свободным каналом. Примером такой системы обслуживания является расчетный узел в магазинах самообслуживания, где число каналов обслуживания совпадает с числом кассиров-контролеров.

На практике часто обслуживание одной заявки осуществляется последовательно несколькими каналами обслуживания. При этом очередной канал обслуживания начинает работу по обслуживанию заявки после того, как предыдущий канал закончил свою работу. В таких системах процесс обслуживания носит многофазовый характер, обслуживание заявки одним каналом называется фазой обслуживания. Например, если в магазине самообслуживания имеются отделы с продавцами, то покупатели сначала обслуживаются продавцами, а потом уже кассирами-контролерами.

Организация системы обслуживания зависит от воли человека. Под качеством функционирования системы в теории массового обслуживания понимают не то, насколько хорошо выполнено обслуживание, а то, насколько полно загружена система обслуживания, не простаивают ли каналы обслуживания, не образуется ли очередь.

В коммерческой деятельности заявки, поступающие в систему массового обслуживания, выступают с высокими претензиями еще и на качество обслуживания в целом, которое включает не только перечень характеристик, исторически сложившихся и рассматриваемых непосредственно в теории массового обслуживания, но и дополнительные характерные для специфики коммерческой деятельности, в частности отдельных процедур обслуживания, требования, к уровню которых к настоящему времени сильно возросли. В связи с этим необходимо учитывать еще и показатели коммерческой деятельности.

Работу системы обслуживания характеризуют такие показатели. Как время ожидания начала обслуживания, длина очереди, возможность получения отказа в обслуживании, возможность простоя каналов обслуживания, стоимость обслуживания и в конечном итоге удовлетворение качеством обслуживания, которое еще включает показатели коммерческой деятельности. Чтобы улучшить качество функционирования системы обслуживания, необходимо определить, каким образом распределить поступающие заявки между каналами обслуживания, какое количество каналов обслуживания необходимо иметь, как расположить или сгруппировать каналы обслуживания или обслуживающие аппараты для улучшения показателей коммерческой деятельности. Для решения перечисленных задач существует эффективный метод моделирования, включающий и объединяющий достижения разных наук, в том числе математики.

**1.2 Моделирование систем массового обслуживания**

Переходы СМО из одного состояния в другое происходят под воздействием вполне определенных событий - поступления заявок и их обслуживания. Последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени, формирует так называемый поток событий. Примерами таких потоков в коммерческой деятельности являются потоки различной природы — товаров, денег, документов, транспорта, клиентов, покупателей, телефонных звонков, переговоров. Поведение системы обычно определяется не одним, а сразу несколькими потоками событий. Например, обслуживание покупателей в магазине определяется потоком покупателей и потоком обслуживания; в этих потоках случайными являются моменты появления покупателей, время ожидания в очереди и время, затрачиваемое на обслуживание каждого покупателя.

При этом основной характерной чертой потоков является вероятностное распределение времени между соседними событиями. Существуют различные потоки, которые отличаются своими характеристиками.

Поток событий называется регулярным, если в нем события следуют одно за другим через заранее заданные и строго определенные промежутки времени. Такой поток является идеальным и очень редко встречается на практике. Чаще встречаются нерегулярные потоки, не обладающие свойством регулярности.

Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания любого числа событий на промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от того, как далеко расположен этот промежуток от начала отсчета времени. Стационарность потока означает независимость от времени его вероятностных характеристик, в частности, интенсивность такого потока есть среднее число событий в единицу времени и остается величиной постоянной. На практике обычно потоки могут считаться стационарными только на некотором ограниченном промежутке времени. Обычно поток покупателей, например, в магазине существенно меняется в течение рабочего дня. Однако можно выделить определенные временные интервалы, внутри которых этот поток допустимо рассматривать как стационарный, имеющий постоянную интенсивность.

Поток событий называется потоком без последствия, если число событий, попадающих на один из произвольно выбранных промежутков времени, не зависит от числа событий, попавших на другой, также произвольно выбранный промежуток, при условии, что эти промежутки не пересекаются между собой. В потоке без последствия события появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга. Например, поток покупателей, входящих в магазин, можно считать потоком без последствия потому, что причины, обусловившие приход каждого из них, не связаны с аналогичными причинами для других покупателей.

Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на очень малый отрезок времени сразу двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания только одного события. В ординарном потоке события происходят поодиночке, а не по два или более разу. Если поток одновременно обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последствия, то такой поток называется простейшим (или пуассоновским) потоком событий. Математическое описание воздействия такого потока на системы оказывается наиболее простым. Поэтому, в частности, простейший поток играет среди других существующих потоков особую роль.

Рассмотрим на оси времени некоторый промежуток времени t. Допустим, вероятность попадания случайного события на этот промежуток p, а полное число возможных событий — п. При наличии свойства ординарности потока событий вероятность р должна быть достаточно малой величиной, а я — достаточно большим числом, поскольку рассматриваются массовые явления. В этих условиях для вычисления вероятности попадания на промежуток времени t некоторого числа событий т можно воспользоваться формулой Пуассона:

Pm, n= am\_e-a ; (m=0,n),

где величина а = пр - среднее число событий, попадающих на промежуток времени t, которое можно определить через интенсивность потока событий X следующим образом: a= λ τ

Размерность интенсивности потока X есть среднее число событий в единицу времени. Между п и λ, р и τ имеется следующая связь:

n= λ t; p= τ/t

где t- весь промежуток времени, на котором рассматривается действие потока событий.

Необходимо определить распределение интервала времени Т между событиями в таком потоке. Поскольку это случайная величина, найдем ее функцию распределения. Как известно из теории вероятностей, интегральная функция распределения F(t) есть вероятность того, что величина T будет меньше времени t.

F(t)=P(T<t).

По условию в течение времени T не должно произойти ни одного события, а на интервале времени t должно появиться хотя бы одно событие. Эта вероятность вычисляется с помощью вероятности противоположного события на промежутке времени (0; t), куда не попало ни одного события, т.е. m = 0, тогда

F(t)=1-P0=1-(a0\*e-a)0!=1-e-Xt,t≥0

Для малых ∆t можно получить приближенную формулу, получаемую заменой функции e-Xt, только двумя членами разложения в ряд по степеням ∆t, тогда вероятность попадания на малый промежуток времени ∆t хотя бы одного события составляет

P(T<∆t)=1-e-λ t ≈1-[1- λ Δt+1/2(λ Δt)2-1/6(λ Δt)3] ≈ λ Δt

Плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями получим, продифференцировав F(t) по времени,

f(t)= λ e- λ t ,t≥0

Пользуясь полученной функцией плотности распределения, можно получить числовые характеристики случайной величины Т: математическое ожидание М (Т), дисперсию D(T) и среднее квадратическое отклонение σ(Т).

М(Т)= λ ∞∫0 t\*e-λt\*dt=1/ λ ; D(T)=1/ λ2 ; σ(T)=1/ λ .

Отсюда можно сделать следующий вывод: средний интервал времени Т между любыми двумя соседними событиями в простейшем потоке в среднем равен 1/λ , и его среднее квадратическое отклонение также равно 1/λ, λ где, — интенсивность потока, т.е. среднее число событий, происходящих в единицу времени. Закон распределения случайной величины, обладающей такими свойствами М(Т) = Т, называется показательным (или экспоненциальным), а величина λ, является параметром этого показательного закона. Таким образом, для простейшего потока математическое ожидание интервала времени между соседними событиями равно его среднеквадратическому отклонению. В этом случае вероятность того, что число заявок, поступающих на обслуживание за промежуток времени t, равно к, определяется по закону Пуассона:

Pk(t)=( λt)k/ k! \*e-λ t,

где λ - интенсивность поступления потока заявок, среднее число событий в СМО за единицу времени, например[чел/мин; руб./час; чеков/час; докум./день; кг./час; т./год] .

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками Т распределено экспоненциально с плотностью вероятности:

ƒ(t)= λ e-λ t.

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания tоч тоже можно считать распределенным экспоненциально:

ƒ (tоч)=V\*e-v tоч ,

где v — интенсивность потока прохода очереди, определяемая средним числом заявок, проходящих на обслуживание в единицу времени:

v=1/Точ ,

где Точ — среднее время ожидания обслуживания в очереди.

Выходной поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания tобс является тоже случайной величиной и подчиняется во многих случаях показательному закону распределения с плотностью вероятности:

ƒ(t обс)=µ\*е µ t обс ,

где µ - интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

µ=1/ t обс[чел/мин; руб./час; чеков/час; докум./день; кг./час; т./год] ,

где t обс - среднее время обслуживания заявок.

Важной характеристикой СМО, объединяющей показатели λ и µ , является интенсивность нагрузки: ρ= λ/ µ, которая показывает степень согласования входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

Кроме понятия простейшего потока событий часто приходится пользоваться понятиями потоков других типов. Поток событий называется потоком Пальма, когда в этом потоке промежутки времени между последовательными событиями T1, T2, ..., Тk ..., Тn являются независимыми, одинаково распределенными, случайными величинами, нов отличие от простейшего потока не обязательно распределенными по показательному закону. Простейший поток является частным случаем потока Пальма.

Важным частным случаем потока Пальма является так называемый поток Эрланга.

Этот поток получается «прореживанием» простейшего потока. Такое «прореживание» производится путем отбора по определенному правилу событий из простейшего потока.

Например, условившись учитывать только каждое второе событие из образующих простейший поток, мы получим поток Эрланга второго порядка. Если брать только каждое третье событие, то образуется поток Эрланга третьего порядка и т.д.

Можно получить потоки Эрланга любого к-го порядка. Очевидно, простейший поток есть поток Эрланга первого порядка.

Любое исследование системы массового обслуживания начинается с изучения того, что необходимо обслуживать, следовательно, с изучения входящего потока заявок и его характеристик.

Поскольку моменты времени t и интервалы времени поступления заявок τ, затем продолжительность операций обслуживания t обс и время ожидания в очереди tоч, а также длина очереди lоч — случайные величины, то, следовательно, характеристики состояния СМО носят вероятностный характер, а для их описания следует применять методы и модели теории массового обслуживания.

Перечисленные выше характеристики к, τ, λ, Lоч, Точ, v, tобс, µ, р, Рk являются наиболее общими для СМО, которые являются обычно лишь некоторой частью целевой функции, поскольку необходимо учитывать еще и показатели коммерческой деятельности.

**1.3 Графы состояний СМО**

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться вариантом схематичного изображения возможных состояний СMO (рис. 6.2.1) в виде графа с разметкой его возможных фиксированных состояний. Состояния СМО изображаются обычно либо прямоугольниками, либо кружками, а возможные направления переходов из одного состояния в другое ориентированы стрелками, соединяющими эти состояния. Например, размеченный граф состояний одноканальной системы случайного процесса обслуживания в газетном киоске приведен на рис. 1.3.

λ01 λ12

S0

S2

S1

S0

S2

S1

λ10 λ21

Рис. 1.3. Размеченный граф состояний СМО

Система может находиться в одном из трех состояний: S0 -канал свободен, простаивает, S1 — канал занят обслуживанием, S2- канал занят обслуживанием и одна заявка в очереди. Переход системы из состояния S0 в Sl происходит под воздействием простейшего потока заявок интенсивностью λ 01 а из состояния Sl в состояние S0 систему переводит поток обслуживания с интенсивностью λ 01. Граф состояний системы обслуживания с проставленными интенсивностями потоков у стрелок называется размеченным. Поскольку пребывание системы в том или ином состоянии носит вероятностный характер, то вероятность:pi(t) того, что система будет находиться в состоянии Si в момент времени t, называется вероятностью i-го состояния СМО и определяется числом поступивших заявок k на обслуживание.

Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том, что в случайные моменты времени t0, t1, t2,..., tk,..., tn система оказывается в том или другом заранее известном дискретном состоянии последовательно. Такая. случайная последовательность событий называется Марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из одного состояния St в любое другое Sj не зависит от того, когда и как система перешла в состояние St. Описывается марковская цепь с помощью вероятности состояний, причем они образуют полную группу событий, поэтому их сумма равна единице. Если вероятность перехода не зависит от номера к, то марковская цепь называется однородной. Зная начальное состояние системы обслуживания, можно найти вероятности состояний для любого значения к-числа заявок поступивших на обслуживание.

**1.4 Случайные процессы**

Переход СМО из одного состояния в другое происходит случайным образом и представляет собой случайный процесс. Работа СМО — случайный процесс с дискретными состояниями, поскольку его возможные состояния во времени можно заранее перечислить. Причем переход из одного состояния в другое, происходит скачкообразно, в случайные моменты времени, по этому он называется процессом с непрерывным временем. Таким образом, работа СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным; временем. Например, в процессе обслуживания оптовых покупателей на фирме «Кристалл» в Москве можно фиксировать заранее все возможные состояния простейших. СМО, которые входят в весь цикл, коммерческого обслуживания от момента заключения договора на поставку ликероводочной продукции, ее оплаты, оформления документов, отпуска и получения продукции, догрузки и вывоза со склада готовой продукции.

Из множества разновидностей случайных процессов наибольшее распространение в коммерческой деятельности получили такие процессы, для которых в любой момент времени характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в настоящий момент и не зависят от предыстории — от прошлого. Например, возможность получения с завода «Кристалл» ликероводочной продукции зависит от наличия ее на складе готовой продукции, т.е. его состояния в данный момент, и не зависит от того, когда и как получали и увозили в прошлом эту продукцию другие покупатели.

Такие случайные процессы называются процессами без последствия, или марковскими, в которых при фиксированном настоящем будущее состояние СМО не зависит от прошлого. Случайный процесс, протекающий в системе, называется марковским случайным процессом, или «процессом без последствия», если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t0 вероятность любого состояния t > t0 системы Si, - в будущем (t >tQ) зависит только от ее состояния в настоящем (при t = t0) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние, т.е. оттого, как развивался процесс в прошлом.

Марковские случайные процессы делятся на два класса: процессы с дискретными и непрерывными состояниями. Процесс с дискретными состояниями возникает в сиcтемах, обладающих только некоторыми фиксированными состояниями, между которыми возможны скачкообразные переходы в некоторые, заранее не известные моменты времени. Рассмотрим пример процесса с дискретными состояниями. В офисе фирмы имеются два телефона. Возможны следующие состояния у этой системы обслуживания: So—телефоны свободны; Sl — один из телефонов занят; S2— оба телефона заняты.

Процесс, протекающий в этой системе, состоит в том, что система случайным образом переходит скачком из одного дискретного состояния в другое.

Процессы с непрерывными состояниями отличаются непрерывным плавным переходом из одного состояния в другое. Эти процессы более характерны для технических устройств, нежели для экономических объектов, где обычно лишь приближенно можно говорить о непрерывности процесса (например, непрерывном расходовании запаса товара), тогда как фактически всегда процесс имеет дискретный характер. Поэтому далее мы будем рассматривать только процессы с дискретными состояниями.

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями в свою очередь подразделяются на процессы с дискретным временем и процессы с непрерывным временем. В первом случае переходы из одного состояния в другое происходят только в определенные, заранее фиксированные моменты времени, тогда как в промежутки между этими моментами система сохраняет свое состояние. Во втором случае переход системы из состояния в состояние может происходить в любой случайный момент времени.

На практике процессы с непрерывным временем встречаются значительно чаще, поскольку переходы системы из одного состояния в другое обычно происходят не в какие-то фиксированные моменты времени, а в любые случайные моменты времени.

Для описания процессов с непрерывным временем используется модель в виде так называемой марковской цепи с дискретными состояниями системы, или непрерывной марковской цепью.

**Глава II. Уравнения описывающие системы массового обслуживания**

**2.1 Уравнения Колмогорова**

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями системы So, Sl, S2(см. рис. 6.2.1) и непрерывным временем. Полагаем, что все переходы системы массового обслуживания из состояния Si в состояние Sj происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λij, а обратный переход под воздействием другого потока λij,. Введем обозначение pi как вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии Si. Для любого момента времени t справедливо записать нормировочное условие—сумма вероятностей всех состояний равна 1:

2

Σpi(t)=p0(t)+ p1(t)+ p2(t)=1

i=0

Проведем анализ системы в момент времени t, задав малое приращение времени Δt, и найдем вероятность р1 (t+ Δt) того, что система в момент времени (t+ Δt) будет находиться в состоянии S1 которое достигается разными вариантами:

а) система в момент t с вероятностью p1(t) находилась в состоянии S1 и за малое приращение времени Δt так и не перешла в другое соседнее состояние — ни в S0, ни b S2. Вывести систему из состояния S1 можно суммарным простейшим потоком c интенсивностью (λ10 +λ12), поскольку суперпозиция простейших потоков также является простейшим потоком. На этом основании вероятность выхода из состояния S1 за малый промежуток времени Δ t приближенно равна (λ10 +λ12)\* Δ t. Тогда вероятность невыхода из этого состояния равна [1 -(λ10 +λ12)\* Δ t].B соответствии с этим вероятность того, что система останется в состоянии Si на основании теоремы умножения вероятностей, равна:

p1(t) [1 -(λ10 +λ12)\* Δ t];

б)система находилась в соседнем состоянии So и за малое время Δ t перешла в состояние So Переход системы происходит под воздействием потока λ01 с вероятностью, приближенно равной λ01Δ t

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S1, в этом варианте равна po(t) λ 01 Δ t;

в) система находилась в состоянии S2 и за время Δ t перешла в состояние S1 под воздействием потока интенсивностью λ 21 с вероятностью, приближенно равной λ21Δ t. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S1, равна p2(t) λ21Δ t.

Применяя теорему сложения вероятностей для этих вариантов, получим выражение:

p2(t+Δt)= p1(t) [1 -(λ10 +λ12)\* Δ t]+ po(t) λ 01 Δ t+ p2(t) λ21Δ t ,

которое можно записать иначе:

p2(t+Δt)- p1(t)/ Δ t= po(t) λ 01+ p2(t) λ21- p1(t) (λ10 +λ12) .

Переходя к пределу при Δt -> 0, приближенные равенства перейдут в точные, и тогда получим производную первого порядка

dp2/dt= p0 λ 01 +p2 λ21 -p1 (λ10 +λ12) ,

что является дифференциальным уравнением.

Проводя рассуждения аналогичным образом для всех других состояний системы, получим систему дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями А.Н. Колмогорова:

dp0 /dt= p1 λ 10 ,

dp1 /dt= p0 λ 01 +p2 λ21 -p1 (λ10 +λ12) ,

dp2 /dt= p1 λ 12 +p2 λ21 .

Для составления уравнений Колмогорова существуют общие правила.

Уравнения Колмогорова позволяют вычислить все вероятности состояний СМО Si в функции времени pi(t). В теории случайных процессов показано, что если число состояний системы конечно, а из каждого из них можно перейти в любое другое состояние, то существуют предельные (финальные) вероятности состояний, которые показывают на среднюю относительную величину времени пребывания системы, в этом состоянии. Если предельная вероятность состояния S0 – равна p0 = 0,2, то, следовательно, в среднем 20% времени, или 1/5 рабочего времени, система находится в состоянии So. Например, при отсутствии заявок на обслуживание к = 0, р0 = 0,2,; следовательно, в среднем 2 ч в день система находится в состоянии So и простаивает, если продолжительность рабочего дня составляет 10 ч.

Поскольку предельные вероятности системы постоянны, то заменив в уравнениях Колмогорова соответствующие производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим СМО. Такую систему уравнений составляют по размеченному графу состояний СМО по следующим правилам: слева от знака равенства в уравнении стоит предельная вероятность рi рассматриваемого состояния Si умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, выводящих (выходящие стрелки) изданного состояния Si систему, а справа от знака равенства — сумма произведений интенсивности всех потоков, входящих (входящие стрелки) в состояние Si систему, на вероятность тех состояний, из которых эти потоки исходят. Для решения подобной системы необходимо добавить еще одно уравнение, определяющее нормировочное условие, поскольку сумма вероятностей всех состояний СМО равна 1: n

Σpi(t)=1

i=1

Например, для СМО, имеющей размеченный граф из трех состояний So, S1, S2 рис. 6.2.1, система уравнений Колмогорова, составленная на основе изложенного правила, имеет следующий вид:

Для состояния So→ p0 λ 01 = p1 λ 10

Для состояния S1→ p1 (λ10 +λ12) = p0 λ 01 +p2 λ21

Для состояния S2→ p2 λ21 = p1 λ 12

p0 +p1 +p2 =1

dp 4(t)/dt= λ34 p3(t) - λ43 p4(t) ,

p1(t)+ p2(t)+ p3(t)+ p4(t)=1 .

К этим уравнениям надо добавить еще начальные условия. Например, если при t = 0 система S находится в состоянии S1, то начальные условия можно записать так:

p1(0)=1, p2(0)= p3(0)= p4(0)=0 .

Переходы между состояниями СМО происходит под воздействием поступления заявок и их обслуживания. Вероятность перехода в случае, если поток событий простейший, определяется вероятностью появления события в течение времени Δ t, т.е. величиной элемента вероятности перехода λij Δ t, где λij — интенсивность потока событий, переводящих систему из состояния i в состояние i (по соответствующей стрелке на графе состояний).

Если все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским случайным процессом, т.е. процессом без последствия. В этом случае поведение системы достаточно просто, определяется, если известны интенсивность всех этих простейших потоков событий. Например, если в системе протекает марковский случайный процесс с непрерывным временем, то, записав систему уравнений Колмогорова для вероятностей состояний и проинтегрировав эту систему при заданных начальных условиях, получим все вероятности состояний как функции времени:

pi(t), p2(t),…., pn(t) .

Во многих случаях на практике оказывается, что вероятности состояний как функции времени ведут себя таким образом, что существует

lim pi(t) = pi (i=1,2,…,n) ; t→∞

независимо от вида начальных условий. В этом случае говорят, что существуют предельные вероятности состояний системы при t->∞ и в системе устанавливается некоторый предельный стационарный режим. При этом система случайным образом меняет свои, состояния, но каждое из этих состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью, определяемой средним временем пребывания системы в каждом из состояний.

Вычислить предельные вероятности состояния рi можно, если в системе положить все производные равными 0, поскольку в уравнениях Колмогорова при t-> ∞ зависимость от времени пропадает. Тогда система дифференциальных уравнений превращается в систему Обычных линейных алгебраических уравнений, которая совместно с нормировочным условием позволяет вычислить все предельные вероятности состояний.

* 1. **Процессы «рождения – гибели»**

Среди однородных марковских процессов существует класс случайных процессов, имеющих широкое применение при построении математических моделей в областях демографии, биологии, медицины (эпидемиологии), экономики, коммерческой деятельности. Это так называемые процессы «рождения - гибели», марковские процессы со стохастическими графами состояний следующего вида:

|  |
| --- |
| S1 |

|  |
| --- |
| S2 |

λ0 λ1 λ2 λ3 λn-1

|  |
| --- |
| S0 |

|  |
| --- |
| S3 |

|  |
| --- |
| kjlSn |

μ0 μ1 μ3 μ4 μn-1

Рис. 2.1 Размеченный граф процесса «рождения - гибели»

Этот граф воспроизводит известную биологическую интерпретацию: величина λk отображает интенсивность рождения нового представителя некоторой популяции, например, кроликов, причем текущий объем популяции равен k; величина μ является интенсивностью гибели (продажи) одного представителя этой популяции, если текущий объем популяции равен k. В частности, популяция может быть неограниченной (число n состояний марковского процесса является бесконечным, но счетным), интенсивность λ может быть равна нулю (популяция без возможности возрождения), например, при прекращении воспроизводства кроликов.

Для Марковского процесса «рождения - гибели», описанного стохастическим графом, приведенным на рис. 2.1, найдем финальное распределение. Пользуясь правилами составления уравнений для конечнего числа n предельных вероятностей состояния системы S1, S2, S3,… Sk,…, Sn, составим соответствующие уравнения для каждого состояния:

для состояния S0-λ0p0=μ0p1;

для состояния S1-(λ1+μ0)p1= λ0p0+μ1p2, которое с учетом предыдущего уравнения для состояния S0 можно преобразовать к виду λ1р1= μ1p2.

Аналогично можно составить уравнения для остальных состояний системы S2, S3,…, Sk,…, Sn. В результате получим следующую систему уравнений:



Решая эту систему уравнений, можно получить выражения, определяющие финальные состояния системы массового обслуживания:



Следует заметить, что в формулы определения финальных вероятностей состояний р1, р2, р3,…, рn, входят слагаемые, являющиеся составной частью суммы выражения, определяющей р0. В числителях этих слагаемых находятся произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок графа состояний, ведущих слева на право до рассматриваемого состояния Sk, а знаменатели представляют собой произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа на лево до рассматриваемого состояния Sk, т.е. μ0, μ1, μ2, μ3,… μk. В связи с этим запишем эти модели в более компактном виде:

к=1,n



* 1. **Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания**

Правильная или наиболее удачная экономико-математическая постановка задачи в значительной степени определяет полезность рекомендаций по совершенствованию систем массового обслуживания в коммерческой деятельности.

В связи с этим необходимо тщательно проводить наблюдение за процессом в системе, поиска и выявления существенных связей, формирования проблемы, выделения цели, определения показателей и выделения экономических критериев оценки работы СМО. В этом случае в качестве наиболее общего, интегрального показателя могут выступать затраты, с одной стороны, СМО коммерческой деятельности как обслуживающей системы, а с другой – затраты заявок, которые могут иметь разную по своему физическому содержанию природу.

Повышение эффективности в любой сфере деятельности К. Маркс в конечном счете рассматривал как экономию времени и усматривал в этом один из важнейших экономических законов. Он писал, что экономия времени, равно как и планомерное распределение рабочего времени по различным отраслям производства, остается первым экономическим законом на основе коллективного производства. Этот закон проявляется во всех сферах общественной деятельности.

Для товаров, в том числе и денежных средств, поступающих в коммерческую сферу, критерий эффективности связан со временем и скоростью обращения товаров и определяет интенсивность поступления денежных средств в банк. Время и скорость обращения, являясь экономическими показателями коммерческой деятельности, характеризирует эффективность использования средств, вложенных в товарные запасы. Товарооборачиваемость отражает среднюю скорость реализации среднего товарного запаса. Показатели товарооборачиваемости и уровня запасов тесно связаны известным моделями. Таким образом, можно проследить и установить взаимосвязь этих и других показателей коммерческой деятельности с временными характеристиками.

Следовательно, эффективность работы коммерческого предприятия или организации складывается из совокупности времени выполнения отдельных операций обслуживания, в то же время для населения затраты времени включают время на дорогу, посещение магазина, столовой, кафе, ресторана, ожидание начало обслуживания, ознакомление с меню, выбор продукции, расчет и т.д. Проведенные исследования структуры затрат времени населения свидетельствует о том, что значительная его часть расходуется нерационально. Заметим, что коммерческая деятельность в конечном счете направлена на удовлетворение потребности человека. Поэтому усилия моделирования СМО должны включать анализ затрат времени по каждой элементарной операции обслуживания. С помощью соответствующих методов следует создавать модели связи показателей СМО. Это обусловливает необходимость наиболее общие и известные экономические показатели, такие как товарооборот, прибыль, издержки обращения, рентабельность и другие, увязывать в экономико-математических моделях с дополнительно возникающей группой показателей, определяемых спецификой обслуживающих систем и вносимых собственно спецификой теории массового обслуживания.

Например, особенностями показателей СМО с отказами являются: время ожидания заявок в очереди Точ=0, поскольку по своей природе в таких системах существование очереди невозможно, то Lоч=0 и, следовательно, вероятность ее образования Роч=0. По числу заявок k определятся режим работы системы, ее состояние: при k=0 – простой каналов, при 1<k<n – обслуживание заявок, при k>n – обслуживание и отказ. Показателями таких СМО являются вероятность отказа в обслуживании Ротк, вероятность обслуживания Робс, среднее время простоя канала tпр, среднее число занятых nз и свободных каналов nсв, среднее обслуживания tобс, абсолютная пропускная способность А.

Для СМО с неограниченным ожиданием характерно, что вероятность обслуживания заявки Робс=1, поскольку длина очереди и время ожидания начала обслуживания не ограничены, т.е. формально Lоч→∞ и Точ→∞. В системах возможны следующие режимы работы: при k=0 наблюдается простой каналов обслуживания, при 1<k≤n – обслуживание и при k>n – обслуживание и очередь. Показателями таких эффективности таких СМО являются среднее число заявок в очереди Lоч, среднее число заявок в системе k, среднее время пребывания заявки в системе Тсмо, абсолютная пропускная способность А.

В СМО с ожиданием с ограничением на длину очереди, если число заявок в системе k=0, то наблюдается простой каналов, при 1<k≤n- обслуживание, при n<k<n+m – обслуживание и очередь и при k>n+m- обслуживание, очередь и отказ в ожидании обслуживания. Показателями эффективности таких СМО являются вероятность отказа в обслуживании Ротк- вероятность обслуживания Робс, среднее число заявок в очереди Lоч, среднее число заявок в системе Lсмо среднее время пребывания заявки в системе Тсмо, абсолютная пропускная способность А.

Таким образом, перечень характеристик систем массового обслуживания можно представить следующим образом: среднее время обслуживания – tобс; среднее время ожидания в очереди – Точ; среднее пребывания В СМО – Тсмо; средняя длина очереди - Lоч; среднее число заявок в СМО- Lсмо; количество каналов обслуживания – n; интенсивность входного потока заявок – λ; интенсивность обслуживания – μ; интенсивность нагрузки – ρ; коэффициент нагрузки – α; относительная пропускная способность – Q; абсалютная пропускная способность – А; доля времени простоя в СМО – Р0; доля обслуженных заявок – Робс; доля потерянных заявок – Ротк, среднее число занятых каналов – nз; среднее число свободных каналов - nсв; коэффициент загрузки каналов – Кз; среднее время простоя каналов - tпр.

Следует заметить что, иногда достаточно использовать до десяти основных показателей, чтобы выявить слабые места и разработать рекомендации по совершенствованию СМО.

Это часто связано с решением вопросов согласованной рабоиы цепочки или совокупностей СМО.

Например, в коммерческой деятельности необходимо учитывать еще и экономические показатели СМО: общие затраты – С; издержки обращения – Сио, издержки потребления – Сип, затраты на обслуживание одной заявки – С1, убытки, связанные с уходом заявки, - Су1, затраты на эксплуатацию канала – Ск, затраты простоя канала – Спр, капитальные вложения – Скап, приведенные годовые затраты – Спр, текущие затраты – Стек, доход СМО в единицу времени – Д1

В процессе постановки задач необходимо раскрыть взаимосвязи показателей СМО, которые по своей базовой принадлежности можно разделить на две группы: первая связана с издержками обращения Сио, которые определяются числом занятых обслуживанием каналов, затратами на содержание СМО, интенсивностью обслуживания, степенью загрузки каналов, эффективностью их использования, пропускной способностью СМО и др.; вторая группа показателей определяется издержками собственно заявок Сип, поступающих на обслуживание, которые образуют входящий поток, ощущают эффективность обслуживания и связаны с такими показателями, как длина очереди, время ожидания обслуживания, вероятность отказа в обслуживании, время пребывания заявки в СМО и др.

Эти группы показателей противоречивы в том смысле, что улучшение показателей одной группы, например, сокращение длины очереди или времени ожидания в очереди путем увлечения числа каналов обслуживания (официантов, поваров, грузчиков, кассиров), связано с ухудшением показателей группы, поскольку это может привести к увеличению времени простоев каналов обслуживания, затрат на их содержание и т.д. В связи с этим формализации задач обслуживания вполне естественно стремление построить СМО таким образом, чтобы установить разумный компромисс между показателями собственно заявок и полнотой использования возможностей системы. С этой целью необходимо выбрать обобщенный, интегральный показатель эффективности СМО, включающий одновременно претензии и возможности обеих групп. В качестве такого показателя может быть выбран критерий экономической эффективности, включающий как издержки обращения Сио, так и издержки заявок Сип, которые будут иметь оптимальное значение при минимуме общих затрат С. На этом осонвании целевую функцию задачи можно записать так:

С= (Сио+Сип) →min

Поскольку издержки обращения включают затраты, связанные с эксплуатацией СМО – Сэкс и простоем каналов обслуживания - Спр, а издержки заявок включают потери, связанные с уходом не обслуженных заявок – Снз, и с пребыванием в очереди – Соч, тогда целевую функцию можно переписать с учетом этих показателей таким образом:

С={(Спрnсв+Сэкзnз)+СочРобсλ(Точ+tобс)+СизРоткλ}→min.

В зависимости от поставленной задачи в качестве варьируемых, т.е управляемых, показателей могут быть: количество каналов обслуживания, организация каналов обслуживания (параллельно, последовательно, смешанным образом), дисциплина очереди, приоритетность обслуживания заявок, взаимопомощь между каналами и др. Часть показателей в задаче фигурирует в качестве неуправляемых, которые обычно являются исходными данными. В качестве критерия эффективности в целевой функции могут быть так же товарооборот, прибыль, или доход, например, рентабельность, тогда оптимальные значения управляемых показателей СМО находятся очевидно, уже при максимизации, как в предыдущем варианте.

В некоторых случаях следует пользоваться другим вариантом записи целевой функции:

С={Сэкзnз+Cпр(n-n з)+Cотк\*Ротк\*λ+Ссист\* nз}→min

В качестве общего критерия может быть выбран, например, уровень культуры обслуживания покупателей на предприятиях, тогда целевая функция может быть представлена следующей моделью:

Коб=[(Зпу\*Ку)+(Зпв\*Кв)+(Зпд\*Кд)+(Зпз\*Кз)+(Зпо\*К0)+(Зкт\*Ккт)]\*Кмп,

где Зпу – значимость показателя устойчивости ассортимента товаров;

Ку - коэффициент устойчивости ассортимента товаров;

Зпв – значимость показателя внедрения прогрессивных методов продажи товаров;

Кв – коэффициент внедрения прогрессивных методов продажи товаров;

Зпд – значимость показателя дополнительного обслуживания;

Кд - коэффициент дополнительного обслуживания;

Зпз - значимость показателя завершенности покупки;

Кз - коэффициент завершенности покупки;

Зпо - значимость показателя затрат времени на ожидание в обслуживании;

Ко – показатель затрат времени на ожидание обслуживания;

Зкт – значимость показателя качества труда коллектива;

Ккт – коэффициент качества труда коллектива;

Кмп – показатель культуры обслуживания по мнению покупателей;

Для анализа СМО можно выбирать и другие критерии оценки эффективности работы СМО. Например, в качестве такого критерия для систем с отказами можно выбирать вероятность отказа Ротк, значение которого не превышало бы заранее заданной величины. Например, требование Ротк<0,1 означает, что не менее чем в 90% случаев система должна справляться с обслуживанием потока заявок при заданной интенсивности λ. Можно ограничить среднее время пребывания заявки в очереди или в системе. В качестве показателей, подлежащих определению, могут выступать: либо число каналов n при заданной интенсивности обслуживания μ, либо интенсивность μ при заданном числе каналов.

После построения целевой функции необходимо определить условия решения задачи, найти ограничения, установить исходные значения показателей, выделить неуправляемые показатели, построить или подобрать совокупность моделей взаимосвязи всех показателей для анализируемого типа СМО, чтобы в конечном итоге найти оптимальные значения управляемых показателей, например количество поваров, официантов, кассиров, грузчиков, объемы складских помещений и др

**Глава III. Модели систем массового обслуживания**

**3.1 Одноканальная СМО с отказами в обслуживании**

Проведем анализ простой одноканальной СМО с отказами в обслуживании, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а обслуживание происходит под действием пуассоновского потока с интенсивностью μ.

Работу одноканальной СМО n=1 можно представить в виде размеченного графа состояний (3.1).

Переходы СМО из одного состояния S0 в другое S1 происходят под действием входного потока заявок с интенсивностью λ, а обратный переход – под действием потока обслуживания с интенсивностью μ.

λ

|  |
| --- |
| S0 |

|  |
| --- |
| S1 |

μ

S0 – канал обслуживания свободен; S1 – канал занят обслуживанием;

Рис. 3.1 Размеченный граф состояний одноканальной СМО

Запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояния по изложенным выше правилам:



Откуда получим дифференциальное уравнение для определения вероятности р0(t) состояния S0:



Это уравнение можно решить при начальных условиях в предположении, что система в момент t=0 находилась в состоянии S0, тогда р0(0)=1, р1(0)=0.

В этом случае решение дифференциального уровнения позволяет определить вероятность того, что канал свободен и не занят обслуживанием:



Тогда нетрудно получить выражение для вероятности определения вероятности занятости канала:



Вероятность р0(t) уменьшается с течением времени и в пределе при t→∞ стремится к величине



а вероятность р1(t) в то же время увеличивается от 0, стремясь в пределе при t→∞ к величине



Эти пределы вероятностей могут быть получены непосредственно из уравнений Колмогорова при условии



Функции р0(t) и р1(t) определяют переходный процесс в одноканальной СМО и описывают процесс экспоненциального приближения СМО к своему предельному состоянию с постоянной времени характерной для рассматриваемой системы.



С достаточной для практики точностью можно считать, что переходный процесс в СМО заканчивается в течение времени, равно 3τ.

Вероятность р0(t) определяет относительную пропускную способность СМО, которая определяет долю обслуживаемых заявок по отношению к полному числу поступающих заявок, в единицу времени.

Действительно, р0(t) есть вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t, будет принята к обслуживанию. Всего в единицу времени приходит в среднем λ заявок и из них обслуживается λр0 заявок.

Тогда доля обслуживаемых заявок по отношению ко всему потоку заявок определятся величиной



В пределе при t→∞ практически уже при t>3τ значение относительной пропускной способности будет равно



Абсолютная пропускная способность, определяющая число заявок, обслуживаемых в единицу времени в пределе при t→∞, равна:



Соответственно доля заявок, получивших отказ, составляет в этих же предельных условиях:



а общее число не обслуженных заявок равно



Примерами одноканальных СМО с отказами в обслуживании являются: стол заказов в магазине, диспетчерская автотранспортного предприятия, контора склада, офис управления коммерческой фирмы, с которыми устанавливается связь по телефону.

**3.2 Многоканальная СМО с отказами в обслуживании**

В коммерческой деятельности примерами многоканальных СМО являются офисы коммерческих предприятий с несколькими телефонными каналами, бесплатная справочная служба по наличию в авто магазинах самых дешевых автомобилей в Москве имеет 7 телефонных номеров, а дозвониться и получить справку, как известно, очень трудно.

Следовательно, авто магазины теряют клиентов, возможность увеличить количество проданных автомобилей и выручку от продаж, товарооборот, прибыль.

Туристические фирмы по продаже путевок имеют два, три, четыре и более каналов, как, например, фирма Express-Line.

Рассмотрим многоканальную СМО с отказами в обслуживании на рис. 3.2, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ.

λ λ λ λ λ

|  |
| --- |
| S0 |

|  |
| --- |
| S1 |

|  |
| --- |
| Sk |

|  |
| --- |
| Sn |

μ 2μ kμ (k+1)μ nμ

Рис. 3.2. Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами

Поток обслуживания в каждом канале имеет интенсивность μ. По числу заявок СМО определяются ее состояния Sk, представленные в виде размеченного графа:

S0 – все каналы свободны k=0,

S1 – занят только один канал, k=1,

S2 – заняты только два канала, k=2,

Sk – заняты k каналов,

Sn – заняты все n каналов, k= n.

Состояния многоканальной СМО меняются скачкообразно в случайные моменты времени. Переход из одного состояния, например S0 в S1, происходит под воздействием входного потока заявок с интенсивностью λ, а обратно – под воздействием потока обслуживания заявок с интенсивностью μ. Для перехода системы из состояния Sk в Sk-1 безразлично, какой именно из каналов освободиться, поэтому поток событий, переводящий СМО, имеет интенсивность kμ, следовательно, поток событий, переводящий систему из Sn в Sn-1, имеет интенсивность nμ. Так формулируется классическая задача Эрланга, названная по имени датского инженера – математика- основателя теории массового обслуживания.

Случайный процесс, протекающий в СМО, представляет собой частный случай процесса «рождения- гибели» и описывается системой дифференциальных уравнений Эрланга, которые позволяют получить выражения для предельных вероятностей состояния рассматриваемой системы, называемые формулами Эрланга:

.



Вычислив все вероятности состояний n – канальной СМО с отказами р0 , р1, р2, …,рk,…, рn, можно найти характеристики системы обслуживания.

Вероятность отказа в обслуживании определяется вероятностью того, что поступившая заявка на обслуживание найдет все n каналов занятыми, система будет находиться в состоянии Sn:

k=n.



В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий, поэтому

Ротк+Робс=1

На этом основании относительная пропускная способность опредляется по формуле

Q = Pобс= 1-Ротк=1-Рn

Абсолютную пропускную способность СМО можно определить по формуле

А=λ\*Робс

Вероятность обслуживания, или доля обслуженных заявок, определяет относительную пропускную способность СМО, которая может быть определена и по другой формуле:



Из этого выражения можно определить среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, или, что же самое, среднее число занятых обслуживанием каналов



Коэффициент занятости каналов обслуживанием определятся отношением среднего числа занятых каналов к их общему числу



Вероятность занятости каналов обслуживанием, которая учитывает среднее время занятости tзан и простоя tпр каналов, определяется следующим образом:



Из этого выражения можно определить среднее время простоя каналов



Среднее время пребывания заявки в системе в установившемся режиме определятся формулой Литтла

Тсмо= nз/λ.

**3.3 Модель многофазной системы обслуживания туристов**

В реальной жизни система обслуживания туристов выглядит значительно сложнее, поэтому необходимо детализировать постановку задачи, учитывая запросы, требования как со стороны клиентов, так и турфирмы.

Для увеличения эффективности работы турфирмы необходимо смоделировать в целом поведение потенциального клиента от начала операции до ее завершения. Структура взаимосвязи основных систем массового обслуживания фактически состоит из СМО разного вида (рис. 3.3).

Поиск Выбор Выбор Решение

СМОр

реклама

СМОр

референт

СМОф

фирма

поиск фирмы тура по туру

СМОо

отель

СМОа

авиа

СМОк

касса

Оплата Перелет Исход

Рис. 3.3 Модель многофазной системы обслуживания туристов

Проблема с позиции массового обслуживания туристов, уезжающих на отдых, заключается в определении точного места отдыха (тура), адекватного требованиям претендента, соответствующего его здоровью и финансовым возможностям и представлениям об отдыхе в целом. В этом ему могут способствовать турфирмы, поиск которых осуществляется обычно из рекламных сообщений СМОр, затем после выбора фирмы происходит получение консультаций по телефону СМОт, после удовлетворительного разговора приезд в турфирму и получение более детальных консультаций лично с референтом, затем оплата путевки и получение обслуживания от авиакомпании по перелету СМОа и в конечном счете обслуживания в отеле СМ00. Дальнейшее развитие рекомендаций по улучшению работы СМО фирмы связано с изменением профессионального содержания переговоров с клиентами по телефону. Для этого необходимо углубить анализ, связанный с детализацией диалога референта с клиентами, поскольку далеко не каждый переговоры по телефону приводит к заключению договора на приобретение путевки. Проведение формализации задачи обслуживания указало на необходимость формирования полного (необходимого и достаточного) перечня характеристик и их точных значений предмета коммерческой сделки. Затем проводятся ранжирование этих характеристик, например методом парных сравнений, и расположения в диалоге по степени их значимости, например: время года (зима), месяц (январь), климат (сухой), температура воздуха (+25"С), влажность (40%), географическое место (ближе к экватору), время авиаперелета (до 5 часов), трансферт, страна (Египет), город (Хургада), море (Красное), температура воды в море (+23°С), ранг отеля (4 звезды, работающий кондиционер, гарантия наличия шампуня в номере), удаленность от моря (до 300 м), удаленность от магазинов (рядом), удаленность от дискотек и других источников шума (подальше, тишина в течение сна в отеле), питание (шведский стол — завтрак, ужин, частота изменения меню за неделю), отели (Princes, Marlin-In, Hour-Palace), экскурсии (Каир, Луксор, коралловые острова, подводное плавание), увеселительные шоу, спортивные игры, цена путевки, форма оплаты, содержание страховки, что брать с собой, что купить на месте, гарантии, штрафные санкции.

Есть еще один очень существенный показатель, выгодный для клиента, установить который предлагается самостоятельно въедливому читателю. Затем можно, используя метод опарного сравнения перечисленных характеристик хi, сформировать матрицу п х п сравнения, элементы которой заполняются последовательно по строкам по следующему правилу:

0, если характеристика менее значима,

аij = 1, если характеристика равнозначима,

2, если характеристика доминирует.

После этого определяются значения сумм оценок по каждому показателю строки Si =∑ aij , вес каждой характеристики Mi = Si /n2 и соответственно интегральный критерий, на основе которого можно провести выбор турфирмы, тура или отеля, по формуле

F = ∑ Mi \* xi —» max.

С целью исключения возможных ошибок в этой процедуре вводят, например, 5-балльную шкалу оценок с градацией характеристик Бi (хi) по принципу хуже (Бi = 1 балл) - лучше (Бi = 5 баллов). Например, чем дороже тур, тем хуже, чем он дешевле, тем лучше. На этом основании целевая функция будет иметь другой вид:

Fb = ∑ Mi \* Бi \* xi —> max.

Таким образом, можно на основе применения математических методов и моделей, используя преимущества формализации, точнее и более объективно сформулировать постановку задач и значительно улучшить показатели СМО в коммерческой деятельности для достижения поставленных целей.

**3.4 Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди**

В коммерческой деятельности чаще встречаются СМО с ожиданием (очередью).

Рассмотрим простую одноканальную СМО с ограниченной очередью, в которой число мест в очереди т - фиксированная величина. Следовательно, заявка, поступившая в тот момент, когда все места в очереди заняты, не принимается к обслуживанию, не встает в очередь и .покидает систему.

Граф этой СМО представлен на рис. 3.4 и совпадает с графом рис. 2.1 описывающим процесс «рождения—гибели», с тем отличием, что при наличии только одного канала.

λ λ λ λ ... λ

Sm

S3

S2

S1

S0

μ μ μ μ ... μ

Рис. 3.4. Размеченный граф процесса «рождения - гибели» обслуживания все интенсивности потоков обслуживания равны

Состояния СМО можно представить следующим образом:

S0 - канал обслуживания свободен,

S, - канал обслуживания занят, но очереди нет,

S2 - канал обслуживания занят, в очереди стоит одна заявка,

S3 - канал обслуживания занят, в очереди стоят две заявки,

Sm+1 - канал обслуживания занят, в очереди все т мест заняты, любая следующая заявка получает отказ.

Для описания случайного процесса СМО можно воспользоваться изложенными ранее правилами и формулами. Напишем выражения, определяющие предельные вероятности состояний:

p1 = ρ \* ρо

p2=ρ2 \* ρ0

pk=ρk \* ρ0

Pm+1 = pm=1 \* ρ0

p0=[1+ρ+ρ2+ρ3+...+ρm+1]-1

Выражение для р0 можно в аанном случае записать проще, пользуясь тем, что в знаменателе стоит геометрическая прогрессия относительно р, тогда после соответствующих преобразований получаем:

ρ= (1- ρ )

(1- ρm+2)

Эта формула справедлива для всех р, отличных от 1, если же р = 1, то р0 = 1/(т + 2), а все остальные вероятности также равны 1/(т + 2). Если предположить т = 0, то мы переходим от рассмотрения одноканальной СМО с ожиданием к уже рассмотренной одноканальной СМО с отказами в обслуживании. Действительно, выражение для предельной вероятности р0 в случае т = 0 имеет вид:

pо = μ / (λ+μ)

И в случае λ = μ имеет величину р0 = 1 / 2.

Определим основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием: относительную и абсолютную пропускную способность, вероятность отказа, а также среднюю длину очереди и среднее время ожидания заявки в очереди.

Заявка получает отказ, если она поступает в момент времени, когда СМО уже находится в состоянии Sm+1 и, следовательно, все места в очереди да заняты и один канал обслуживает Поэтому вероятность отказа определяется вероятностью появлением

Состояния Sm+1:

Pотк = pm+1 = ρm+1 \* p0

Относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, поступающих в единицу времени, определяется выражением

Q = 1- pотк = 1- ρm+1 \* p0

абсолютная пропускная способность равна:

A = Q \* λ

Среднее число заявок Lоч стоящих в очереди на обслуживание, определяется математическим ожиданием случайной величины к - числа заявок, стоящих в очереди

Lоч-= M(k).

случайная величина к принимает следующие только целочисленные значения:

1 - в очереди стоит одна заявка,

2 - в очереди две заявки,

т-в очереди все места заняты

Вероятности этих значений определяются соответствующими вероятностями состояний, начиная с состояния S2. Закон распределения дискретной случайной величины к изображается следующим образом:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 1 | 2 |  | m |
| pi | p2 | p3 |  | pm+1 |

Математическое ожидание этой случайной величины равно:

Lоч = 1\* p2 +2\* p3 +...+ m\* pm+1

В общем случае при p ≠1 эту сумму можно преобразовать, пользуясь моделями геометрической прогрессии, к более удобному виду:

Lоч = p2 \* 1- pm \* (m-m\*p+1) \* p0

( 1- p )2

В частном случае при р = 1, когда все вероятности pk оказываются равными, можно воспользоваться выражением для суммы членов числового ряда

1+2+3+ m = m(m+1)

2

Тогда получим формулу

L’оч = m(m+1) \* p0 = m(m+1) (p=1).

2 2(m+1)

Применяя аналогичные рассуждения и преобразования, можно показать, что среднее время ожидания обслуживания заявки а очереди определяется формулами Литтла

Точ = Lоч/А (при р ≠ 1) и Т1оч = L’оч /А(при р = 1).

Такой результат, когда оказывается, что Точ ~ 1/ λ, может показаться странным: с увеличением интенсивности потока заявок как будто бы должна возрастать длина очереди и уменьшается среднее время ожидания. Однако следует иметь в виду, что, во-первых, величина Lоч является функцией от λ и μ и, во-вторых, рассматриваемая СМО имеет ограниченную длину очереди не более m заявок.

Заявка, поступившая в СМО в момент времени, когда все каналы заняты, получает отказ, и, следовательно, время ее «ожидания» в СМО равно нулю. Это приводит в общем случае (при р ≠ 1) к уменьшению Точ ростом λ, поскольку доля таких заявок с ростом λ увеличивается.

Если отказаться от ограничения на длину очереди, т.е. устремить m —> →∞, то случаи р < 1 и р ≥1 начинают существенно различаться. Записанные выше формулы для вероятностей состояний преобразуются в случае р < 1 к виду

р0=1-р

р1 =р\*(1-р)

p2=p2(1-p)

pk=рk \*(1 - р)

При достаточно большом к вероятность pk стремится к нулю. Поэтому относительная пропускная способность будет Q = 1, а абсолютная пропускная способность станет равной А —λ Q — λ следовательно, обслуживаются все поступившие заявки, причем средняя длина очереди окажется равной:

Lоч = p2 1-p

а среднее время ожидания по формуле Литтла

Точ = Lоч/А

В пределе р << 1 получаем Точ = ρ / μ т.е. среднее время ожидания быстро уменьшается с увеличением интенсивности потока обслуживания. В противном случае при р ≥ 1 оказывается, что в СМО отсутствует установившийся режим. Обслуживание не успевает за потоком заявок, и очередь неограниченно растет со временем (при t → ∞). Предельные вероятности состояний поэтому не могут быть определены: при Q = 1 они равны нулю. Фактически СМО не выполняет своих функций, поскольку она не в состоянии обслужить все поступающие заявки. Нетрудно определить, что доля обслуживаемых заявок и абсолютная пропускная способность соответственно составляют в среднем ρ и μ, однако неограниченное увеличение очереди, а следовательно, и времени ожидания в ней приводит к тому, что через некоторое время заявки начинают накапливаться в очереди на неограниченно долгое время.

В качестве одной из характеристик СМО используют среднее время Тсмо пребывания заявки в СМО, включающее среднее время пребывания в очереди и среднее время обслуживания. Эта величина вычисляется по формулам Литтла: если длина очереди ограничена — среднее число заявок, находящихся в очереди, равно:

Lсмо= m+1 ;2

Тсмо= Lсмо; при p ≠1

A тогда среднее время пребывания заявки в системе массового обслуживания (как в очереди, так и под обслуживанием) равно:

Тсмо= m+1 при p ≠1 2μ

**3.5 Одноканальная СМО с неограниченной очередью**

В коммерческой деятельности в качестве одноканальной СМО с неограниченным ожиданием является, например, коммерческий директор, поскольку он, как правило, вынужден выполнять обслуживание заявок различной природы: документы, переговоры по телефону, встречи и беседы с подчиненными, представителями налоговой инспекции, милиции, товароведами, маркетологами, поставщиками продукции и решать задачи в товарно-финансовой сфере с высокой степенью финансовой ответственности, что связано с обязательным выполнением запросов, которые ожидают иногда нетерпеливо выполнения своих требований, а ошибки неправильного обслуживания, как правило, экономически весьма ощутимы.

В то же время товары, завезенные для продажи (обслуживания), находясь на складе, образуют очередь на обслуживание (продажу).

Длину очереди составляет количество товаров, предназначенных для продажи. В этой ситуации продавцы выступают в роли каналов, обслуживающих товары. Если количество товаров, предназначенных для продажи, велико, то в этом случае мы имеем дело с типичным случаем СМО с ожиданием.

Рассмотрим простейшую одноканальную СМО с ожиданием обслуживания, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ и интенсивностью обслуживания µ.

Причем заявка, поступившая в момент, когда канал занят обслуживанием, ставится в очередь и ожидает обслуживания.

Размеченный граф состояний такой системы приведен на рис. 3.5

Количество возможных состояний ее бесконечно:

- канал свободен, очереди нет, ;



- канал занят обслуживанием, очереди нет, ;



- канал занят, одна заявка в очереди, ;



- канал занят , заявка в очереди.



Модели оценки вероятности состояний СМО с неограниченной очередью можно получить из формул, выделенных для СМО с неограниченной очередью, путем перехода к пределу при m→∞:



Рис. 3.5 Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью.



Следует заметить, что для СМО с ограниченной длиной очереди в формуле



имеет место геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем . Такая последовательность представляет собой сумму бесконечного числа членов при . Эта сумма сходится, если прогрессия, бесконечно убывающая при , что определяет установившийся режим работы СМО, с при очередь при с течением времени может расти до бесконечности.



Поскольку в рассматриваемой СМО ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому , следовательно, относительная пропускная способность , соответственно , а абсолютная пропускная способность



.



Вероятность пребывания в очереди k заявок равна:

;



Среднее число заявок в очереди –

;



Среднее число заявок в системе –

;



Среднее время пребывания заявки в системе –

;



Среднее время пребывания заявки с системе –

.



Если в одноканальной СМО с ожиданием интенсивность поступления заявок больше интенсивности обслуживания , то очередь будет постоянно увеличиваться. В связи с этим наибольший интерес представляет анализ устойчивых СМО, работающих в стационарном режиме при .



**3.6 Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди**

Рассмотрим многоканальную СМО , на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью , а интенсивность обслуживания каждого канала составляет , максимально возможное число мест в очереди ограничено величиной m. Дискретные состояния СМО определяются количеством заявок, поступивших в систему, которые можно записать.



- все каналы свободны, ;



- занят только один канал (любой), ;



- заняты только два канала (любых), ;



- заняты все каналов, .



Пока СМО находится в любом из этих состояний, очереди нет. После того как заняты все каналы обслуживания, последующие заявки образуют очередь, тем самым, определяя дальнейшие состояние системы:

- заняты все каналов и одна заявка стоит в очереди,



;



- заняты все каналов и две заявки стоят в очереди,



;



- заняты все каналов и все мест в очереди,



.



Граф состояний n-канальной СМО с очередью, ограниченной m местами на рис.3.6



Рис. 3.6 Граф состояний n-канальной СМО с ограничением на длину очереди m

Переход СМО в состояние с большими номерами определяется потоком поступающих заявок с интенсивностью , тогда как по условию в обслуживании этих заявок принимают участие одинаковых каналов с интенсивностью потока обслуживания равного для каждого канала. При этом полная интенсивность потока обслуживания возрастает с подключением новых каналов вплоть до такого состояния , когда все n каналов окажутся занятыми. С появлением очереди интенсивность обслуживания более увеличивается, так как она уже достигла максимального значения, равного .



Запишем выражения для предельных вероятностей состояний:



.



Выражение для можно преобразовать, используя формулу геометрической прогрессии для суммы членов со знаменателем :



Образование очереди возможно, когда вновь поступившая заявка застанет в системе не менее требований, т.е. когда в системе будет находиться требований. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что все каналы заняты, равна сумме соответствующих вероятностей Поэтому вероятность образования очереди равна:



Вероятность отказа в обслуживании наступает тогда, когда все каналов и все мест в очереди заняты:



Относительная пропускная способность будет равна:



Абсолютная пропускная способность –



Среднее число занятых каналов –



Среднее число простаивающих каналов –



Коэффициент занятости (использования) каналов –



Коэффициент простоя каналов –



Среднее число заявок, находящихся в очередях –



В случае если , эта формула принимает другой вид –



Среднее время ожидания в очереди определяется формулами Литтла –



Среднее время пребывания заявки в СМО, как и для одноканальной СМО, больше среднего времени ожидания в очереди на среднее время обслуживания, равное , поскольку заявка всегда обслуживается только одним каналом:



**3.7 Многоканальная СМО с неограниченной очередью**

Рассмотрим многоканальную СМО с ожиданием и неограниченной длиной очереди, на которую поступает поток заявок с интенсивностью и которая имеет интенсивность обслуживания каждого канала . Размеченный граф состояний представлен на рис 3.7 Он имеет бесконечное число состояний:



S - все каналы свободны, k=0;



S - занят один канал, остальные свободны, k=1;



S - заняты два канала, остальные свободны, k=2;



S - заняты все n каналов, k=n, очереди нет;



S - заняты все n каналов, одна заявка в очереди, k=n+1,



S - заняты все n каналов, r заявок в очереди, k=n+r,



Вероятности состояний получим из формул для многоканальной СМО с ограниченной очередью при переходе к пределу при m. Следует заметить, что сумма геометрической прогрессии в выражении для p расходится при уровне загрузки p/n>1, очередь будет бесконечно возрастать, а при p/n<1 ряд сходится, что определяет установившийся стационарный режим работы СМО.



Очереди нет

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | … |  |  |  | … |  |  |

Рис.3.7 Размеченный граф состояний многоканальной СМО

с неограниченной очередью

для которого и определим выражения для предельных вероятностей состояний:



…;



Поскольку отказа в обслуживании в таких системах не может быть, то характеристики пропускной способности равны:



среднее число заявок в очереди –



среднее время ожидания в очереди –



среднее число заявок в СМО –



Вероятность того, что СМО находится в состоянии , когда нет заявок и не занято ни одного канала, определяется выражением



Эта вероятность определяет среднюю долю времени простоя канала обслуживания. Вероятность занятости обслуживанием k заявок –



На этом основании можно определить вероятность, или долю времени занятости всех каналов обслуживанием



Если же все каналы уже заняты обслуживанием, то вероятность состояния определяется выражением



Вероятность оказаться в очереди равна вероятности застать все каналы уже занятыми обслуживанием



Среднее число заявок, находящихся в очереди и ожидающих обслуживания, равно:



Среднее время ожидания заявки в очереди по формуле Литтла: и в системе



среднее число занятых каналов обслуживанием:

;



среднее число свободных каналов:

;



коэффициент занятости каналов обслуживанием:



Важно заметить, что параметр характеризует степень согласования входного потока, например покупателей в магазине с интенсивностью потока обслуживания. Процесс обслуживания будет стабилен при Если же в системе будут возрастать средняя длина очереди и среднее время ожидания покупателями начала обслуживания и, следовательно, СМО будет работать неустойчиво.



**3.8 Анализ системы массового обслуживания супермаркета**

Одной из важных задач коммерческой деятельности является рациональная организация торгово-технологического процесса массового обслуживания, например в универсаме. В частности, определение мощности кассового узла торгового предприятия является непростой задачей. Такие экономико-организационные показатели, как нагрузка товарооборота на 1м2 торговой площади, пропускная способность предприятия, время пребывания покупателей в магазине, а также показатели уровня технологического решения торгового зала: соотношение площадей зон самообслуживания и расчетного узла, коэффициенты установочной и выставочной площадей, во многом определяются пропускной способностью кассового узла. В этом случае пропускную способность двух зон (фаз) обслуживания: зоны самообслуживания и зоны расчетного узла (рис.4.1).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | СМО |  | СМО |  |

- интенсивность входного потока покупателей;



- интенсивность прихода покупателей зоны самообслуживания;



- интенсивность прихода покупателей в расчетный узел;



- интенсивность потока обслуживания.



Рис.4.1. Модель двухфазной СМО торгового зала универсама

Основная функция расчетного узла состоит в обеспечении высокой пропускной способности покупателей в торговом зале и создании комфортного обслуживания покупателей. Факторы, влияющие на пропускную способность расчетного узла, можно разделить на две группы:

1) экономико-организационные факторы: система материальной ответственности в универсаме; средняя стоимость и структура одной покупки;

2) организационная структура кассового узла;

3) технико-технологические факторы: применяемые типы кассовых аппаратов и кассовых кабин; применяемая контролером-кассиром технология обслуживания покупателей; соответствие мощности кассового узла интенсивности покупательских потоков.

Из перечисленных групп факторов наибольшее влияние оказывают организационное построение кассового узла и соответствие мощности кассового узла интенсивности покупательских потоков.

Рассмотрим обе фазы системы обслуживания:

1. выбор покупателями товаров в зоне самообслуживания;

2) обслуживание покупателей в зоне расчетного узла. Входящий поток покупателей попадает в фазу самообслуживания, и покупатель самостоятельно отбирает нужные ему товарные единицы, формируя их в единую покупку. Причем время этой фазы зависит от того, как взаиморазмещены товарные зоны, какой фронт они имеют, сколько времени тратит покупатель на выбор конкретного товара, какова структура покупки и т.д.

Выходящий поток покупателей из зоны самообслуживания одновременно является входящим потоком в зону кассового узла, который последовательно включает ожидание покупателя в очереди и затем обслуживание его контролером-кассиром. Кассовый узел можно рассматривать как систему обслуживания с потерями или как систему обслуживания с ожиданием.



Однако ни первая, ни вторая рассмотренные системы не позволяют реально описать процесс обслуживания в кассовом узле универсама по следующим причинам:

в первом варианте кассовый узел, мощность которого будет рассчитана на систему с потерями, требует значительных как капитальных вложений, так и текущих затрат на содержание контролеров-кассиров;

во втором варианте кассовый узел, мощность которого будет рассчитана на систему с ожиданиями, приводит к большим затратам времени покупателей в ожидании обслуживания. При этом в часы пик зона расчетного узла «переполняется» и очередь покупателей «перетекает» в зону самообслуживания, что нарушает нормальные условия для выбора товара другими покупателями.

В связи с этим целесообразно рассматривать вторую фазу обслуживания как систему с ограниченной очереди, промежуточную между системой с ожиданием и системой с потерями. При этом предполагается, что одновременно в системе могут находиться не более L, причем L=n+m, где n-количество обслуживаемых клиентов в кассах, m-количество покупателей, стоящих в очереди, причем любая m+1- заявка покидает систему необслуженной.

Это условие позволяет, с одной стороны, ограничить площадь зоны расчетного узла с учетом максимально допустимой длины очереди, а с другой – ввести ограничение на время ожидания покупателями обслуживания в кассовом узле, т.е. учитывать издержки потребления покупателей.

Правомерность постановки задачи в таком виде подтверждается проведенными обследованиями потоков покупателей в универсамах, результаты которых приведены в табл. 4.1, анализ которых выявил тесную связь между средней длинной очереди в кассовом узле и количеством покупателей, не совершивших покупок.

Табл.4.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Часы работы | День недели | | | | | | | | |
| пятница | | | суббота | | | воскресенье | | |
| оче-редь, | количество  покупателей  без покупок | | оче-редь, | количество  покупателей  без покупок | | оче-редь, | количество  покупателей  без покупок | |
| чел. | % | чел. | % | чел. | % |
| с 9 до 10 | 2 | 38 | 5 | 5 | 60 | 5,4 | 7 | 64 | 4,2 |
| с 10 до 11 | 3 | 44 | 5,3 | 5 | 67 | 5 | 6 | 62 | 3,7 |
| с 11 до 12 | 3 | 54 | 6,5 | 4 | 60 | 5,8 | 7 | 121 | 8,8 |
| с 12 до 13 | 2 | 43 | 4,9 | 4 | 63 | 5,5 | 8 | 156 | 10 |
| с 14 до 15 | 2 | 48 | 5,5 | 6 | 79 | 6,7 | 7 | 125 | 6,5 |
| с 15 до 16 | 3 | 61 | 7,3 | 6 | 97 | 6,4 | 5 | 85 | 7,2 |
| с 16 до 17 | 4 | 77 | 7,1 | 8 | 140 | 9,7 | 5 | 76 | 6 |
| с 17 до 18 | 5 | 91 | 6,8 | 7 | 92 | 8,4 | 4 | 83 | 7,2 |
| с 18 до 19 | 5 | 130 | 7,3 | 6 | 88 | 5,9 | 7 | 132 | 8 |
| с 19 до 20 | 6 | 105 | 7,6 | 6 | 77 | 6 |  |  |  |
| с 20 до 21 | 6 | 58 | 7 | 5 | 39 | 4,4 |  |  |  |
| Итого |  | 749 | 6,5 |  | 862 | 6,3 |  | 904 | 4,5 |

В организации работы кассового узла универсама имеется еще одна важная особенность, которая значительно влияет на его пропускную способность: наличие экспресс-касс (одной-двух покупок). Изучение структуры потока покупателей в универсамах по типу кассового обслуживания показывает, что поток оборот составляет 12,9% (табл. 4.2).

Табл. 4.2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дни недели | Потоки покупателей | | | Товарооборот | | |
| всего | по экспресс-кассам | % к дневномупотоку | всего | по экспресс-кассам | % к дневному товарообороту |
| Летний период | | | | | | |
| Понедельник | 11182 | 3856 | 34,5 | 39669,2 | 3128,39 | 7,9 |
| Вторник | 10207 | 1627 | 15,9 | 38526,6 | 1842,25 | 4,8 |
| Среда | 10175 | 2435 | 24 | 33945 | 2047,37 | 6 |
| Четверг | 10318 | 2202 | 21,3 | 36355,6 | 1778,9 | 4,9 |
| Пятница | 11377 | 2469 | 21,7 | 43250,9 | 5572,46 | 12,9 |
| Суббота | 10962 | 1561 | 14,2 | 39873 | 1307,62 | 3,3 |
| Воскресенье | 10894 | 2043 | 18,8 | 35237,6 | 1883,38 | 5,1 |
| Зимний период | | | | | | |
| Понедельник | 10269 | 1857 | 18,1 | 37121,6 | 2429,73 | 6,5 |
| Вторник | 10784 | 1665 | 15,4 | 38460,9 | 1950,41 | 5,1 |
| Среда | 11167 | 3729 | 33,4 | 39440,3 | 4912,99 | 12,49,4 |
| Четверг | 11521 | 2451 | 21,3 | 40000,7 | 3764,58 | 9,4 |
| Пятница | 11485 | 1878 | 16,4 | 43669,5 | 2900,73 | 6,6 |
| Суббота | 13689 | 2498 | 18,2 | 52336,9 | 4752,77 | 9,1 |
| Воскресенье | 13436 | 4471 | 33,3 | 47679,9 | 6051,93 | 12,7 |

Для окончательного построение математической модели процесса обслуживания с учетом перечисленных выше факторов необходимо определить функции распределения случайных величин, а также случайные процессы, описывающие входящие и выходящие потоки покупателей:

1) функцию распределения времени покупателей на выбор товаров в зоне самообслуживания;

2) функцию распределения времени работы контролера-кассира для обычных касс и экспресс-касс;

3) случайный процесс, описывающий входящий поток покупателей в первую фазу обслуживания;

4) случайный процесс, описывающий входящий поток во вторую фазу обслуживания для обычных касс и экспресс-касс.

Моделями для расчета характеристик системы массового обслуживания удобно пользоваться в том случае, если входящий поток требований в систему обслуживания является простейшим пуассоновским потоком, а время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону.

Исследование потока покупателей в зоне кассового узла показало, что для него может быть принят пуассоновский поток.

Функция распределения времени обслуживания покупателей контролерами-кассирами является экспоненциальной, такое допущение не приводит к большим ошибкам.

Безусловный интерес представляет анализ характеристик обслуживания потока покупателей в кассовом узле универсама, рассчитанных для трех систем: с потерями, с ожиданием и смешанного типа.

Расчеты параметров процесса обслуживания покупателей в кассовом узле проведены для коммерческого предприятия торговой площадью S=650на основе следующих данных.



Целевая функция может быть записана в общем виде связи (критерия) выручки от реализации от характеристик СМО:

B=f max,



где - кассовый узел состоит из =7 касс обычного типа и =2 экспресс-касс,



всего n=9;

- интенсивность обслуживания покупателей в зоне обычных касс – 0,823 чел./мин;



- интенсивность нагрузки кассовых аппаратов в зоне обычных касс – 6,65,



- интенсивность обслуживания покупателей в зоне экспресс-касс – 2,18 чел./мин;



- интенсивность входящего потока в зону обычных касс – 5,47 чел./мин



- интенсивность нагрузки кассовых аппаратов в зоне экспресс-касс – 1,63,



- интенсивность входящего потока в зону экспресс-касс – 3,55 чел./мин;



- для модели СМО с ограничением на длину очереди в соответствии с проектируемой зоной кассового узла максимально допустимое число покупателей, стоящих в очереди в одну кассу, принимается равным m=10 покупателей.



Следует заметить, что для получения сравнительно небольших по абсолютной величине значений вероятности потерь заявок и времени ожидания покупателей в кассовом узле необходимо соблюдать следующие условия:



В табл.6.6.3 приведены результаты характеристик качества функционирования СМО в зоне расчетного узла.

Расчеты проведены для наиболее напряженного периода времени рабочего дня с 17 до 21 часа. Именно на этот период, как показали результаты обследований, приходится около 50% однодневного потока покупателей.

Из приведенных данных в табл. 4.3 следует, что если бы для расчета была выбрана:

1. модель с отказами, то 22,6% потока покупателей, обслуживаемых обычными кассами, и соответственно 33,6% потока покупателей, обслуживаемых экспресс-кассами, должны были бы уйти без покупок;
2. модель с ожиданием, то потерь заявок в расчетном узле не должно бы быть;

Табл. 4.3 Характеристики системы массового обслуживания покупателей в зоне расчетного узла

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип кассы | Количество касс в узле | Тип СМО | Характеристики СМО | | |
| Среднее число занятых касс, | среднее время ожидания обслуживания, | Вероятность потери заявок, |
| Обычные кассы | 7 | с отказами  с ожиданием  с ограничением  на длину  очереди | 5,15  6,65  6,7 | 0  3  2,66 | 0,226  0  0,0012 |
| Экспресс-кассы | 2 | с отказами  с ожиданием  с ограничением  на длину  очереди | 1,08  1,17  1,6 | 0  0,91  0,84 | 0,336  0  0,018 |

1. модель с ограничением на длину очереди, то только 0,12% потока покупателей, обслуживаемых обычными кассами, и 1,8% потока покупателей, обслуживаемых экспресс-кассами, покинут торговый зал без покупок. Следовательно, модель с ограничением на длину очереди позволяет более точно и реально описать процесс обслуживания покупателей в зоне кассового узла.

Интерес представляет сравнительный расчет мощности кассового узла как с учетом экспресс-касс, так и без них. В табл. 4.4 приведены характеристики системы обслуживания кассового узла трех типоразмеров универсамов, рассчитанные по моделям для СМО с ограничением на длину очереди на наиболее напряженный период рабочего дня с 17 до 21 часа.

Анализ данных этой таблицы показывает, что не учет фактора «Структура потока покупателей по типу кассового обслуживания» на стадии технологического проектирования может привести к увеличению зоны расчетного узла на 22-33%, а отсюда соответственно и к уменьшению установочных и выставочных площадей торгово-технологического оборудования и товарной массы, размещаемой в торговом зале.

Проблема определения мощности кассового узла представляет собой цепочку взаимосвязанных характеристик. Так, увеличение его мощности сокращает время покупателей на ожидание обслуживания, уменьшает вероятность потери требований и, следовательно, потери товарооборота. Наряду с этим необходимо соответственно уменьшить зону самообслуживания, фронт торгово-технологического оборудования, товарную массу в торговом зале. В то же время увеличивается затраты на заработную плату контролеров-кассиров и оборудование дополнительных рабочих мест. Поэтому

Табл. 4.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Характеристики СМО | Единица измерения | Обозначение | | Показатели, рассчитанные по типам универсамов торговой площади, кв. м | | | | | | | | | | | | | | |
| Без экспресс-касс | | | | | | С учетом экспресс-касс | | | | | | | | |
| 650 | | 1000 | | 2000 | | 650 | | | 1000 | | | 2000 | | |
| Обычные кассы | | Экспресс-кассы | Обычные кассы | | экспресс-кассы | Обычные кассы | | экспресс-кассы |
| 1 | Количество покупателей | чел. | k | | 2310 | | 3340 | | 6680 | | 1460 | | 850 | 2040 | | 1300 | 4080 | | 2600 |
| 2 | Интенсивность входящего потока | чел./  мин | λ | | 9,64 | | 13,9 | | 27,9 | | 6,08 | | 3,55 | 8,55 | | 5,41 | 17,1 | | 10,8 |
| 3 | Интенсивность обслуживания | чел./мин | μ | | 0,823 | | 0,823 | | 0,823 | | 0,823 | | 2,18 | 0,823 | | 2,18 | 0,823 | | 2,18 |
| 4 | Интенсивность нагрузки | - | ρ | | 11,7 | | 16,95 | | 33,8 | | 6,65 | | 1,63 | 10,35 | | 2,48 | 20,7 | | 4,95 |
| 5 | Количество кассовых аппаратов | шт. | n | | 12 | | 17 | | 34 | | 7 | | 2 | 11 | | 3 | 21 | | 5 |
| 6 | Общее количество касс расчетного узла | шт. | | ∑n | | 12 | | 17 | | 34 | | 9 | | | 14 | | | 26 | | |

необходимо проводить оптимизационные расчеты. Рассмотрим характеристики системы обслуживания в кассовом узле универсама торговой площади 650м, рассчитанные по моделям СМО с ограниченной длиной очереди для различных мощностей его кассового узла в табл. 4.5.



На основе анализа данных табл. 4.5 можно сделать вывод, что по мере увеличения количества касс время ожидания покупателей в очереди растет, а затем после определенного момента резко падает. Характер изменения графика времени ожидания покупателей понятен, если параллельно рассматривать изменение вероятности потери требования Вполне очевидно, что когда мощность кассового узла чрезмерно мала, то более 85% покупателей будут уходить необслуженными, а оставшаяся часть покупателей будет обслужена за очень короткое время. Чем больше мощность кассового узла, тем вероятность потери требований будет дожидаться своего обслуживания, а значит, и время их ожидания в очереди соответственно будет расти. После того как ожидания и вероятность потерь будут резко уменьшаться.



Для универсама торговой площадью 650 этот предел для зоны обычных касс лежит между 6 и 7 кассовыми аппаратами. При 7 кассовых аппаратах соответственно среднее время ожидания – 2,66 мин, а вероятность потери заявок очень мала – 0,1%. Таким образом, которая позволит получить минимальные совокупные затраты на массовое обслуживание покупателей.



В связи с этим следующим этапом решения поставленной задачи является оптимизация мощности кассового узла на базе применения моделей СМО разных типов с учетом совокупных затрат и перечисленных выше факторов.

Табл. 4.5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип кассового обслуживания | Количество кассовых аппаратов в узле n, шт. | Характеристики системы обслуживания | | Средняя выручка за 1 ч. руб. | Средняя потеря выручки за 1 ч. руб | Число покупателей в зоне расчетного узла | Площадь зоны расчетного узла, Sy, м | Удель ный вес площади зоны узла 650/ Sy |
| Среднее время ожидания, Т,мин | Вероятность потери заявок |
| Зоны Обычных касс | 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | 1,79  3,58  5,33  7,08  8,58  9,29  2,66  0,48  0,16  0,06 | 0,85  0,7  0,55  0,4  0,25  0,1  0,001  0  0  0 | 205  415  623  831  1039  1371,1  1384,8  1385  1385  1385 | 1180  970  760  554  346  13,9  0,13  0  0  0 | 90  360  800  1420  2150  2880  890  267  53,5  20 | 15  30  45  60  75  90  105  120  135  150 | 0,023  0,046  0,069  0,1  0,12  0,14  0,17  0,19  0,21  0,23 |
| Зоны экспресс-касс | 1  2  3 | 2,38  0,84  0,1 | 0,39  0,002  0 | 117  188  192 | 75  3,8  0 | 260  179  21,3 | 15  30  45 | 0,02  0,05  0,07 |

**Заключение**

На основе анализа данных табл. 4.5 можно сделать вывод, что по мере увеличения количество касс время ожидания покупателей в очереди растет. А затем после определенного момента резко падает. Характер изменения графика времени ожидания покупателей понятен, если параллельно рассматривать изменение вероятности потери требований Вполне очевидно, что когда мощность кассового узла чрезмерно мала, то более 85% покупателей будут уходить необслуженными, а оставшаяся часть покупателей будет обслужена за очень короткое время. Чем больше мощность кассового узла. Тем вероятность потери требований будет уменьшаться и соответственно тем большее число покупателей будет дожидаться своего обслуживания, а значит, и время их ожидания в очереди соответственно будет расти. После того как расчетный узел превысит оптимальный мощность, время ожидания и вероятность потерь будут резко уменьшаться.



Для универсама торговой площадью 650 кв. метров этот предел для зоны обычных касс лежит между 6-8 кассовыми аппаратами. При 7 кассовых аппаратах соответственно среднее время ожидания- 2,66 мин , а вероятность потери заявок очень мало - 0,1 % . Таким образом, задача состоит в выборе такой мощности кассового узла, которая позволит получит минимальные совокупные затраты на массовое обслуживание покупателей.

В связи с этим следующим этапом решения поставленной задачи является оптимизация мощности кассового узла на базе применения моделей СМО разных типов с учетом совокупных затрат и перечисленных выше факторов.