Министерство образования и науки республики Казахстан

Северо-Казахстанский государственный университет

им. М. Козыбаева

Факультет информационных технологий

Кафедра математики

Курсовая работа

"Некоторые интерполяционные свойства конечномерных сетевых пространств и пространств Лоренца"

Петропавловск, 2007

Аннотация

В данной курсовой работе исследованы свойства некоторых семейств конечномерных пространств и доказаны интерполяционные теоремы для этих классов пространств.

Содержание

Введение

1. Основные понятия и некоторые классические теоремы теории интерполяции

2. Общие свойства интерполяционных пространств

3. О норме и спектральном радиусе неотрицательных матриц

4. Некоторые интерполяционные свойства семейств конечномерных пространств

Заключение

Список использованной литературы

Введение

Теория интерполяции функциональных пространств как самостоятельная ветвь функционального анализа сформировалась за последние 40-45 лет. Она играет все возрастающую роль в анализе и его приложениях. Центральной темой теории является проблема интерполяции линейных операторов. Эта проблема тесно связана с задачей построения совокупности "промежуточных" пространств – арены, на которой действуют "промежуточные" операторы. Основополагающий вклад в теорию был сделан Эл.-Л. Лионсом, А.П. Кальдероном и С.Г. Крейном. При этом не следует, конечно, забывать, что исследованием названных авторов предшествовали (и стимулировали их) классические теоремы Рисса и Марцинкевича об интерполяции линейных операторов в пространствах lp.

Теория интерполяция также применяется в других областях анализа (например, в теории уравнений с частными производными, численном анализе, теории аппроксимации). Рассматривают два существенно различных интерполяционных метода: метод вещественной интерполяции и метод комплексной интерполяции. Модельными примерами для этих методов служат доказательства теоремы Марцинкевича и теоремы Рисса-Торина соответственно. Один из самых ранних примеров интерполяции линейных операторов был предложен Шуром. Шур сформулировал свой результат для билинейных форм, или вернее для матриц, соответствующих этим формам. В 1926 году М. Рисс доказал первую версию теоремы Рисса-Торина с ограничением p≤q, которое как он показал, существенно в случае, когда в качестве скаляров берутся вещественные числа. Основным рабочим инструментом Рисса было неравенство Гельдера. Но в 1938 году Торин привел совершенно новое доказательство и смог устранить ограничение p≤q. В то время как Рисс пользовался вещественными скалярами и неравенством Гельдера, Торин использовал комплексные скаляры и принцип максимума.

1. Основные понятия и некоторые классические теоремы теории интерполяции

Пусть (u,μ) – пространство с мерой μ, которую будем всегда предполагать положительной. Две рассматриваемые функции будем считать равными, если они отличаются друг от друга лишь на множестве нулевой μ-меры. При этом обозначим через lp(u,dμ) или просто (lp(dμ), lp(u) или lp) лебегово пространство всех скалярнозначных μ-измерных функций f и u, для которых величина



конечна, здесь 1≤p<∞.

В случае, когда p=∞, пространство lp состоит из всех μ-измеримых ограниченных функций. В этом случае



Пусть T - линейное отображение пространства lp=lp(u,dμ) в пространство lq=lq(v,dν). Это означает, что T(αf+βg)=αT(f)+βT(g).

Если к тому же T- ограниченное отображение, то есть если величина конечна, то пишут T: lp→lq.



Число μ называется нормой отображения T. Справедливы следующие известные теоремы:

Теорема 1.1 (интерполяционная теорема Рисса-Торина)

Предположим, что и что T: с нормой μ0 и T : с нормой μ1.



Тогда T: → с нормой μ, удовлетворяющей неравенству (\*), при условии, что 0<θ<1 и ; .



Неравенство (\*) означает, что μ как функция от θ логарифмически выпукла, то есть lnμ – выпуклая функция.

Доказательство теоремы приведено в [1].

Для скалярнозначной μ-измерной функции f, принимающей почти всюду конечные значения, введем функцию распределения m(σ,f) по формуле



Ясно, что m(σ,f) представляет собой вещественнозначную функцию от σ, определенную на положительной вещественной полуоси . Очевидно, что m(σ,f) – невозрастающая и непрерывная справа функция. Кроме того,



при 1≤p<∞



и .



Используя функцию распределения m(σ,f), введем теперь слабые lp-пространства, обозначаемые через . Пространства , 1≤p<∞, состоит из всех функций f , таких что



В предельном случае p=∞, положим .



Заметим, что не является нормой при 1≤p<∞.



Действительно, ясно, что



Применяя неравенство , заключаем, что



Последнее означает, что представляет собой так называемое квазинормированное векторное пространство. (В отличие от нормированных пространств, где выполняются неравенство треугольника , в квазинормированных пространствах имеет место лишь "квази-неравенство треугольника" для некоторого k≥1.) Однако, при p>1 в пространстве можно ввести норму, при наделении которой оно становится банаховым пространством.



Теорема 1.2 (Интерполяционная теорема Марцинкевича)

Пусть p0≠p1 и

T: с нормой ,



T: с нормой .



Положим ; , и допустим, что p≤q.



Тогда T: →, с нормой μ, удовлетворяющей неравенству .



Эта теорема, напоминает теорему Рисса-Торина, но отличается от нее во многих важных отношениях.

Во-первых, здесь скаляры могут быть как вещественными, так и комплексными, в то время как в теореме Рисса-Торина обязательно нужно, чтобы скаляры были комплексными. Во-вторых здесь имеется ограничение p≤q. Наиболее важная особенность состоит в том, что в предпосылках теоремы пространства и заменены на более широкие пространства и .



Таким образом, теорема Марцинкевича может оказаться применимой в тех случаях, где теорема Рисса-Торина уже не работает.

## 2. Общие свойства интерполяционных пространств

Пусть A - векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел. Оно называется нормированным векторных пространством, если существует вещественнозначная функция (норма) , определенная на A, удовлетворяющая условием.



1) , причем



2) (λ-скаляр)



3) .



Пусть A и B – два нормированных векторных пространства. Отображение T из A в B называется ограниченным линейным оператором, если

, и .



Ясно, что всякий ограниченный линейный оператор непрерывен.

Пусть A0 и A1 – топологических векторных пространства. Говорят, что

A0 и A1 совместимы, если существует отделимое топологическое векторное пространство U, такое, что A0 и A1, являются подпространствами. В этом случае можно образовать сумму A0 + A1, и пересечение A0∩A1. Сумма состоит из всех aU, представимых в виде a=a0+a1, где a0A, и a1A,



Справедлива следующая лемма

Лемма 2.1. Пусть A0 и A1-совместимые нормированные векторные пространства. Тогда

A0∩A1, есть нормированное векторное пространство с нормой



A0 + A1, также представляет собой нормированное векторное пространство с нормой



При этом если A0 и A1 – полные пространства, то A0∩A1 и A0 + A1 также полны.

Дадим некоторые важные определения:

Категория σ состоит из объектов A,B,C…., и морфизмов R,S,T,…. между объектами и морфизмами определено трехместное отношение T: A↷B.

Если T: A↷B и S: B↷C, то существует морфизм ST, называемый произведением (или композицией) морфизмов S и T, такой, что ST: A↷ C.

Операция взятия произведения морфизмов удовлетворяет закону ассоциативности: T(SR)=(TS)R. далее, для всякого объекта A из σ существует морфизм I=IA, такой, что для любого морфизма T: A↷A TI=IT=T

Через σ1 обозначим категорию всех совместимых пар пространств из σ.



Определение 2.1. Пусть =(A0,A1)-заданная пара из σ1. Пространство A из σ будем называть промежуточным между A0 и A1 (или относительно ), если имеют место непрерывные вложения.



.



Если, кроме, того T: ↷ влечет T: A ↷ A, то A называется интерполяционным пространством между A0 и A1.



Более общим образом, пусть и - две пары из σ1. Тогда два пространства A и B из σ называются интерполяционными относительно и соответственно и T: ↷ влечет T: A↷ B.



Если выполнено

,



В этом случае, говорят, что A и B равномерные интерполяционные пространства.

Определение 2.2 Интерполяционные пространства A и B называются пространствами типа θ (0≤θ≤1), если



В случае с=1 говорят, что A и B - точные интерполяционные пространства типа θ.

3. О норме и спектральном радиусе неотрицательных матриц

Хорошо известно, что проблема нахождения нормы линейного оператора, спектрального радиуса оператора являются трудной проблемой и в конечномерном случае. В то же время, иногда важно не вычисляя нормы оператора знать, как она изменится в случае некоторого преобразования.

В данной работе изучается влияние распределения ненулевых элементов неотрицательной матрицы на норму соответствующего оператора и спектрального радиуса.

Определим пространство как множество всех наборов вида



a=(a1, a2,…, aN)

с нормой

.



Множество Q={(k,l):k,l=1,…,N} назовем решеткой размерности N x N. Любое множество Q0={(ki,lj): , } будет являться подрешеткой размерности r x m.



Спектральный радиус линейного оператора в конечномерном пространстве определяется следующим образом:



r(A)=,



где λk- собственные значения оператора A.

Пусть m ≤ N, d1,…,dm - положительные числа. Через Dm обозначим множество неотрицательных матриц А, ненулевые элементы которых принимают значения d1,…,dm. Через P(A) обозначим множество индексов соответствующих положительным элементам. Пусть A∈Dm. Если D={(ki,lj), i=1,…,q, j=1,…,p} подрешетка, содержащая P(A), то для соответствующего оператора А



Как видно из этого определения, от перестановки строк и столбцов матрицы норма не меняется.

Пусть даны положительные числа d1,…,dm и натуральное число m < N2.

Будем исследовать следующие вопросы:

Как расположить числа d1,…,dm в решетке Q, чтобы норма линейного оператора AQ соответствующего решетке (матрице) Q была максимальной?

Пусть в неотрицательной решетке Q m положительных элементов. Как расположить (m+1)-ый элемент, чтобы норма линейного оператора AQ соответствующей полученной решетке была максимальной?

Как расположить числа d1,…,dm в решетке Q, чтобы спектральный радиус был минимальным (максимальным)?

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 3.1 Пусть d1,…,dm положительные числа, Dm - класс неотрицательных матриц, ненулевые элементы которых принимают значения d1,…,dm. Если m ≤ N, Q0 -произвольная подрешетка размерности 1 m, то



.



Доказательство. Воспользуемся определением и неравенством Коши-Буняковского, получаем



Неравенство в обратную сторону очевидно.

Теорема доказана.

Данное утверждение говорит о том, что если ненулевых элементов меньше либо равно N, то своего максимума норма достигается когда все ненулевые элементы расположены в одной строке или в одном столбце.

Теорема 3.2 Пусть d1=…=dm=d, то есть Dm – множество всех матриц, имеющие m ненулевых элементов, которые равны числу d. Q0 -произвольная решетка, симметричная относительно главной диагонали размерности nn, где n=min{r: r2 ≥ m}. Тогда



,



где [m1/2] - целая часть числа m1/2.

Доказательство. Из свойства спектрального радиуса имеем для A∈Dm



.



Пусть Q1 -подрешетка, также симметричная относительно главной диагонали размерности . Тогда для A∈Dm, Q1⊂P(A)⊂Q0 имеет место представление



А=А1+А0, где А1,А0∈Dm, Р(А1)=Q1, P(A0)⊂Q1\Q0.

Учитывая, что матрицы А0 и А1 неотрицательны, получаем

,



поэтому r(A0)≤r(A).

С другой стороны А1 – симметричная матрица и следовательно

.



Таким образом,

.



Теорема доказана.

Теорема 3.3 Пусть множество G⊂Q, где Q - решетка размерности nn таково, что, если (k,l)∈G, то (l,m),(n,k)∉G для всех n,m∈{1,2,…,N}.



Тогда, если P(A)⊂G, то r(P(A))=0.

Доказательство. Не трудно проверить, что для матрицы А с ненулевыми элементами из G (т.е. P(A)⊂G) имеет место равенство А2=0, т.е. А – нильпотентная матрица индекса 2 и следовательно у нее единственное собственное значение 0.

Теорема доказана.

Теорема 3.4 Пусть A∈Dm. Пусть Q0 -минимальная подрешетка содержащая P(A), (Q0⊃P(A)) такая, что в каждой строке и в каждом столбце находится хотя бы один элемент соответствующий нулевому элементу матрицы A.

Пусть Ad – матрица, полученная из матрицы A добавлением элемента со значением d>0 в одно из свободных мест, тогда



Доказательство.

Так как норма оператора не зависит от перестановки строк и столбцов матрицы, то можно считать, что решетка A0={(i,j), i=1,…,l; j=1,…,m} расположена в левом верхнем углу матрицы A. Пусть добавлен еще один ненулевой элемент d с координатами (i0,j0) вне решетки Q0. Возможны три случая:

1. 1 ≤ i0 ≤ l, j0 > m;
2. i0 > l, 1 ≤ j0 ≤ m;
3. i0 > l, j0 > m.

Рассмотрим первый случай. Не уменьшая общности положим, что этот ненулевой элемент соответствует индексу (1, m+1). По условию теоремы в каждой строке и в каждом столбце имеется хотя бы один нулевой элемент и мы можем предположить, что a1m=0. Получаем:



Используя неравенства

,



имеем:



Пусть z1=x1, z2=x2,…,zm= и



,



тогда



где элемент имеет координаты (1,m).



Следовательно



Рассмотрим второй случай. Пусть добавленный ненулевой элемент соответствует индексу (l+1,1). Учитывая, что в каждой строке и в каждом столбце решетки есть хотя бы один ненулевой элемент и то, что от перестановки строк норма матрицы не меняется, мы можем предположить, что al1=0. Аналогично первому случаю имеем:



.



Используя неравенства

,



получаем:

.



Пусть z1=y1, z2=y2,…,zm= и



,



тогда



где элемент имеет координаты (l,1). Следовательно



Рассмотрим последний случай. Не уменьшая общности положим, что этот ненулевой элемент соответствует индексу (l+1, m+1). В этом случае нужно учесть, что от перестановки строк и столбцов норма матрицы не изменится, поэтому можно положить, что alm=0. Рассуждая также, как и в предыдущих случаях, получаем:



где элемент имеет координаты (l,m).



Теорема доказана. Аналогичные задачи для интегральных операторов были рассмотрены в работах [1], [5].

4. Некоторые интерполяционные свойства семейств конечномерных пространств

Пусть 1 ≤ p < ∞, 1 ≤ q ≤ ∞. Определим семейство конечномерных пространств:



где невозрастающая перестановка последовательности . Обозначим через –множество всех непустых подмножеств из {1,2,...N} Пусть M , 1 ≤ p < ∞, 1 ≤ q ≤ ∞, множество M назовем сетью.



Определим семейство конечномерных пространств



|e| - количество элементов множества e.

При q=∞ положим



Данные пространства являются конечномерными аналогами сетевых пространств, введенных в [1].

Будем говорить что {AN} ↪ {BN} если существует константа c, такая что для любого , где c не зависит от .



Лемма 4.1 Пусть 1 ≤ q <q1≤ ∞, 1 ≤ p ≤ ∞, . Тогда имеет место вложение



↪



то есть



где с не зависит от выбора N.

Доказательство. Пусть



(1)



то есть ↪



Теперь рассмотрим случай, когда 1 ≤ q <q1< ∞, и воспользуемся неравенством (1)



Лемма доказана.

Лемма 4.2 Пусть 1≤p<p1<∞, 1≤q,q1≤∞. Тогда имеем место вложение

↪



Доказательство.

Согласно условию леммы, нам достаточно доказать вложения при p < p1 :

↪



Получаем:



Лемма доказана.

Лемма 4.3 Пусть 1<p<∞, 1≤q≤∞, M= . Тогда



Равенства понимаются с точностью до эквивалентности норм, причем константы не зависят от.



Доказательство. Сначала докажем соотношение:

(2)



Заметим, что



Поэтому



Теперь покажем обратное неравенство. Пусть . Учитывая выбор имеем.



~



~



Заметим, что



Согласно (2) получаем:



то есть ↪.



Докажем обратное включение. Пусть Введем следующие обозначения:



Тогда

.



Пусть для определенности

.



Возможны следующие случаи:

.



В первом случае получаем, что



.



Во втором случае , следовательно . Представим , тогда . Здесь и далее - целая часть числа .



Получаем



Заметим, что существует такое, что



Положим Тогда .



.



Таким образом, получаем



Из того, что



Имеем



То есть . Следовательно ↪ где соответствующие константы не зависят от N.



Лемма доказана.

Для пары пространств определим интерполяционные пространства аналогично [5] .



Пусть , тогда



где



При q=∞



Лемма 4.4 Пусть , d>1. Тогда



Справедлива следующая

Теорема 4.1 Пусть ≤p0<p1<∞, 1<q0,q1≤∞, M – произвольная сеть. Тогда

↪



где



Доказательство.

Учитывая, что ↪нам достаточно, доказать следующее вложение



↪



Пусть Рассмотрим произвольное представление a=a0+a1, где



тогда



(3)



Так как представление a=a0+a1 произвольно, то из (3) следует



Где Рассматривая норму элемента в пространстве и применяя



лемму 4.4 , получаем:



Теорема доказана.

Теорема 4.2 Пусть 1≤p0<p1<∞, 1<q0,q1≤∞, Тогда имеет место равенство



Это равенство понимается в смысле эквивалентности норм с константами, не зависящими N.



Доказательство. По теореме 4.1 и того, что является обобщением пространств Лоренца нам достаточно доказать следующее вложение:



↩



.



Определим элементы и следующим образом



, тогда .



Заметим что

(4)



где



(5)



где



Тогда



Из (4) и (5) имеем:



Оценим отдельно каждое из слагаемых последнего равенства, используя неравенство Гельдера:



~



где .



Таким образом, получаем, что Аналогично рассмотрим второе слагаемое:



~



~



~



Таким образом, получаем



где c не зависит от .



Теорема доказана.

Теорема 4.3 Пусть - матрица , тогда



~



Причем соответствующие константы не зависят от



Доказательство.

Воспользуемся эквивалентными представлением нормы и неравенством о перестановках, получим



~



где - невозрастающая перестановка последовательности



Применим неравенство Гельдера



Учитывая лемму 3, имеем



Обратно, пусть e произвольное множество из M1, , где



Тогда



В силу произвольности выбора e из M1 получаем требуемый результат.

Следствие. Пусть - матрица



p0<p1, q0<q1, тогда



Доказательство. Из теоремы 3 следует, что



Воспользуемся интерполяционными теоремами 1,2, получаем



то есть



С другой стороны по лемме 1 и теореме 3 имеем

,



Следствие доказано.

Заключение

В данной курсовой работе приведены и доказаны некоторые свойства конечномерных пространств, а именно пространств Лоренца и сетевых пространств.

Полученные результаты могут быть полезны для студентов, магистрантов, аспирантов и преподавателей. Кроме того, данный материал может быть использован для чтения спецкурсов и спецсеминаров.

Список использованной литературы

1. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
3. Костюченко А.Г., Нурсултанов Е.Д. Об интегральных операторах в пространствах. Фундаментальная и прикладная математика. Т.5. №2, 1999. С. 475-491.
4. Костюченко А.Г., Нурсултанов Е.Д. Теория управления катастрофами. //Успехи математических наук, 1998. Т.53. Выпуск 2.
5. Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди-Литтлвуда //Матем.сборник.-1998.-Т.189, №3.-С.83-102.
6. Таджигитов А.А. О зависимости нормы матрицы от взаимного расположения ее элементов. // Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы теории функций и их приложения", Саратов, Россия, 2004, с. 177-178.
7. Таджигитов А.А. О норме и спектральном радиусе неотрицательных матриц. //Материалы Международной научно-практической конференции "Современные исследования в астрофизике и физико-математических науках", Петропавловск, 2004, с. 104-107.
8. Таджигитов А.А. Интерполяционные свойства конечномерных пространств. //Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов 2005", Астана, 2005, с. 41-42.