МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

КИРОВОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Винниченка

КУРСОВАЯ РАБОТА

по курсу «Математика»

на тему : «Нестандартный анализ»

Кировоград

 2003

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ……………………………………………………………………………3

1. ЛЕЙБНИЦ И “ДРЕВНЯЯ ИСТОРИЯ” НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА ….…4

2. РОБИНСОН И «НОВАЯ ИСТОРИЯ» НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА……...8

3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ…………………………………………….10

4. ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ……………………………………………16

# 5. ПРИМЕР НЕАРХИМЕДОВОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ………………….……..18

6. НОВЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ И ОСНОВНАЯ ГИПОТЕЗА………………………………………………………………21

## 7. СЛЕДСТВИЯ ОСНОВНОЙ ГИПОТЕЗЫ………………………………………….24

8. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ………………27

ЛИТЕРАТУРА………………………………………………………………………..….33

ВСТУПЛЕНИЕ

Нестандартный анализ возник в 1960 году, когда Абрахам Робинсон, специалист по теории моделей, понял, каким образом методы математической

логики позволяют оправдать классиков математического анализа XVII и XVIII вв., поставив на строгую основу их рассуждения, использующие “бесконечно большие” и бесконечно малые величины. Таким образом, речь идет не о каких-то новых “нестандартных” методах, не имеющих ничего общего с традиционной математикой, а о развитии новых средств внутри стандартной (теоретико-множественной) математики.

Нестандартный анализ остался бы любопытным курьезом, если бы единственным его приложением было обоснование рассуждений классиков математического анализа. Он оказался полезным и при развитии новых математических теорий. Нестандартный анализ можно сравнить с мостом, переброшенным через реку. Постройка моста не расширяет доступной нам территории, но сокращает путь с одного берега на другой. Подобным образом нестандартный анализ делает доказательства многих теорем короче.

Однако, быть может, главное значение нестандартного анализа состоит в другом. Язык нестандартного анализа оказался удобным средством построения математических моделей физических явлений. Идеи и методы нестандартного анализа могут стать важной частью будущей физической картины мира. Во всяком случае уже сейчас многие специалисты по математической физике активно используют нестандартный анализ в своей работе.

Нестандартный анализ позволяет с новой точки зрения посмотреть на многие рассуждения классиков математического анализа, кажу­щиеся нестрогими, но приводящие к успеху, и путем относительно небольших уточнений сделать их удовлетво­ряющими современным критериям строгости.

1. ЛЕЙБНИЦ И “ДРЕВНЯЯ ИСТОРИЯ” НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Возраст нестандартного анализа колеблется (в зави­симости от точки зрения) от двух с половиной десятков до трех сотен лет. Два с половиной десятка получится, если считать, что нестандартный анализ зародился осенью 1960 г., когда его основатель, Абрахам Робинсон, сделал доклад на одном нз семинаров Принстонского университета о возможности применения методов мате­матической логики к обоснованию математического ана­лиза. Триста лет получится, если считать началом не­стандартного анлиза появление символов бесконечно малых dx, dy трактате Лейбница “Новый метод”.

Трудно сказать с уверенностью, насколько в действи­тельности Лейбниц был близок к идеям нестандартного анализа. Как пишет сам Робинсон “исто­рия предмета обычно пишется в свете его позднейшего развития. Уже более чем полвека все обзоры истории дифференциального и интегрального исчислений основы­вались на уверенности в том, что понятие бесконечно малых и бесконечно больших, если даже и непротиворе­чиво, бесполезно для развития анализа. В результате в работах этого периода заметно различие между стро­гостью, с которой рассматриваются идеи Лейбница и его последователей, и снисходительностью, проявляемой к провозвестникам идеи предела”. Характерно, например, следующее высказывание Анри Лебега от 3 декабря 1926 г. “Бесконечно малые были когда-то туманными сущностями, встречавшимися в неясных и неточных формулировках. Все разъяснилось впоследствии благо­даря понятию предела”.

Считая, что идеи Лейбница и идеи сторонников поня­тия предельного перехода мерились двойным стандартом при несправедливом склонении весов правосудия в поль­зу предела, Робинсон предлагает во многом пересмотреть общую картину возникновения и развития математиче­ского анализа от Ньютона и Лейбница до Коши и Вейерштрасса. Этот пересмотр приводит к более полному при­знанию заслуг Лейбница, и сам Лейбниц перемещается, таким образом, из разряда гениев третьего класса в раз­ряд гениев второго класса (класси­фикация, предложенная Станиславом Лемом: в этой классификации гении третьего класса получают прижизненное, а гении более высокого класса – лишь посмертное признание).

 Изложим историко-математические взгляды Робинсона. Робинсон резюмирует стандартный взгляд на историю развития математического анализа в следующих словах: “После длительного периода, в течение которого были определены площади, объемы и касательные в различных частных случаях, во второй половине семнадцатого сто­летия Ньютоном и (несколько позже, но независимо) Лейбницем была построена общая теория дифференциро­вания и интегрирования. Касаясь обоснования введенных им понятий, Ньютон обращался то к бесконечно малым, то к пределам, то непосредственно к физической интуи­ции; его непосредственные последователи предпочитали последнее. С другой стороны, Лейбниц и его последова­тели развивали теорию исходя из дифференциалов пер­вого и следующих порядков. Технические удобства обо­значений, использовавших дифференциалы, привели к бы­строму развитию Анализа и его приложений в Европе, где они были приняты. Однако внутренние противоречия этой концепции привели к осознанию того, что необходи­мы какие-то другие основания. Лагранж считал, что ему удалось найти подходящий путь, взяв за основу тейлоровское разложение функции. Но первое строгое обоснование математического анализа было дано лишь Коши. Основой теории Коши было понятие предела, которое, будучи впервые выдвинуто Ньютоном, впоследствии под­держивалось Даламбером. Более формальное изложение методов Коши было дано Вейерштрассом (которого в не­которой степени предвосхитил Больцано). После создания теория пределов использование бесконечно больших и бесконечно малых превратилось в оборот речи, применяе­мый в выражениях типа “... стремится к бесконечности”. Дальнейшее развитие теории неархимедовых полей было целиком предоставлено алгебре.”

Этот стандартный вгляд, но мнению Робинсона, в не­которых отношениях “должен быть дополнен или даже изменен”. В доказательсто этого Робинсон приводит большое количество выдержек из сочинений Лейбница и других упомянутых выше авторов. Как считает Робин­сон, “... отношение Лейбница к бесконечно большим и бесконечно малым величинам в Анализе в основном оставалось неизменным в течение двух последних десяти­летий его жизни. Он полностью одобрял их введение, но считал их “идеальными элементами, подобными мнимым числа. Эти идеальные элементы подчиняются тем же законам, что и обычные числа. Тем не менее они пред­ставляют собой не более чем удобные фикции, необходи­мые для облегчения рассуждений и открытий. Всегда, при желании, можно исключить их использование и вер­нуться к стилю античных математиков, рассуждая в тер­минах величин, достаточно больших (или малых) для того, чтобы ошибка была меньше любой наперед задан­ной. Все это отчетливо и неоднократно утверждается в сочинениях Лейбница”.

Приведем теперь некоторые из высказываний Лейб­ница, цитируемых Робинсоном.

“... Нужно воспринимать бесконечное подобно тому, как это делается в оптике, когда солнечные лучи счита­ются приходящими из бесконечно удаленной точки и по­этому параллельными... И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то пони­маются они в том же смысле, в каком земной шар счи­тается точкой по сравнению с расстоянием до неподвиж­ных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравне­нию с радиусом земного шара, так что расстояние до неподвижных звезд является бесконечно бесконечным или бесконечностью бесконечности по отношению к диаметру шарика. Вместо бесконечно большого или бесконечно малого количества можно взять количество настолько большое или малое, насколько это нужно, чтобы ошибка не превышала заданной. Отличие от архимедовского стиля рассуждений лишь в выражениях, которые у нас более непосредственные и лучше приспособлены для искусства изобретать”.

“...Если кто-то не желает рассматривать бесконечно большие и малые в строго метафизическом смысле, как реально существующие, он можег пользоваться ими как «идеальными понятиями», которые сокращают рассужде­ния, подобно мнимым корням в обычном анализе... Таким же образом представляют более трех измерений...— все это для установления идей, спо­собных сокращать рассуждения и основывающихся на реальностях.

Не следует все же воображать, что наука о бесконеч­ном унижается этим объяснением и сводится к фикциям, ибо постоянно остается, говоря языком схоластики, синкатегорематическая бесконечность. Например, остается верным, что 2 равно 1/1+1/2+1/4+1/8+1/16+1/32 и т. д., что есть бесконечный ряд, в котором содержатся сразу все дроби с числителем 1 и со знаменателями, образующими удваивающуюся геометрическую прогрес­сию, хотя здесь употребляют все время лишь обыкновен­ные числа и хотя не вводят никакой бесконечно малой дроби или дроби с бесконечным знаменателем... Правила конечного сохраняют силу в бесконечном, как если бы существовали атомы..., хотя они вовсе не существуют, ибо материя в действительности делима без конца и, наоборот, правила бесконечного сохраняют силу в конеч­ном, как если бы имелись метафизические бесконечно малые, хотя в них и нет нужды и хотя деление материи никогда не приходит к бесконечно малым частицам. Это объясняется тем, что все управляется разумом и что ина­че совсем не было бы ни науки, ни правила, а это не согласовалось бы с природой верховного начала”. (Это высказывание Лейбница можно при желании рассматривать как формулировку принципа переноса, что дает еще одно основание называть его также “принципом Лейбница”.)

“...Несравнимыми величинами я называю такие, одна из которых никогда не сможет превзойти другую, на ка­кое конечное число ее бы ни помножили, так же как это понимает Евклид...”.

Приведем еще несколько цитат (на этот раз отсутст­вующих в монографии Робинсона).

“...новый Анализ бесконечных рассматривает не линии и не числа, но величины вообще, как это делает обыкновенная Алгебра. Этот Анализ содержит новый алгоритм, т. е. новый способ складывать, вычитать, умно­жать, делить, извлекать корни, соответствующий не­сравнимым величинам, т. е. тем, которые бесконечно велики или бесконечно малы в сравнении с другими...”

Методы Лейбница господствовали в Европе в течение более чем 50 лет. Однако во второй половине XVIII столетия начались поиски альтернативных путей построения анализа. Лагранж предлагал рассматривать разложения функций в степенные ряды, предполагая, что любая или почти любая функция может быть разложена в такой ряд. Даламбер предлагал понятие предела в качестве исходного для построения математического анализа. Он писал:

“Говорят, что одна величина лявляется пределом дру­гой, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую заданную величину... Теория пределов яв­ляется основанием подлинной Метафизики дифферен­циального исчисления... В дифференциальном исчислении речь идет не о бесконечно малых величинах, как это обычно утверждают; речь идет лишь о переделах конечных величин... Термином “бесконечно малая» пользуются лишь как сокращением …»

Эти высказывания даламбера выглядят как изложение современной точки зрения на пределе. Можно было бы предположить, что с этого времени понятие бесконечно малых будет полностью устранено. Это, однако, не так. Коши, рассматриваемый обычно как основатель современного подхода к построению ана­лиза, использует понятие бесконечно малой величины. Пытаясь объяснить в современных терминах, что Коши называет “величиной”, можно предположить, что величи­на — это функция с действительными значениями, опре­деленная на упорядоченном множестве без наибольшего элемента. Коши, однако, отнюдь не сводит величины к функциям. Наоборот, он говорит о функции как о соот­ношении, связывающем две величины. В его изложении бесконечно малые и пределы фигурируют как равноправ­ные компоненты обоснования анализа.

2. РОБИНСОН И «НОВАЯ ИСТОРИЯ» НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

В 1961 г. по­явилась статья А. Робинсона «Нестандартный анализ» в Трудах Нидерландской академии наук. В статье намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, к аналитической механике). В этой статье Робинсон, в частности, писал: “Наша главная цель – показать, что эти модели дают естественный подход к старой почтен­ной проблеме построения исчисления, включающего бес­конечно большие и бесконечно малые количества. Как хорошо известно, использование бесконечно малых, на­стойчиво защищаемое Лейбницем и без колебании при­нимаемое Эйлером, было дезавуировано с появлением методов Кошн, поставивших математический анализ на твердую основу”.

Итак, до 1961 г. понятие бесконечно малой поятоянной величины, бесконечно малого числа, интерпретирова­лось как в лучшем случае нестрогое, а в худшем — бес­смысленное. Робинсон впервые обнаружил, что это­му понятию можно придать точный математический смысл.

В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагающие нестандартную теорию: в 1962 г.– книга У. Л. Дж. Люксембурга “Нестандарт­ный анализ. Лекции о робинсоновой теории бесконечно малых и бесконечно больших чисел”, в 1966 г.— книга самого А. Робинсона “Нестандартный анализ”, в 1969 г. — книга М. Маховера и Дж. Хиршфелда “Лек­ции о нестандартном анализе”] (из 77 страниц этих “Лекций” действительной прямой отведено немногим болеее двух: «нестандартный анализ» понимается здесь в самом широком смысле).

Наибольший резонанс вызвала книга Робинсона. В девяти первых главах этой монографии содержалось как построение необходимого логико-математического аппарата, так и многочисленные приложения – к дифференциальному и интегральному исчислению, к общей топологии, к теории функций комплексного переменного, к теории групп Ли, к гидродинамике и теории упругости.

В 1966 г. появилась статья А.Р. Бернстейна и А. Робинсона, в которой впервые методами нестандартного анализа было получено решение проблемы инвариантных пространств для полиномиально компактных операторов. В очерке П.Р. Халмоша “Взгляд в гильбертово пространство” в качестве проблемы фигурирует поставленная К.Т. Смитом задача о существовании инвариантного подпространства для таких операторов Т в гильбертовом пространстве , для которых оператор компактен. А.Р. Бернстейном и А. Робинсоном методами нестандартного анализа было доказано, что любой полиномиально компактный оператор в гильбертовом пространстве имеет нетривиальное инвариантное замкнутое подпространство.

Приложения нестандартного анализа в математике охватывают обширную область от топологии до теории дифференциальных уравнений, теории мер и вероятностей. Что касается внематематических приложений, то среди них мы встречаем даже приложения к математической экономике. Многообещающим выглядит использование нестандартного гильбертова пространства для построения квантовой механики. А в статистической механике становится возможным рассматривать системы из бесконечного числа частиц. Помимо применений к различным областям математики, исследования в области нестандартного анализа включают в себя и исследование самих нестандартных структур.

В 1976 г. вышли сразу три книги по нестандартному анализу: “Элементарный анализ” и “Основания исчисления бесконечно малых” Г. Дж. Кейслера и “Введение в теорию бесконечно малых” К. Д. Стройана и В. А. Дж. Люксембурга.

Быть может, наибольшую пользу нестандартые методы могут принести в области прикладной математики. В 1981 г. вышла книга Р. Лутца и М. Гозе “Нестандартный анализ: практическое руководство с приложениями”. В этой книге после изложения основных принципов нестандартного анализа рассматриваются вопросы теории возмущений.

В настоящее время нестандартный анализ завоёвывает всё большее признание. Состоялся ряд международных симпозиумов, специально посвященных нестандартному анализу и его приложениям. В течении последнего десятилетия нестандартный анализ (точнее, элементарный математический анализ, но основанный на нестандартном подходе) преподавался в ряде высших учебных заведений США.

3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

 Один из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные величины (т. е. не как функции, стре­мящиеся к нулю, как учат современные учебники), а как величины постоянные. Та­кой подход хорошо согласуется как с интуицией естест­воиспытателя, так и с реальной историей зарождения математического анализа. Что касается интуиции, то до­статочно раскрыть любой учебник физики, чтобы натолк­нуться на бесконечно малые приращения, бесконечно малые объемы и т.п. Все эти величины мыслятся, разуме­ется, не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю. Было бы неправильно считать по­добного рода интуицию присущей лишь авторам учебни­ков физики. Вряд ли какой-то математик воспринимает (наглядно) элемент дуги ds иначе, чем “очень маленькую дугу”. Любой математик, составляя соответствующее дифференциальное уравнение, скажет, что за бесконечно малое время dt точка прошла бесконечно малый путь dx*,* а количество радиоактивного вещества изменилось на бесконечно малую величину dN.

Что же касается истории математического анализа, то в наиболее явной форме излагаемый подход проявил­ся у одного из основоположников этой науки — Лейбни­ца. В мае 1984 г. исполнилось 300 лет с того дня, как символы dx и dy впервые появились на страницах мате­матических публикаций, а именно в знаменитом мемуаре Лейбница “Новый метод...”. Именно Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянны­ми (хотя и воображаемыми, идеальными) величинами особого рода, и именно Лейбниц сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде ис­числения.

Какие положительные числа следует называть бесконечно малыми?

Первый ответ таков: положитель­ное число ε называется бесконечно малым, если оно меньше всех положительных чисел. Однако бесконечно малых в этом смысле положитель­ных чисел не бывает: ведь если число меньше всех положительных чисел и само положительно, оно должно быть меньше самого себя. Попытаемся исправить поло­жение, потребовав, чтобы ε было меньше всех других

положительных чисел, но больше нуля, т. е. чтобы ε было наименьшим в множестве положительных чисел. На числовой оси такое ε должно изобразиться самой левой точкой множества (0, +∞). К сожалению, числа ε с указанными свойствами тоже нет и не может быть: если ε положительно, то число ε/2 будет положительным числом, меньшим ε. (Согласно обычным свойствам неравенств для всякого *а* > 0 выполняются неравенства *0 < а/2 < а*). Так что если мы не хотим отказываться от при­вычных нам свойств действительных чисел (напри­мер, от возможности разделить любое число на 2 или от возможности умножить любое неравенство на положи­тельное число), но хотим иметь бесконечно малые чис­ла, то приведенное определение бесконечной малости не годится.

Более изощренное определение бесконечной малости числа ε > 0, которое мы будем использовать в дальней­шем, таково. Будем складывать число ε с самим собой, получая числа ε, ε + ε, ε + ε+ ε, ε + ε + ε +ε и т. д. Ес­ли все полученные числа окажутся меньше **1,** то число ε и будет называться бесконечно малым. Другими слова­ми, если ε бесконечно мало, то сколько раз ни отклады­вай отрезок длины ε вдоль отрезка длины 1, до конца не дойдешь. Наше требование к бесконечно мало­му ε можно переписать и в такой форме (поделив на ε): 1<1/ε, 1+1<1/ε, 1+1+1<1/ε,…

Таким образом, если число число ε бесконечно мало, то число 1/ε бесконечно велико в том смысле, что оно больше любого из чисел 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1 и т. д. Так что если мы начнем измерять отрезок длиной 1/ε с помощью эталона длины (т.е. откладывая последовательно отрезки единичной длины), то процесса измерения никогда не закончим.

Из вышеизложенного следует, что существование бесконечно малых противоречит так называемой аксиоме Архимеда, которая утверждает, что для любых двух отрезков *А* и *В* можно отложить меньший из них *(А)* столько раз, чтобы в сумме полу­чить отрезок, превосходящий по длине больший отрезок *(В).*

Приведенная формулировка касается отрезков; если считать (как это обычно делается), что длины отрезков являются числами, мы приходим к такой формулировке аксиомы Архимеда: для любых двух чисел *а* и *b,* для ко­торых *0 < а < b,* одно из неравенств *а + а > b, a + а + a > b,* ... обязательно выполнено. В дальнейшем, говоря об аксиоме Архимеда, мы будем иметь в виду имен­но эту формулировку. Из нее видно, что в множестве действительных чисел (где эта аксиома выполняется) бесконечно малых нет: чтобы убедиться в этом, достаточ­но положить *a=ε, b=1.* Мы увидим в дальнейшем, что на самом деле аксиома Архимеда равносильна утвержде­нию об отсутствии бесконечно малых элементов, не рав­ных нулю.

Вывод – если мы хотим рассматривать бесконечно малые, нужно расширить множество R действительных чисел до некоторого больше­го множества \*R. Элементы этого нового множества бу­дем называть *гипердействительными числами.* В нем аксиома Архимеда не выполняется и существуют беско­нечно малые (в смысле последнего определения) числа — такие, что сколько их ни складывай с собой, сумма будет все время оставаться меньше 1. Подобно тому как обыч­ный (или стандартный) математический анализ зани­мается изучением множества действительных чисел R, нестандартный анализ изучает множество гипердействи-тельных чисел \*R. Полученные при этом результаты ис­пользуются для исследования свойств R. (Таким обра­зом могут быть получены “нестандартные” доказательст­ва свойств обыкновенных действительных чисел.)

Порядок на R архимедов, а на \*R неархимедов: это значит, что в R аксиома Архимеда выполняется, а в \*R не выполняется. По этой причине стандартный (обыч­ный) анализ, изучающий R, называется еще *архимедо­вым,* а нестандартный анализ, изучающий \*R, называ­ют *неархимедовым.*

Для построения нестандартного анализа необхо­димо расширить множество действительных чисел до бо­лее широкого множества гипердействительных чисел.

Но прежде поговорим о самих действительных числах и их происхождении.

До сих пор мы предполагали известным по­нятие действительного числа. Понятие действительного числа имеет долгую историю, начавшуюся еще в древней Греции (о чем на­поминает название “аксиома Архимеда”) и закончившу­юся лишь вXIX веке. Самой первоначальной и основной числовой системой является, конечно, система натуральных чисел. Натуральных чисел, однако, оказывается мало: пы­таясь решить уравнение 3 + *х* = 2 в натуральных чис­лах, мы обнаруживаем, что оно не имеет решений и на­ше желание определить операцию вычитания оказывается неудовлетворенным. Поэтому мы расширяем множе­ство натуральных чисел до множества целых чисел. В этой процедуре для нас сейчас важно следующее: каким образом мы оп­ределим сложение и умножение на целых числах? То, что 2 + 2 == 4, можно увидеть, сложив две кучи по два яблока в одну. Но почему мы считаем, что (-2)+(-2)=(-4)? Почему мы считаем, что (-1)(-1)=1?

Эти вопросы не так тривиальны, как может показаться. Найти правильный ответ будет легче, если сформулировать вопрос иначе: что плохого произой­дет, если мы будем считать, например, что (-1)(-1)=(-1)? Ответ прост: в этом случае хорошо известные свой­ства сложения и умножения натуральных чисел (комму­тативность, ассоциативность и др.) не будут выполнять­ся для целых чисел. Можно показать, что обычное определение операций над отрицательными числами единственно возможное, если мы хотим сохранить привычные свойства операций сложения и умножения.

Тут следует остановиться: какие же именно свойства сложения и умножения мы хотим сохранить? Ведь если бы мы хотели сохранить все свойства, то введение отрицательных чисел было бы не только излишне, но и вредно: свойство “уравнение *х+3=2* не имеет решений”, верное для натуральных чисел, становится неверным для целых! Если же мы ничего не хотим сохра­нить, то задача становится столь же легкой, сколь и пустой: можно определить операции с отрицательными числами как угодно.

Возвращаясь к истории развития понятия числа, мы видим, что введение отрицательных чисел не доставляет полного удовлетворения: уравнение 2x=3 по-прежне­му не имеет решения. Это побуждает ввести рациональ­ные (дробные) числа. Но и этого недостаточно: от раци­ональных чисел приходится перейти к действительным. В результате получается последовательность множеств N⊂Z⊂Q⊂R (натуральных, целых, рациональных и действительных чисел; *А⊂* *В* означает, что всякий элемент множества *А* принадлежит множеству *B*. В этой последовательности каждое следующее множество вклю­чает в себя предыдущее, при этом имевшиеся в предыду­щем операции продолжаются на следующее, более широкое, множество, сохраняя свои полезные свойства.

Мы хотим продолжить эту последовательность еще на одни член, получив последовательность N⊂Z⊂Q⊂R⊂\*R, где \*R – множество гипердействительных чисел. Новый шаг расширения будет иметь много общего с предыдущими: мы продолжим на \*R имеющиеся в R операции, сохранив их полезные свойства. Но будут и 2 важных отличия.

Во-первых, если расширение (переход от R к \*R) можно выполнить многими различными способами: можно построить существенноразличные множества \*R, ни одно из которых ничем не выделяется среди остальных. В то жо время, все предыдущие шаги нашего расширения число­вой системы от N к R были в некотором смысле од­нозначны.

Во-вторых, есть различие в наших целях. Ес­ли прежде (двигаясь от N к R) мы строили новую числовую систему прежде всего для того, чтобы иссле­довать ее свойства и ее применения, то построенная си­стема \*R предназначается не столько для того, чтобы исследовать ее свойства, сколько для того, чтобы с ее помощью исследовать свойства R. Впрочем различие и не так велико: и раньше расширение числовой системы было одним из способов получения но­вых знаний о старых объектах. Кроме того, множество \*R можно рас­сматривать, быть может, как соответствующее физиче­ской реальности в не меньшей (и даже в большей) сте­пени, чем R.

Итак, необ­ходимо расширить множество R действительных чисел до большего множества \*R, содержащего бесконечно ма­лые, сохранив при этом все полезные свойства R. Цент­ральный вопрос состоит в том, какие именно свойства действительных чисел мы желаем со­хранить. Ответим на этот вопрос не сразу, начав с на­иболее простых свойств действительных чисел.

Прежде всего, мы хотим, чтобы гипердействительные числа можно было складывать, умножать, вычитать и делить, чтобы эти операции обладали обычными свойст­вами, называемыми «аксиомами поля». Сформулируем их.

Среди гипердействительных чисел должны быть выделены числа 0 и 1; определены операции сложения, умножения взятия противоположного, а также операция взятия обратного. При этом должны выполняться такие свойства:

(1) a+b=b+a (2) a+(b+c)=(a+b)+c (3) a+0=a (4) a+(-a)=0 (5) ab=ba

(6) a(bc)=(ab)c (7) a\*1=a (8) a(b+c)=ab+ac (9) a\*(1/a)=1 при a<>0.

Множество с операциями, обладающими этими свойствами, называется полем. Требования (1)-(9) можно сформулировать так: \*R должно быть полем.

 Кромеарифметических операций, зададим на гипердействительных числах порядок. Для любых двух различных гипердействительных чисел должно быть определено какое из них больше. При этои должны выполняться такие свойства:

(10) если a>b, b>c, то a>c

(11) если a>b, то a+c>b+c для любого с

(12) если a>b, c>0, то ac>bc

если a>b, c<0, то ac<bc

Поле, в котором введен порядок с такими свойствами, называется *упорядоченным полем*. Требования (10)-(12) можно сформулировать так: \*R должно быть упорядоченным полем.

Мы хотим, чтобы среди гипердействиетльных чисел были все действительные. При этом операции и порядок на R и на \*R должны быть соглсованы. Это требование можно сформулировать так: упорядоченное поле \*R должно быть расширением упорядоченного поля R.

 Что же нового мы ожидаем от \*R? Бесконечно малых.

Определение. Элемент ε>=0 упорядоченного поля называется бесконечно малым, если ε<1, ε+ε<1. ε+ε+ε<1 и т.д. Отрицательное ε называется бесконечно малым, если –ε бесконечно мало.

 Существование ненулевых бесконечно малх равносильно нарушению аксиомы Архимеда для гипердействительных чисел. Упорядоченные поля, в которых справедлива аксиома Архимеда и нет бесконечно малых, называют архимедово упорядоченными. Те поля, в которых аксиома Архимеда невернаи есть бесконечно малые, называют неархимедово упорядоченными (неархимедовым).

 В этих терминах треюования можно сформулировать так: система гипердействительных чисел должна быть неархимедово упорядоченным полем, являющимся расширением упорядоченного поля действительных чисел.

4. ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ

 Предположим, что неархимедово расширение упорядоченного поля действительных чисел существует. Исследуем его свойства.

 Пусть \*R – неархимедово расширение R. Его элементы называются гипердействительными числами. Среди них содержатся и все действительные числа. Для отличия тех гипердействительных чисел, которые не являются действительными (элементы R) назовем их стандартными, а остальнгые гипердействительные (элементы \*R\R) – нестандартными. Тогда бесконечно малые являются нестандартными, так как среди действительных чисел бесконечно малых нет.

 Бесконечно малые положительные числа меньше всех стандартных положительных чисел. Аналогичным образом отрицательные бесконечно малые числа больше всех стандартных отрицательных чисел. Таким образом, если пытаться изобразить бесконечно малые числа на числовой прямой, то пришлось бы втиснуть их настолько близко к нулю, чтобы все положительные стандартные числа оказались справа, а отрицательные – слева.

Указанное свойство может служить определением бесконечной малости: если число ε>0 меньше всех стандартных положительных чисел, то оно бесконечно мало.

Определение. Гипердействительное число *А>0* называется *бесконечно большим,* если А>1, А>1+1, А > 1+1+1, .…(Отрицательное число *В* называется бесконечно боль­шим, если таков его модуль)

Положительное бес­конечно большое число *А* больше любого стандартного.

Аналогичным образом всякое отрицательное бес­конечно большое гипердействительное число меньше лю­бого стандартного.

*Определение.* Гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, будут называться конечными.

*Утверждение.* Если s – конечное гипердействительное число, то найдутся стандратное v и бесконечно малое ε, для которых s=v+ε. Такое представление единственно.

*Определение.* Стандартной частью st(x) конечного гипердействительного числа x называется такое стандартное v, что x=v+ε для бесконечно малого ε.

 Гипердействительная прямая разбивается на 3 части (слева направо): отрицательные бесконечно большие, конечные, положительные бесконечно большие. Рассмотрим «конечную часть» гипердейсьвительной прямой. Рядом с каждым стандартным действительным числом *а* расположено множество бесконечно близких к нему гипердействительных чисел, для которых *а* является стандратной частью. Это множество называют монадой стандартного числа *а*. Множество конечных гипердействительных чисел разбито на непересекающиеся классы – монады, соответствующие стандартным действительным.

 Сумма и разность бесконечно малых бесконечно малы, произведение бесконечно малого и конечного гипердействительных чисел бесконечно мало.

Определение. Два гипердействительных числа называются бесконечно близкими, если их разность бесконечно мала.

Из приведенных выше свойств бесконечно малых следует, что отношение бесконечной близости есть отношение эквивалентности. Это означает, что отношение бесконечно близости рефлексивно (каждое x бесконечно близко самому себе), симметрично (если x бесконено близко к y, то y бесконечно близко к x) и транзитивно (если x бесконено близко к y, а y бесконечно близко к z, то x бесконечно близко к z). Всякое отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно определено на непересекающиеся классы, причем любые два элемента одного класса эквивалентны, а любые два элемента разных классов не эквивалентны. В частности, наше отношение разбивает \*R на непересекающиеся классы, причем элементы одного класса бесконечно близ­ки друг к другу, а элементы разных классов — нет. Классы, содержащие стандартные действительные числа, представляют собой упоминавшиеся выше «монады».

# 5. ПРИМЕР НЕАРХИМЕДОВОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ

До сих пор речь шла о гипердействительной прямой (а точнее, любом неархимедовом расширении упоря­доченного поля действительных чисел). Возникает во­прос – существует ли хотя бы одно такое распшрение. Построим такое расширение.

Ос­новная идея этого построения может быть описана в од­ной фразе так: у нас нет объектов, но есть имена для них; так объявим же имена объектами! Эта (часто при­меняемая в математической логике) идея конкретизиру­ется в нашем случае следующим образом.

Мы знаем, что в нашем (пока еще не построенном и неизвестно существующем ли) расширении должно быть хотя бы одно бесконечно малое положительное гипердействительное число. Обозначим его через ε. Поскольку гипердействительные числа можно умножать друг на дру­га (и, в частности, на действительные числа), то наряду с ε в нашем расширении будут и числа 2ε, 0,5ε и во­обще все числа вида *a*ε, где *а* – произвольное стандарт­ное действительное число. Более того, число ε можно умножать и на себя, поэтому в нашем расширении бу­дут иметься ε2, ε3, 2ε2, Зε2+2ε+1, ... и вообще все гипердействительные числа вида Р(ε), где P – многочлен со стандартными действительными коэффициентами.

Множество чисел такого вида замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения. Это значит, что, складывая, вычитая или перемно­жая два числа такого вида, мы вновь получим число та­кого же вида. Но для гипердействительных чисел опре­делено еще и деление. Поэтому в расширении будут и числа вида Р(ε)/Q(ε), где P и Q – многочлены со стан­дартными действительными коэффициентами. После этого мы получаем множество гипердействптельных чисел, замкнутое относительно всех арифметических операций: складывая, вычитая, умножая или деля две дроби указанного вида по обычным правилам, получаем дробь та­кого же вида.

Таким образом, не имея пока искомого расширения, мы уже смогли назвать некоторые его элементы, дать им имена. Этими именами являются записи вида P(ε)/Q(ε), где ε – некоторый символ. Более того, мы можем судить и о том, какая из двух записей обознача­ет большее число. В самом деле, достаточно уметь опре­делять, обозначает ли данная запись положительное, от­рицательное или нулевое число (поскольку *а > b* тогда и только тогда, когда *a-b>0*). Знак дроби можно определить по знакам числителя и знаменателя, следовательно достаточно уметь определять знак P(ε), где Р – многочлен. Это делается так. Легко ви­деть, что знак величины a0+a1ε+… совпадает со зна­ком a0, если a0<>0*. В* самом деле, добавка a1ε+… бес­конечно мала, а складывая положительное (отрица­тельное) число с бесконечно малым, мы получаем положительное (соответственно отрицательное) число. Воз­можен, однако, случай a0=0. Будем считать для опре­деленности, что ε – положительное бесконечно малое. Вынесем из нашего многочлена ε в наибольшей возмож­ной степени, т. е. представим его в виде εk(ak+ak+1ε+…), где ak уже отлично от 0. Знак всего вы­ражения определяется знаком выражения в скобках (при умножении на положительное число знак не меняется), а знак выражения в скобках (как мы уже видели) опре­деляется знаком числа ak..

По существу, мы уже построили искомое неархимедо­во расширение. Нужно лишь посмотреть на наши рас­суждения с другой позиции. До сих пор выражения P(ε)/Q(ε) рассматривались нами как имена «настоящих» гипердействительных чисел (взятых неизвестно откуда). А теперь они станут самими гипердействительными чис­лами. Рассмотрим формальные выражения вида P(ε)/Q(ε), где ε – некоторый символ, P, Q – многочлены с действительными коэффициентами, причем Q<>0. Про­возглашая, что объектами, а в данном случае гипердейст­вительными числами, мы объявим имена, а в данном слу­чае выражения, или записи вида P(ε)/Q(ε), мы были не совсем точны. Дело в том, что, очевидно, две различ­ные записи могут выражать одно и то же число (иными словами, быть двумя различными именами одного и того же числа): так, например, естественно считать, что за­пись (ε2-1)/(ε-1) выражает то же самое число, что и (ε+1)/1.

Будем называть два выражения P(ε)/Q(ε) и R(ε)/S(ε) эквивалентными, если P(ε)\*S(ε)=R(ε)\*Q(ε) (равенство понимается как равенство многочле­нов, т. е. как равенство коэффициентов при одинаковых степенях). Легко проверить, что это определение дейст­вительно задает отношение эквивалентности, разбиваю­щее все выражения вида P(ε)/Q(ε) на классы. Эти классы мы и будем называть гипердействительными числа­ми. Сложение, вычитание, умножение и деление гипер­действительных чисел определяются по обычным прави­лам. Так, например, если α – класс, содержащий P/Q, а β – класс, содержащий R/S*,* то их суммой называется класс, содержащий (PS+RQ)/SQ, а произведением — класс, содержащий PR/QS*.* Легко проверить, чтоэто оп­ределение корректно, т. е. не зависит от выбора элемен­тов P/Q в классе α и R/S в классе β (в результате получаются разные представители одного и того же класса). Аналогичным образом можно определить взятие обратно­го и противоположного, нуль и единицу. Нетрудно про­верить, что все аксиомы поля при этом будут выполне­ны. Изложенная конструкция хорошо известна в алгеб­ре: построенное поле называется полем рациональных функций с коэффициентами в R и обозначается R(ε).

Осталось определить только порядок, указав, как выбрать из двух различных гипердействительных чисел (т. е. из двух различных классов эквивалентных дро­бей) большее. Для этого нужно вычесть одно число из другого и определить, будет ли разность (отличная от нуля, поскольку числа различны) положительной или от­рицательной. Чтобы определить, будет ли отличное от нуля число α положительным или отрицательным, возь­мем его представитель P/Q*.* Здесь P, Q отличны от 0 (Q отлично от нуля по определению, Р – потому что, по нашему предположению, разность не равна 0). Вынесем в числителе и в знаменателе ε в наибольшей возможной степени:

P=εk(ak+ak+1ε+…), Q=εl(bl+bl+1ε+…), ak, bl отличны от 0.

Число α будет положительным, если ak, bl имеют одинаковые знаки, и отрицательным, если они имеют раз­ные знаки.

Построенное упорядоченное поле R(ε) можно рассматривать как расширение поля R: достаточно отождествить действительное число *х* с классом эквивалентных дробей, содержащим дробь x/1. Осталось лишь показать, что аксиома Архимеда не вы­полняется, предъявив бесконечно малый элемент. Этим элементом будет, конечно, ε (точнее, класс, содержащий ε/1). В самом деле, ε+ε+ ... +ε <1, так как разность 1-nε положительна (знак определяется свободным чле­нном, а 1 > 0).

Искомое расширение построено.

6. НОВЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ И ОСНОВНАЯ ГИПОТЕЗА

Мы построили неархимедово расширение R(ε) поля действительных чисел. Новым требованием к гипердействительным числам яляется следующее. Нужно уметь вычислять «значения» стандартных функций (заданных первоначально как функции с дей­ствительными аргументами и значениями) на гипердействительных аргументах. Другими словами, для каждой функции f: R→R необходимо иметь ее «гипердействптельный аналог» \*f: R→R. При этом, значения \*f на стандартных числах должны совпадать с соответствующими значениями функции f. Другими сло­вами, \*f должно быть продолжением f. Такие аналоги были у нас для операций сложения, вычитания, умно­жения и деления. Но этого мало: нужны такие ана­логи и для других функций.

Итак, для каждой стандартной функции f (функции с действительными аргументами и значениями) нам нуж­но иметь ее гипердействительное продолжение \*f. Если от \*f ничего не требовать, то это тривиально: можно счи­тать, что во всех действительных точках \*f принимает те же значения, что и f, а в нестандартных точках \*f имеет какие угодно значения (например, нули). Ясно, однако, что от такого продолжения никакого толку нет:

Нужно выделить некоторый класс свойств — класс тех свойств, которые мы хотим сохранить. Правильный выбор этого класса имеет решающее значение для успеха нашего построения системы гипердействительных чисел. Если этот класс будет слишком узок, то от наличия продолжений \*f не будет пользы. Если же, напротив, он будет слишком широк, то сама возможность построения системы гипердействительпых чисел и определения продолжений окажется под угрозой.

Наша главная задача – описать, какие свойст­ва стандартных функций мы хотим сохранить при пере­ходе от действительных чисел к гипердействительным. Есть две возможности это сделать. Первая возможность состоит в применении методов математической логики. Можно сказать, что при переходе от действительных чи­сел к гипердействительным сохраняются все свойства, которые можно выразить на «языке первого порядка». Вторая возможность позволя­ет обойтись более «кустарными» средствами и не при­бегать к сведениям из логики. Конечно, при этом мы будем испытывать некоторые неудобства, использовать обходные маневры и т. п., но зато не потребуется зна­комство с математической логикой.

Мы предполагаем, что помимо поля R действительных чи­сел имеется более широкое упорядоченное поле \*R гипердействительных чисел, включающее R как подмно­жество (еще раз подчеркнем, что существование \*R с нужными свойствами является пока только гипотезой, а не доказанным фактом). Пусть для каждой функции f с действительными аргументами имеется ее естественное распространение, ее «гипердействительный аналог» — функция с гипердействительными аргументами и значе­ниями. При этом функция f может быть функцией не только одного действительного аргумента, но и двух, трех и т. д.; функция \*f, разумеется, должна иметь то же самое число аргументов. Для простоты мы пока не будем рассматривать частичных функций и будем счи­тать, что f (соответственно \*f) определена при всех действительных (соответственно гипердействительных) аргументах. Сформулируем теперь наше требование («ана­логи обладают теми же свойствами, что и исходные функ­ции») более точно.

Будем рассматривать системы уравнений вида t=sи неравенств вида t≠s, левые и правые части которых содержат какие-то действительные функции действитель­ных аргументов, действительные константы и перемен­ные — что-нибудь вроде

sin(cos(x))=y+exp(z), z≠y-2x, [z]=y

Эта система содержит переменные x, y, z, одноместные функции sin,cos,exp [ ] (целая часть), двуместные функции (сложение, вычитание, умножение) и констан­ту 2 (константы для единообразия мы будем считать функциями нуля аргументов). Все входящие в систему функции имеют по нашему предположению гипердействительные аналоги. Обозначим их \*sin, \*cos, \*exp, \*[ ], \*+, \*–, и напишем систему

\*sin(\*cos(x))=y\*+\*exp(z), z≠y\*–2\*x, \*[z]=y

которую естественно назвать «гипердействительным аналогом исходной».

В качестве возможных значении переменных этой системы могут фигурировать любые гипердействительные числа. Тем самым приобретает смысл вопрос о наличии или отсутствии гипердействительных решений этой системы. Поскольку мы предполагаем, что входящие в нее функции являются продолжениями соответствующих функций действительного аргумента, то всякое (действительное) решение исходной системы будет одновременно решением новой системы. Таким образом, если исход­ная система имеет решения, то и ее гипердействительный аналог имеет решения. Мы потребуем и обратного:

*всякая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет (гипердействительные) решения, должна иметь действительные решения.*

Введем понятие терма. Выберем счетный набор символов, элементы которого будем называть *переменными.* Будем назы­вать *термом* любую переменную, любое действительное число, а также любое выражение вида f(t1, ..., tn), где f – функция *п* действительных аргументов, а t1, ..., tn – построенные ранее термы.

Системой (точнее, системой уравнений и нера­венств) назовем конечный набор записей вида t=sили t≠s, где t, s – термы. Определим теперь понятие *решения* системы. Еслп в терм подставить действительные числа вместо переменных, то он приобретет некоторое действительное значение. Решение системы – это такой набор значений переменных, при ко­тором левая и правая части любою равенства *I* t=s, вхо­дящего в систему, приобретают одно и то же значение, а левая и правая части любого неравенства t≠s, входяще­го в систему,— разные.

По нашему предположению всякая функция с дейст­вительными аргументами н значениями имеет гппердействительный аналог («естественное продолжение»). По­нятие гипердействительного аналога легко распространя­ется на термы — чтобы получить аналог терма t*,* надо просто заменить все входящие в него функции на их гипердействительпые аналоги. Проделав эту операцию со всеми термами, входящими в какую-то систему S*,* мы по­лучим систему \*S, которую естественно также назвать гипердействительным аналогом системы S*.* Поскольку в нее входят функции с гипердействительными аргумента­ми и значениями, вместо переменных можно подставлять произвольные гипердействительные числа. Гппердейст-вительным решением системы \*S назовем такой набор гипердействительпых значений переменных, при которых выполнены все входящие в нее уравнения и неравенства. Теперь можно сформулировать наше требование к систе­ме гипердействительных чисел и к гипердействительным аналогам следующим образом.

*Пусть S — произвольная система уравнений и неравенств, \*S – ее гипердействительный аналог. Если \*S имеет (гипердействительные} решения, то S долж­на иметь действительные решения.*

Возможность построения неархимедо­ва упорядоченного расширения \*R поля R и таких гипердействительных аналогов \*f для всех действительных функций f, которые бы удовлетворяли сформулированному требованию, остается пока всего, лишь гипотезой. (Мы будем называть эту гипотезу Основной гипотезой.)

## 7. СЛЕДСТВИЯ ОСНОВНОЙ ГИПОТЕЗЫ

Приведем несколько примеров, показывающих, какие следствия можно вывести из сфор­мулированной Основной гипо­тезы. Оказывается, что несмотря на то, что сформулиро­ванное нами требование одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств кажется весьма частным, оно имеет самые разнообразные следствия и достаточно для обоснований значительной части рассуждений с ги-пердействительными числами.

Пример 1. Пусть f – функция одного действитель­ного аргумента, принимающая только значения 0 и 1. Докажем, что функция \*f принимает только значения 0 и 1. Для этого рассмотрим систему

*f(x)≠0, f(x)≠1,*

которая по предположению не имеет действительных решений. Следовательно, не имеет (гипердействительных) решений и ее аналог — система

*\*f(x)≠0, \*f(x)≠1,*

Пример 2. Пусть f и g – функции одного действительного аргумента, причем множества их нулей совпа­дают. (Множество нулей функции – множество тех зна-чений аргумента, при которых значение функции равно 0) В этом случае и множества гипердействительных чисел, являющиеся множествами нулей функций \*f и \*g, совпадают. Докажем это. В самом деле, каждая из си­стем

(1) *f(x)=0, g(x)≠0,*

(2) g*(x)=0, f(x)≠0,*

не имеет действительных решений. Следовательно, не имеют гииердействительных решений и их аналоги. По­тому любой гипердействительный нуль функции \*f обя-зан (чтобы не быть решением аналога системы (1)) быть нулем и для \*g и наоборот.

Этот пример позволяет определить гипердействительные аналоги не только для функций, но и для множеств.

Пусть *А* – произвольное множество действительных чисел. Рассмотрим произвольную функцию f, для которой *А* – множество нулей. (Такая есть: достаточно положить, например, f(x)=0 при *х∈А* и f(x)=1 при x∉A). Рассмотрим теперь гипердействительный аналог \*f функции f и множество *\*А* его (гипердействительных) нулей. Как мы видим, множество *\*А* не зависит от выбора функ­ции f. Его мы и назовем гипердействительным аналогом множества *А.*

Пример 3. Мы можем теперь разрешить включать системы наряду с равенствами t=s и неравенст­вами t≠s и записи видаs∈A*,* где s представляет собой терм, а *А –* множество действительных чисел. При этом решениями будут такиенаборы (действительных или гипердействительных) значений переменных, при ко­торых выполнены все равенства и неравенства, а значе­ние s принадлежит множеству *А.* Гипердействительным аналогом s∈A будет \*s∈\*A, где \*s – гипердей-ствительный аналог терма s*,* а *\*A* — аналог множества *А* (в указанном смысле). Таким образом, у всякой си­стемы равенств, неравенств и включений (т. е. записей вида s∈A*)* появляется гипердействительный аналог. Для таких систем остается в силе свойство одновременной разрешимости: если гипердействительный аналог систе­мы имеет (гипердействительные) решения, то исходная система имеет (действительные) решения. Чтобы уви­деть это, достаточно заменить *s∈A* на *a(s)=0,* где *a* – функция с действительными аргументами и значениями, множеством нулей которой является *A*. Аналогичным об­разом можно добавлять в систему и утверждения вида s∉A (что заменяется на *a(s)≠0*).

Пример 4. Пусть *А* – пустое множество. Докажем, что \*A – пустое множество.

В самом деле, система

*х∈А*

не имеет действительных решений, поэтому и система *х∈\*А* не имеет (гипердействительных) решений. Рас­смотрев систему *х∉А,* получаем аналогичным образом, что если *А* содержит все действительные числа, то *\*А* содержит все гипердействительные числа. Таким обра­зом, гипердействительным аналогом множества R будет множество \*R, так что наши обозначения согласованы.

Вдальнейшем, вместо того чтобы говорить о системе S и ее действительных решениях, а также о системе \*S и ее гипердействительных решениях, будем говорить о дейст­вительных и гипердействительных решениях системы S (говоря о гипердойствительных решениях системы S*,* мы на самом деле будем иметь в виду гипердействительные решения системы \*S).

Пример 5. Если A=B∩C, то \*A=\*B∩\*C. В самом деле, каждая из систем

*х∈B, х∈С, х∉А;*

*х∈A, х∉B;*

*х∈A, х∉С.*

не имеет действительных, и, следовательно, гипердейст­вительных решений. (Точнее, следовало бы говорить об аналогах этих систем) Отсюда получаем, что *\*В* ∩*\*С ⊂ \*A* (первая система), \*А⊂\*С (вторая) и \*A⊂\*C (третья), откуда вытекает, что \*A⊂\*B∩\*C.

Наши требования к системе гипердействительных чисел состояли из двух частей. Во-первых, \*R должно быть упорядоченным неархимедовым полем, расширяющим R. Во-вторых, должны существовать ана­логи для всех действительных функций, удовлетворяю­щие требованию одновременной разрешимости систем уравнений. Эти требования оказываются избыточными:

тот факт, что гипердействительные аналоги сложения, умножения и т. п. превращают \*R в поле, можно выве­сти из требования одновременной разрешимости систем уравнений.

8. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим вопрос о существовании гипердействительных чисел. Точнее этот вопрос следует сфор­мулировать так: можно ли построить расширение множества действительных чисел, для которого выполнялась бы Основная гипотеза. Основная гипотеза требует, чтобы:

(1) имелось некоторое множество *R,* для которого R⊂\*R;

(2) для каждой функции f: Rn→R имелась некото­рая функция \*f: \*Rn→\*R являющаяся продол­жением исходной;

(3) любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог который имеет (гипердействительные) решения, имела действительные решения;

(4) \*R содержало бесконечно малые элементы, отлич­ные от нуля.

Покажем, каким образом этим требованиям можно удовлетворить. Рассмотрим один из возможных вариантов перехода от Q (множества рациональных чисел) к R (множеству действительных чисел). Рассматриваются всевозможные фундаментальные последовательности рациональных чисел, т. е. такие последовательности, что для любого ε > 0 существует отре­зок длины ε, содержащий все члены последовательности, кроме конечного числа. Две такие последовательности xn и yn называют *эквивалентными,* если xn–yn стремится к 0 при *п→∞*. Это отношение эквивалентности разбивает фундаментальные последовательности на классы, которые и называются действительными числами.

Мы достигнем цели, если от последовательностей перейдем к классам последо­вательностей, считая, что две последовательности x0,x1,x2,…. и y0,y1,y2,… задают одно и то же гипердействительное чис­ло, если xn=yn “для большинства натуральных чисел n”.

Для наглядности будем представлять себе, что прово­дится голосование по вопросу “считать ли последователь­ности xn и yn совпадающими”. В нем голосующими явля­ются натуральные числа, причем число *п* голосует “за”, если

xn =yn , и “против”, если xn≠yn *.* Будем считать по­следовательности xnи yn совпадающими, если большин­ство натуральных чисел голосуют за это. Нужно объяс­нить лишь, какова система подсчета голосов, т. е. какие множества натуральных чисел мы считаем “большими” (содержащими “большинство” натуральных чисел), а ка­кие “малыми” (содержащими “меньшинство” натураль­ных чисел). Перечислим те свойства, которым должна удовлетворять система подсчета голосов, т. с. деление множеств натуральных чисел на большие и малые.

1. Любое множество натуральных чисел является либо большим, либо малым. Ни одно множество не является большим и малым одновременно. (Голосование должно всегда давать ответ.)

2. Множество всех натуральных чисел большое, пустое множество малое. (Предложение, за которое голосуют все, принимается.)

3. Дополнение (до N) любого малого множества явля­ется большим, дополнение любого большого множества – малым. (Из двух противоположных законопроектов полу­чает большинство голосов ровно одни.)

4. Любое подмножество малого множества является малым, любое надмножество большого множества – боль­шим. (Утратив часть голосов, отвергнутый законопроект не может стать принятым.)

5. Объединение двух малых множеств является малым, пересечение двух больших множеств является большим. (Если каждая из двух групп голосующих не образует большинства, то они и вместе не образуют большинства (“невозможность коалиции”); если каждая из групп со­ставляет большинство, то голосующие, входящие одновре­менно в обе группы, уже составляют большинство.)

Эти требования весьма сильны. Чтобы понять это, рас­смотрим случай конечного множества голосующих (получающийся заменой N на некоторое конечное множест­во *М).* Можно ли тогда удовлетворить этим требованиям? Один способ почти очевиден. Выберем одного из “голосую­щих” *т∈* *М* и назовем большими все множества, содер­жащие m, а малыми – все множества, не содержащие *т (*“диктатура” m)*.* При таком определении легко проверить все свойства 1–5. Оказывается, что этим исчерпываются все возможности удовлетворить требованиям 1–5 для случая конечного множества M. В самом деле, , пусть име­ется разбиение всех множеств на большие и малые, удов­летворяющее требованиям 1–5. Рассмотрим тогда все большие множества и выберем из них множество M0, со­держащее наименьшее возможное число элементов (среди больших множеств). Множество M0 непусто. Если оно содержит ровно один элемент m, то в силу свойства 4 все множества, содержащие *т,* будут большими, а в силу свойства 3 все множества, не содержащие m, будут малы­ми. Осталось показать, что M0 не может содержать более одного элемента. В самом деле, в этом случае его можно было бы разбить на две непустые непересекающиеся части M1 и M2. Эти части должны быть малыми (так как содержат меньше элементов, чем M0), а их объединение M0 является большим, что противоречит требо­ванию 5.

Оказывается, однако, что при счетном числе голосующих возможны системы голосования, удовлетворяющие требованиям 1–5 и не сводящиеся к упомянутому три­виальному случаю. Другими словами, можно так разбить все подмножества натурального ряда на большие и малые, чтобы выполнялись свойства 1–5 и любое одноэлементное множество было малым. Тогда (в силу свойства 5) и любое конечное множество будет малым, а (в силу свой­ства 3) всякое множество с конечным дополнением (до N) – большим. Таким образом, к требованиям 1–5 можно без противоречия добавить и такое:

6. Всякое конечное множество является малым, всякое множество с конечным

дополнением — большим. (При го­лосовании мнение конечного числа голосующих несущест­венно.)

Разбиение всех подмножеств натурального ряда на большие и малые, удовлетворяющее требованиям 1–6, называется *нетривиальным ультрафильтром* на множестве натуральных чисел.

Покажем теперь, что такое разбиение позволяет по­строить систему гипердействительных чисел, удовлетво­ряющую требованиям Основной гипотезы. Итак, пусть фиксировано разбиение, удовлетворяющее требованиям 1–6. Назовем две последовательности xn и yn *эквивалентными,* если множество тех n, при кото­рых xn =yn является большим. В силу требования 2 вся­кая последовательность эквивалентна самой себе.

Мы видим, что введенное отношение рефлексивно, сим­метрично (это очевидно из определения) и транзитивно и, следовательно, разбивает все последовательности действи­тельных чисел на классы эквивалентности, т. е. такие классы, что любые две последовательности одного класса эквивалентны, а любые две последовательности из разных классов – нет. Эти классы мы и назовем гипердействительными числами. Что еще нам нужно? Нужно, чтобы множество действительных чисел было подмножеством множества гипердействительных. Нужно уметь для каж­дой функции с действительными аргументами и значения­ми строить ее гипердействительный аналог. Нужно про­верить, что любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет гипердействительные решения, имеет действительные решения. И, на­конец, нужно убедиться, что среди гипердействительных чисел (рассматриваемых как упорядоченное поле) существуют бесконечно малые, отличные от нуля.

Чтобы сделать R подмножеством \*R, отождествим каждое действительное число *х* с последовательностью *х, х, х,* ..., точнее, с содержащим ее классом. При этом разным действительным числам соответствуют разные классы: *х,x,х* … не эквивалентно *у,у,y* ... (множество тех n, при которых n-е члены совпадают, пусто и, следо­вательно, является малым).

Пусть f: R→R – функция с действительными аргу­ментами и значениями. Определим ее гипердействительный аналог \*f: \*R→ \*R. Пусть x – произвольное гипердействительное число, т.е. класс эквивалентных после­довательностей действительных чисел. Рассмотрим про­извольную последовательность x0, x1, x2,… из этого класса и применим f ко всем ее членам. Класс, содержащий по­лученную последоваетльность f(x0), f(x1), f(x2), … и будем считать значением f на *х.* Полученный класс не зависит от выбора последовательности x0, x1, x2,… в классе x (определение корректно).

Аналогично определяются и гипердействительные ана­логи для функций нескольких аргументов. Пусть, напри­мер, f – функция двух действительных аргументов с дей­ствительными значениями. Определим ее гипердействительный аналог \*f. Чтобы применить \*fк двум гипердействительным числам *х* и y, возьмем по­следовательности x0, x1, x2,… и y0, y1, y2,… , им принадлежа­щие, и в качестве \*f*(х, у)* рассмотрим класс последова­тельности f(x0,y0), f(x1,y1), f(x2,y2),… Определение корректно.

Нужно проверить, что построенное гипердействительные аналоги будут продолжениями исходных функций с действительными аргументами и значениями. Это очевидно следует из определений. Проверим теперь, что вся­кая система уравнений и неравенств, имеющая гипердействительные решения, имеет и действительные решения. Пусть, на­пример, система

f(g(x,y),z)=z, h(x)≠h(y)

имеет гипердействительные решения x, y, z. Рассмотрим последовательности x0,x1,x2,…; y0,y1,y2,…; z0,z1,z2,…, при­надлежащие соответствующим классам эквивалентности. Тогда g(x0,y0), g(x1,y1),… принадлежит классу g(x,y)*,* а f(g(x0,y0),z0), f(g(x1,y1),z1),… – классу f(g(x,y),z). Поскольку *x,y,z* по предположению являются решения­ми системы, то f(g(xn,yn),zn)=zn для большинства *п.* Поскольку h(x)≠h(y), последовательности h(x0),h(x1),… и h(y0),h(y1),… не эквивалентны и множе­ство тех *п,* при котором h(xn)=h(yn) малое. Тогда мно­жество тех *п,* при котором h(xn)≠h(yn) является боль­шим. Так как пересечение двух больших множеств является большим, то множество тех n, при котором

f(g(xn,yn),zn)=zn , h(xn)≠h(yn)

является большим. Значит, оно непусто. Таким образом, система имеет и действительные решения.

Осталось проверить, что среди гипердействительных чисел существуют бесконечно малые, отличные от нуля. Положительным бесконечно малым гипердействительным числом будет, например, класс последовательности 1, 1/2, 1/3, .,. (или любой другой последовательности положи­тельных действительных чисел, сходящейся к 0). Нам нужно проверить, что это гипердействительное число (обозначим его через ε) положительно, но меньше любого стандартного положительного числа. Чтобы доказать это, мы должны вспомнить, как определяется порядок на мно­жестве гипердействительных чисел. Он определяется в со­ответствии с общей схемой построения гипердействительного аналога для любого отношения на множестве дей­ствительных чисел. Нужно взять функцию f двух дей­ствительных аргументов, для которой свойства f(x,y)=0 и *х*<*у* равносильны, и рассмотреть ее гипердействительный аналог \*f. Гипердействительное число *х* называется меньшим гипердействительного числа *у,* если *\*f(x,y)=0*. Посмотрим, что дает нам эта конструкция для построен­ной описанным способом системы гипердействительных чисел. Если *х –* класс последовательности x0,x1,x2,…, а y – класс последовательности y0,y1,y2,…, то \*f(x,y) есть класс последовательности f(x0,y0), f(x1,y1), f(x2,y2), … Равенство этого класса нулю (т. е. классу последовательности 0, 0, 0, ...) означает, что f(xn,yn)=0 для большинства n, т. е. что xn<yn для большинства *п.* Таким образом, чтобы выяс­нить, верно ли *х*<*у* для гипердействительных чисел *х* и y, нужно взять последовательности x0,x1,x2,…, и y0,y1,y2,… в классах *х* и *у* и выяснить, является ли множество тех *п,* при которых xn<yn большим.

Нам нужно было проверить, что 0<ε и что ε*<р* для любого стандартного положительного *р* (ε —класс последовательности 1, 1/2, 1/3, ...). Это просто:

0<ε, так как 0<*1/п* при всех *п* (а множество N большое), ε<*р,* так как 1/n<*р* для всех натураль­ных n, кроме конечного числа, а всякое множество с ко­нечным дополнением малое (свойство 6 “системы подсче­та голосов”). Отметим, что здесь мы впервые воспользо­вались свойством 6, до сих пор все наши рассуждения были справедливы и в случае “диктатуры” (когда боль­шими считаются те и только те множества, которые со­держат некоторое натуральное число *N).* В этом случае две последовательности эквивалентны, если совпадают их *N-е* члены, и все гипердействительные числа стандартны (класс последовательности x0,x1,x2,… совпадает со стан­дартным числом xN).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? – М., Наука, 1987. – 128с.

2. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. – М., Мир, 1980.

3. Успенский В.А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М., Знание, 1983. 61 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Математика, кибернетика” № 8 ).

4. Успенский В.А. Нестандартный анализ // Наука и жизнь, 1984. – №1. – с. 45-50.

5. Робинсон А. Введение в теорию моделей и математику алгебры. пер. с англ. – М., Наука, 1967.