**1. Краткое математическое описание методов расчёта**

**1.1. Общие положения**

Цифровой фильтр полностью описывается своим разностным уравнением:

 (1)

Для нерекурсивного цифрового фильтра  и уравнение принимает вид:

 (2)

Зная коэффициенты разностного уравнения, можно легко получить выражение для передаточной функции фильтра (для НЦФ):

 (3)

Для образа выходного сигнала НЦФ справедливо выражение

, (4)

где  – z-преобразования выходного и входного сигналов фильтра.

Зная выражение (4) и учитывая, что z-преобразование функции единичного скачка  равно 1, можно получить выражение для z-образа импульсной характеристики :

 (5)

Из (5) следует, что отсчеты импульсной характеристики НЦФ численно равны коэффициентам разностного уравнения НЦФ, а сама импульсная характеристика и передаточная функция связаны парой z-преобразований (прямым и обратным).

Заменив в (4) z на , получим комплексную частотную характеристику:

 (6)

Импульсная характеристика и комплексная частотная характеристика связаны парой преобразований Фурье:

 (7)

 (8)

Из комплексной частотной характеристики можно получить выражения для АЧХ и ФЧХ:

 (9)

 (10)

Во все вышеприведённые формулы входит интервал квантования . Чтобы от него избавиться, частоту обычно нормируют. Это можно сделать с помощью замены:

 (11)

Так как интервал определения , то интервал определения . Исходными данными для проектирования фильтра является его АЧХ. Как правило, в зонах неопределённости АЧХ некоторым образом доопределяют с тем, чтобы избежать явления Гиббса («выбросы» характеристики в точках разрыва первого рода – «скачках»). В простейшем случае доопределить АЧХ можно линейным законом. В этом случае АЧХ проектируемого полосового фильтра будет выглядеть таким образом.

Аналитически АЧХ будет записываться в виде:

 (12)

При проектировании часто полагают, что ФЧХ фильтра является линейной. В [1] показывается, что в этом случае импульсная характеристика фильтра является либо симметричной (), либо антисимметричной (). Учитывая, что порядок фильтра  может быть чётным и нечётным, существует четыре вида ИХ с линейной ФЧХ:

1. N – нечётное, ИХ – симметричная
2. N – чётное, ИХ – симметричная
3. N – нечётное, ИХ – антисимметричная
4. N – чётное, ИХ – антисимметричная

цифровой фильтр выборка частотный

**1.2 Метод частотной выборки**

Основная идея метода частотной выборки – замену в выражениях (7) и (8) непрерывную частоту дискретизированной. В этом случае выражения (7) и (8) превращаются в пару дискретных преобразований Фурье:

 (13)

 (14)

Существует 2 метода дискретизации частоты (выражения записаны для нормированной частоты):

 (15)

 (16)

Выражения (13) и (14) записаны для первого метода дискретизации частоты. По условию задания необходимо использовать второй метод дискретизации частоты, в этом случае выражение (14) приобретает вид:

 (17)

Из (17) следует, что для определения импульсной характеристики необходимо знать частотную характеристику. Её можно записать в показательной форме:

 (18)

 (19)

При чётном N:

 (20)

При нечётном N:

 (21)

Подставляя вместо  , по выражениям (20) и (21) можно найти , а из (17) – .

**1.3 Метод наименьших квадратов**

При расчете коэффициентов импульсной характеристики используется формула вида:



после чего решается система уравнений:

и находятся коэффициенты Ск.



Далее из найденных Ск можно найти коэффициенты импульсной характеристики:

 



**2. Расчётная часть**

**2.1 Расчёт методом частотной выборки**

**2.1.1 Расчёт импульсной характеристики**

Расчёт импульсной характеристики для нечётных N осуществлялся по формулам (21) и (17), для чётных – по формулам (20) и (17). Результаты расчёта импульсной характеристики для N=15, 25 и 32 представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчёта импульсной характеристики методом частотной выборки

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| i | Значение импульсной характеристики | | |
| N=15 | N=25 | N=32 |
| 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31 | 0,081  -0,013  0,025  -0,052  -0,303  0,03  0,46  0,03  -0,303  -0,052  0,025  -0,013  0,081 | 0,001497  0,001756  -0,02  -0,007456  -0,007554  0,028  0,061  -0,004905  0,034  -0,048  -0,297  -0,035  0,45  0,035  -0,297  -0,048  0,034  -0,004905  0,061  0,028  -0,007454  -0,007456  -0,02  0,001756  0,001497 | 0,001488  -0,008534  0,008698  -0,000256  0,003711  -0,011  0,015  -0,007875  -0,001266  0,053  0,029  0,0009025  0,04  -0,193  -0,224  0,321  0,321  -0,224  -0,193  0,04  0,0009025  0,029  0,053  0,001266  -0,007875  -0,015  -0,011  -0,003711  -0,000256  0,008698  -0,0008534  0,001488 |

**2.1.2 Расчёт АЧХ и ФЧХ**

Расчёт АЧХ и ФЧХ осуществлялся по формулам (9) и (10) для 50 значений частоты , взятой с шагом 0,01 (). На рисунках приведены графики рассчитанной АЧХ фильтра.



Для расчёта точности аппроксимации запишем функцию ошибки аппроксимации:

, (32)



В таблице 2 приведены результаты расчёта точности аппроксимации .

Таблица 2. Результаты расчета точности аппроксимации для метода частотной выборки



График функции точности аппроксимации для N=25

Максимальные ошибки аппроксимации (абсолютная погрешность) для трёх значений N приведены в таблице 3:

Абсолютная погрешность аппроксимации АЧХ, рассчитанной методом частотной выборки

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Абсолютная погрешность аппроксимации АЧХ | | |
| N=13 | N=25 | N=32 |
| 0,125 | 0,082 | 0,049 |

**2.2 Расчёт методом наименьших квадратов**

**2.2.1 Расчёт импульсной характеристики**

Результаты расчёта импульсной характеристики для N=13, 25 и 32 представлены в таблице. Учитывая симметрию импульсной характеристики, приведена только половина отсчётов.

Результаты расчёта импульсной характеристики методом наименьших квадратов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| i | Значение импульсной характеристики | | |
| N=13 | N=25 | N=32 |
| 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15  16 | 0,055  -0,004049  0,035  -0,042  -0,296  0,03  0,45 | -0,003929  -0,003499  -0,012  0,008469  -0,008832  -0,026  0,055  0,035  -0,042  -0,296  0,03  0,45 | 0,002208  -0,005211  0,003349  0,003189  -0,003929  -0,003499  -0,012  -0,008469  -0,008832  0,026  0,055  -0,004049  0,035  -0,042  -0,296  0,45  0,45 |

**2.2.2 Расчёт АЧХ и ФЧХ**

Расчёт АЧХ и ФЧХ осуществлялся по формулам (9) и (10) для 50 значений частоты , взятой с шагом 0,01 ().



Заданная по условию и рассчитанная АЧХ фильтра для N=25 (метод наименьших квадратов)

**2.2.3 Расчёт точности аппроксимации**

Точность аппроксимации оценивалась по формуле (32). В таблице (5) приведены результаты расчёта 

Результаты расчета точности аппроксимации для метода наименьших квадратов



В таблице 6 приведена максимальная (абсолютная) погрешность аппроксимации для различных значений N.

Абсолютная погрешность аппроксимации для метода наименьших квадратов

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Абсолютная погрешность аппроксимации АЧХ | | |
| N=135 | N=25 | N=32 |
| 0,125 | 0,057 | 0,051 |

**2.3 Сравнение методов расчёта**

Сравнивая результаты расчётов точности аппроксимации, приведённые в таблицах 2 и 6, можно сделать вывод, что метод наименьших квадратов обеспечивает более точную аппроксимацию при N=25 амплитудно-частотной характеристики по сравнению с методом частотной выборки. С увеличением порядка фильтра N точность аппроксимации увеличивается для обоих методов, но точность метода наименьших квадратов начинает уменьшаться по сравнению с методом частотной выборки.

**Заключение**

В данной курсовой работе был рассмотрен расчёт нерекурсивного цифрового фильтра двумя методами: методом наименьших квадратов и методом частотной выборки. Результаты расчётов точности аппроксимации для каждого метода позволяют сделать следующие выводы:

* Точность аппроксимации увеличивается с увеличением N (порядка фильтра)
* Метод наименьших квадратов обеспечивает более точную аппроксимацию при средних значениях N.