КУРСОВАЯ работа

Расчет напряжений деформаций в изотропном теле по заданному тензору напряжений

1. Исходные данные

1. Задан следующий тензор напряжений:

****МПа.

1. Направляющие косинусы площадки, по которой нужно вычислить напряжения, равны:

****.

## 1.1 Определение инвариантов напряженного состояния

Инвариантом называется величина, независящая от системы координат. В частности, напряженное состояние в любой точке является инвариантом, несмотря на то, что составляющие тензора в разных системах координат, т.е. напряжения, действующие по координатным площадкам, различны. Однако, имеются выражения, составленные из напряжений по координатным площадкам, которые остаются постоянными в любой системе координат. Эти выражения и называются инвариантами напряженного состояния в точке или инвариантами тензора напряжений.

 (1)

**1.2 Определение главных напряжений**

Главными напряжениями называются нормальные напряжения, действующие по площадкам, где отсутствуют касательные напряжения. Координатные оси, являющиеся нормалями к таким площадкам, называются главными осями тензора напряжений, а сами площадки – главными площадками.

Главные напряжения определяются из кубичного уравнения:

 (2)

Подставляя численные значения инвариантов тензора напряжений из(1), получаем:





Кубические уравнения общего вида могут иметь комплексные корни, уравнения для определения главных напряжений и главных деформаций всегда имеют три действительных корня. Решать их можно по-разному.

1. Можно сначала определить подбором один из корней уравнения, а затем разложить левую часть уравнения (2) на два сомножителя: линейный двучлен и квадратный трехчлен. После этого из решения квадратного уравнения определяются два оставшиеся корня.
2. Существует и аналитический способ решения, для этого используются формулы Кардано.

Воспользуемся вторым способом.

Пусть задано кубическое уравнения:

 (3)

После подстановки

 (4)

получим кубичное уравнение (приведенное):

 (5)

Здесь  и  вычисляются по формулам:

 (6)

Формулы Кардано для случая уравнения с тремя действительными корнями имеют вид:

 (7)

 (8)

Далее с помощью подстановки(4) в (3) находим корни исходного уравнения.

Решим наше уравнение (2):

**** **(9)**

Подстановка (4) с новыми обозначениями получает вид:

. (10)

Здесь изменен знак второго слагаемого подстановки потому, что****.

Подставляя (10) в (9) получим уравнение аналогичное (5):

 (11)

Здесь коэффициенты  и  вычисляются по формулам (6):

****

Далее по формулам (7) находим:

****

По формулам (8) находим корни уравнения (5):

****

Учитывая (10), находим корни исходного уравнения (9), являющимися главными напряжениями:

 (12)

В соответствии с правилом индексации главных напряжений введены обозначения:  - алгебраически максимальное напряжение;  - алгебраически среднее (минимаксное) напряжение;  - алгебраически минимальное напряжение.

Величины  и  вычислялись с точностью до третьего знака после запятой для того, чтобы в дальнейшем при решении систем уравнений, в которых от  зависят величины коэффициентов, избежать возможных больших погрешностей, если встретятся малые разности больших величин.

Тензор напряжений в главных осях имеет вид:

.

## 1.3 Определение положения главных осей тензора напряжений

Положение главных осей тензора напряжений определяется матрицей направляющих косинусов:

 (13)

Здесь первая строка матрицы представляет направляющие косинусы главной оси, по которой действует напряжение ; вторая строка - направляющие косинусы главной оси, по которой действует напряжение ; третья строка - направляющие косинусы главной оси, по которой действует напряжение . Все направляющие косинусы задаются в исходной (старой) системе координат, показанной на рис. 1

Направляющие косинусы главных осей находятся из системы уравнений:

 (14)

при условии

 (15)

Здесь  - направляющие косинусы главной оси тензора напряжений, вдоль которой действует напряжение .

В теории упругости (1) доказывается, что определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных () системы уравнений (13), равен нулю. Следовательно, три уравнения в (13) являются линейно зависимые: одно уравнение (любое) является следствием двух других. Поэтому для определения направляющих косинусов  любой главной оси нужно одно из уравнений удалить (любое) и к двум оставшимся добавить уравнение (14). Решив полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем направляющие косинусы , соответствующие главному напряжению . Положение оставшихся двух осей находят аналогично.

Нужно иметь в виду, что каждый из направляющих косинусов получается с двумя знаками. Знаки соответствуют повороту осей по часовой стрелке или против часовой стрелки. При этом главные оси занимают одно и то же положение, но направлены в противоположные стороны.

При определении положения главных осей нужно оставить одну систему знаков, конкретизировав при этом направления осей.

### 1.3.1 Вычисление направляющих косинусов

Для определения направляющих косинусов , соответствующих оси, вдоль которой действует напряжение , подставим в (14) и (15) ; при этом из (14) возьмем первые два уравнения (можно взять любые два):

 (16)

Сначала найдем отношения между направляющими косинусами; для этого систему уравнений приведем к виду:

 (17)

Решая подсистему, состоящую из первых двух уравнений, получим:

. (18)

Подставляя эти выражения в третье уравнение (17), найдем:

, (19)

откуда

.

На этом этапе решения задачи можно у  выбрать любой знак. Примем . Подставляя это значение в (18), получим:

. (20)

Углы, которые составляет первая главная ось тензора напряжений с исходными осями координат, находятся вычислением функции  от :

.

Вычисление 

Подставляя в (14) и (15)  и используя те же два уравнения из (14) (можно и другие), получим:

 (21)

Решая эту систему уравнений в той же последовательности, как и в п. 3.2.1, получим:

.

Здесь по-прежнему знак у  принят положительным, а знаки остальных направляющих косинусов определились решением подсистемы из первых двух уравнений (21).

Углы, которые составляет вторая главная ось с исходными осями координат, пока вычислять не будем. Может оказаться, что определитель матрицы направляющих косинусов будет равен **-1**, что соответствует левой системе координат. Для тог, чтобы получить правую систему координат, нужно будет у одной из осей поменять знаки направляющих косинусов.

### 1.3.2 Вычисление

Подставляя в (14) и (15)  и используя те же уравнения, получим:

 (22)

Решая эту систему, получим:

.

Соответствующие углы равны:

.

**1.4 Проверка правильности вычисления главных напряжений и положения главных осей тензора напряжений**

***Проверка правильности вычисления главных напряжений***

Для проверки правильности вычисленных главных напряжений определим инварианты тензора напряжений:



Как видим, инварианты получились такими же, как и в выражениях (1). Этот результат также подтверждает вывод о том, что напряженное состояние в точке нагруженного тела является инвариантным объектом.

***Проверка правильности вычисления положения главных осей тензора напряжений***

Проверка правильности вычисления положения главных осей тензора напряжений основана на свойствах матрицы направляющих косинусов (13). Она относится к *ортогональным* матрицам и обладает следующими свойствами:

1. Определитель ортогональной матрицы равен единице.
2. Сумма квадратов элементов, входящих в каждую строку (столбец) равна единице.
3. Если рассматривать каждую строку матрицы как вектор-строку, а каждый столбец – как вектор-столбец, то скалярные произведения двух разных векторов-строк (векторов-столбцов) равны нулю.

Воспользуемся первым свойством ортогональных матриц.

Подставив в (13) вычисленные направляющие косинусы, получим;

. (23)

Определитель этой матрицы равен единице:

.

Так как определитель получился равным **1**, то система координат – правая. Поэтому знаки направляющих косинусов остаются без изменения.

.

Соответствующие углы будут равны:

.

## 1.5 Вычисление максимальных касательных напряжений, полного, нормального и касательного напряжений по заданной площадке

***Вычисление максимальных касательных напряжений***

В теории упругости доказывается, что максимальные касательные напряжения действуют по двум взаимно перпендикулярным площадкам, расположенным под  к главным площадкам, по которым действуют главные нормальные напряжения  и.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Рис. 1. Максимальные касательные напряжения

***Вычисление полного, нормального и касательного напряжений по площадке с заданными направляющими косинусами***

Направляющие косинусы нормали  к заданной площадке равны:



Проекции полного напряжения, действующего на заданной площадке, на координатные оси найдем по формулам:

 (24)





Полное напряжение на этой площадке найдем по формуле:

.

Нормальное напряжение по этой площадке определим, спроектировав координатные составляющие на нормаль к площадке:

.

Касательное напряжение на этой площадке найдем по теореме Пифагора (см. рис. 2):

.



Рис. 2. Полное нормальное и касательное напряжения, действующие по заданной площадке