**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СВЕТОВОДАХ**

**1. Падение плоской волны на границу раздела двух сред**

Рассмотрим плоскую границу раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями и . Индексы i, r, t – относятся к падающей, отраженной и прошедшей волнам.

**1.1 Нормальное падение**

Для простоты напряженности поля плоской волны будем рассматривать как скалярные величины, подразумевая, что соответствующие векторы направлены так, как показано на рис. 1 (в начальный момент напряженность направлена в сторону отрицательного направления оси y, а напряженность – в сторону положительного направления оси z).

Волновые сопротивления и компоненты поля связаны следующими соотношениями

. (1)

Рис. 1. − Отражение плоской волны от границы раздела двух сред при

нормальном падении

Знак “–“ для отраженной волны появляется вследствие учета изменения направления распространения волны и принятой скалярной формы записи компонент поля.

На границе раздела должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей

. (2)

Последние выражения позволяют получить полезное соотношение

.

При отражении волны в среде 1 от границы со средой 2 полное волновое сопротивление (волновое сопротивления для полного поля) равно волновому сопротивлению среды 2.

Из (1) и (2) легко получить коэффициенты отражения и прохождения для напряженности электрического поля:

. (3)

Учитывая выражения для показателей преломления

получаем классические формулы

, (4)

где .

Выражение для вектора Пойнтинга и (3) позволяют получить формулы для коэффициентов отражения и прохождения по мощности

,

Прямые вычисления показывают, что

,

и это находится в полном согласии с законом сохранения энергии.

**1.2 Произвольное падение на границу раздела**

В этом случае необходимо рассмотреть два случая: Е – поляризации и Н- поляризации, которые отличаются ориентацией вектора Е падающей волны. При Е поляризации вектор в плоскости падения лежит вектор Е, а при Н поляризации – вектор Н. Однако рассмотрения двух случаев можно избежать, если воспользоваться принципом двойственности для уравнений Максвелла, согласно которому система уравнений Максвелла инвариантна относительно замены .

Этот принцип в нашем случае позволяет:

а) найти коэффициенты отражение и прохождения для магнитных полей, зная эти коэффициенты для электрических полей,

б) получить соответствующие выражения для случая Е поляризации, зная выражения для Н поляризации и наоборот.

Поэтому ниже мы рассмотрим только случай Н поляризации.

Рис. 2. − Наклонное падение плоской волны

Для упрощения процедуры нахождения R и T при наклонном падении плоской волны на границу раздела воспользуемся ещё одним соображением. В случае произвольного падения (рис. 2) можно всегда разложить волну на две плоские волны: одну, распространяющуюся в направлении ” -x”, вторую − в положительном направлении оси z. Для этого достаточно разложить поле Н в плоскости падения (пл. XZ) на две компоненты: Hx и Hz. Первая образует плоскую волну, распространяющуюся вдоль границы раздела и она не претерпевает никакого отражения. Вторая – плоскую волну, нормально падающую на границу раздела (с волновым числом , согласно рис. 2) и приводящую к появлению отраженной и прошедшей волн. Таким образом, мы опять приходим к нормальному падению и можем воспользоваться уже полученными ранее выражениями. Однако при этом нужно учесть, что для рассматриваемой нормально падающей волны, волновые сопротивления будут определяться уже другими соотношениями, которые имеют следующий вид:

Н поляризация

,

, (5)

Е поляризация

,

, (6)

Рис. 3. − Зависимость коэффициента отражения от угла падения

Учитывая все сказанное, по (3) и (4) с учетом (5) и (6) получим следующие зависимости коэффициентов отражения и прохождения от углов падения θ и преломления ϕ.

Н поляризация

, , (7)

Е поляризация

, . (8)

Это и есть классические формулы Френеля, которые мы получили достаточно просто.

Кривые зависимости коэффициентов отражения и прохождения от угла падения приведены на рис. 3.

Из (7), (8) и рис. 3. следуют известные закономерности.

1. Для Е поляризованной волны существует особый угол падения θB, называемый углом Брюстера, при котором коэффициент отражения равен нулю. Это явление часто используют для получения поляризованного света при отражении (в частности, в газовых лазерах с этой целью используют окно Брюстера).

2. В случае нормального падения Н поляризованной волны на оптически более плотную среду (η>1) она приобретает при отражении фазовый сдвиг, равный π.

3. При отражении Н поляризованной волны от поверхности оптически менее плотной среды (η<1) имеет место предельный угол падения θс, при котором выполняется условие

, (9)

и который соответствует полному внутреннему отражению, поскольку в этом случае .

Физические процессы, происходящие при углах больших чем θ=θс, требуют более тщательного рассмотрения в силу их важности для анализа направленного распространения волн.

**1.3 Полное внутреннее отражение**

Рассмотрим отражение Н поляризованной волны при θ > θс и при η < 1. Из закона Снеллиуса следует, что

, (10)

чисто мнимая величина. Положим , тогда согласно (7)

, (11)

где , . (12)

Из (11), (12) следуют два важных вывода

1. При углах падения больших или равных критическому углу θс имеет место полное внутренне отражение.

2. Отраженная волна приобретает фазовый сдвиг, зависящий от угла падения.

Чтобы более прояснить физическую картину происходящего, проанализируем энергетические соотношения. Рассмотрим подробнее волну в среде 2 (рис. 2). Будем считать напряженность электрического поля, вектор которой параллелен оси OY, вещественной величиной. Тогда, опять раскладывая вектор напряженности магнитного поля на две составляющие и получим что

 – вещественная величина,

 - мнимая величина

и соответствующие им компоненты вектора Пойнтинга во второй среде

 – вещественный,

 – мнимый.

Таким образом, вдоль оси z имеется поток распространяющейся энергии, а вдоль оси x – поток реактивной энергии. Это эквивалентно наличию неоднородной волны, распространяющейся вдоль границы раздела. Эквифазные поверхности этой волны – плоскости, перпендикулярные оси z, а поверхности постоянной амплитуды – плоскости, параллельные оси z. Действительно, для компонент волнового вектора нетрудно получить из рис. 2

, (13)

. (14)

Соотношение (14) показывает, что волна во второй среде обязательно должна экспоненциально затухать вдоль оси OX. Глубина ее проникновения определяется выражением

.

и она уменьшается с увеличением угла падения. Отметим, что δ обратно пропорционально частоте и это значительно отличается от зависимости глубины проникновения от частоты для среды с проводимостью (поглощающей среды).

Следовательно, качественно эволюцию физической картины, имеющей место при изменении угла падения Н поляризованной волны на границу раздела двух сред можно представить следующим образом. При обеих средах возникают плоские однородные волны, распространяющиеся под некоторыми углами к границе раздела. По мере роста θ направления распространения и скорости этих волн сближаются и при критическом угле падения направления их распространения и скорости становятся равными. Происходит как бы вырождение этих двух волн в одну плоскую однородную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела. Поскольку волна однородная, то ее поверхности постоянной фазы и амплитуды совпадают – это плоскости, перпендикулярные границе раздела. Однако при дальнейшем увеличении угла падения (θ>θс) часть этой волны, находящаяся во второй (менее плотной среде), начинает претерпевать изменения. Её амплитуда начинает уменьшаться по мере удаления от границы раздела, при этом скорость распространения вдоль границы раздела остается такой же как и в первой среде. Для части волны, находящейся в первой среде такого изменения не происходит – плоскости постоянной амплитуды и фазы по-прежнему совпадают. Таким образом, при получаем плоскую неоднородную волну, у которой в части пространства (в первой, более плотной, среде) поверхности постоянной фазы и амплитуды совпадают, а в менее плотной среде эти поверхности ортогональны. Кривые, иллюстрирующие зависимость фазы и амплитуды этой волны для двух углов падения: критического и больше критического, показаны на рис. 4.

Рис. 4. − Зависимости фазы и амплитуды от координаты x в сечении

z = const при полном внутреннем отражении

**2. Металлический световод**

**2.1 Оптическое приближение (концепция плоских волн)**

В этом разделе будет рассмотрен плоский металлический световод, образованный слоем диэлектрика, ограниченного двумя бесконечными, идеально проводящими металлическими плоскостями, параллельными друг другу и оси OZ. Выбор для изучения такого типа световода в какой-то степени ограничит общность результатов, поскольку: во-первых, реальные световоды имеют прямоугольную или круглую форму поперечного сечения, а во-вторых, ограничивающие поверхности как правило не являются металлическими. Однако, такой выбор значительно упростит все вычисления и позволит с наименьшими усилиями понять основные явления в них происходящие, а также проследить взаимосвязь между оптическим и электромагнитных подходами к изучению поля в световодах. (взаимосвязь между результатами, полученными при оптическом и электромагнитном походами к изучению поля в световодах). Более того, нам не понадобится подробное рассмотрение электродинамического подхода. Мы воспользуемся основными результатами, полученными в курсе электродинамики при изучении прямоугольного волновода, положив, что размер узкой стенки “b” стремится к бесконечности. Цилиндрические и другие типы оптических световодов будут рассмотрены в последующих разделах.

Геометрия металлического световода представлена на рис. 5. Он образован двумя бесконечными идеально проводящими плоскостями, уравнения которых таковы: x = ± a. Заполняющая его внутреннюю часть среда – вакуум. Будем рассматривать только Н поляризованные волны в геометрооптической терминологии (Н волны – в электродинамической).

Пусть в пространстве между проводящими плоскостями возбуждена каким-то образом плоская

однородная монохроматическая Н поляризованная волна с длиной волны λ.. Волновой вектор лежит в плоскости XOZ и образует с осью z угол θ. Назовем такую волну “восходящей”. Вектор параллелен оси Y - имеет только одну составляющую Е1y

.

В результате отражения от верхней плоскости появится отраженная (“нисходящая”) волна

,

где R – коэффициент отражения.

В любой точке пространства между плоскостями полное поле есть результат интерференции этих двух волн и напряженность электрического поля его определится выражением

. (16)

Рис. 5. − Металлический планарный (плоский) световод.

В силу граничных условий Еy должна обращаться в нуль при x = ± a. Выполнение граничного условия при x=a позволяет определить R

,

а при x = -a приводит к соотношению

, (17)

где m – целое положительное число.

Тогда выражение для полного поля запишется следующим образом

. (18)

Согласно (18) поле в световоде может существовать в виде набора плоских неоднородных бегущих вдоль оси OZ волн с постоянной распространения

. (19)

Каждой волне соответствует свой индекс “m”, определяющий характер распределения амплитуды в поперечной плоскости. Такие волны принято называть распространяющимися модами. Неоднородность их обусловлена тем, что поверхности постоянной амплитуды есть плоскости x =const, а эквифазные поверхности – плоскости z =const. Характер зависимости от координаты x будет различным для четных и нечетных m (рис. 6).

Пусть m четное число, т.е. m =2p, тогда

, p=1,2,3,... (20а)

если же m нечетное число (m = (2p-1))

, p=1,2,3,.... (20b)

Соотношение (17) можно рассматривать как дисперсионное уравнение. Оно позволяет определить постоянную распространения в световоде в зависимости от частоты и геометрических параметров системы. Из (17) и (19) следует

. (21)

В заключение еще раз подчеркнем, что в металлическом световоде электромагнитное поле в общем случае может существовать в виде дискретного множества плоских волн. При этом каждую волну (моду) из этого множества можно рассматривать (трактовать) либо как плоскую неоднородную волну, распространяющуюся вдоль продольной оси OZ с постоянной распространения β (21), либо как плоскую однородную волну, распространяющуюся в световоде, путем многократного отражения от стенок, на которые она падает под углом , где

.

Изучим более детально свойства указанных волн.

Рис. 6 − К структуре мод в плоском металлическом световоде

**2.2 Распространяющиеся и затухающие волны**

Пусть частота ω задана. Рассмотрим такой вопрос: под какими углами θ могут распространяться волны в световоде. Ответ следует из соотношения (17). Если ввести обозначение

, (22)

то

. (23)

Отсюда видно, что при в световоде вообще невозможно распространение света (электромагнитной волны), так как при реальных углах θ синус должен быть меньше единицы. Частота ωс получила название критической частоты. Иными словами, не существует такого угла θ, введенная под которым в световод, плоская волна с частотой стала бы в нем распространяться. Для каждой моды на заданной частоте существует свой угол, такой, что введенная под этим углом в световод волна будет в нем распространяться в виде соответствующей моды. Эти углы определяются очевидным равенством

.

Зависимости углов θ от частоты для различных мод распространения показаны на рис. 7.

Очевидно, что при ω = mωс m-ой моде соответствует угол θ = π/2 и распространение отсутствует. По мере роста ω (при ω> ωс) угол θ уменьшается и в пределе при ω → ∞ (λ → 0) стремится к нулю. Волна становится квазиосевой.

Рис. 7. − Зависимость угла падения от частоты для различных мод

Фазовая скорость соответствующей моды определяется соотношением

, (24)

а групповая скорость может быть рассчитана по формуле

. (25)

Зависимости и от частоты показаны на рис. 8.

Рис. 8. − Кривые дисперсии для металлического световода

Видно, что фазовая и групповая скорости мод зависят от частоты. Следовательно, в световоде имеет место дисперсия даже в отсутствии диспергирующей среды. Этот тип дисперсии получил название модовой дисперсии.

Все сказанное выше относилось к случаю ω> ωс. Выясним теперь, что будет происходить при ω < ωс. В этом случае согласно (17) sinθ > 1, θ должно быть мнимой величиной и

 (26)

Выражение для напряженности поля приобретает вид

.

Волна затухает вдоль продольной оси. Глубина проникновения волны в световод равна

. (27)

Величина δ тем меньше, чем меньше ω по сравнению с ωс.

Таким образом, под каким бы углом плоская волна не вводилась бы в световод при ω < ωс распространение будет отсутствовать. Поле проникает в световод в осевом направлении на расстояние порядка δ.

Общий итог проведенных исследований следующий. На заданной частоте в световоде может существовать определенной число мод, число которых зависит от геометрических размеров световода. Каждая мода обладает дисперсией. Общее поле будет линейной комбинацией этих мод с коэффициентами, зависящими от условий на концах световода (в частности от конструкции и свойств возбудителя – элемента ввода). При имеет место одномодовый режим.

**2.3 Электродинамический подход**

волна поляризованный световод диэлектрический

Как уже отмечалось выше изученной задаче полностью соответствует рассмотрение поля в прямоугольном волноводе, у которого размер стенки b → ∞. Из результатов, полученных в курсе электродинамики нетрудно установить, что в рассмотренном световоде могут существовать волны только типа . Каждой полученной нами m-ой распространяющейся моде соответствует волна Формулы, описывающие характер распределения поля в поперечном сечении, групповую и фазовую скорости, полностью идентичны полученным нами в оптическом приближении.

Следовательно, подход на основе концепции плоских волн (оптическое приближение) и электродинамический подход дают одни и те же результаты. Переход от одной концепции к другой осуществляется без труда, если учесть, что поперечное волновое число γ для волноводных типов волн и угол θ связаны соотношением

.

В случае металлического световода нет никаких причин отдать предпочтение какому-либо из подходов. Однако при анализе диэлектрических световодов это не так.

**3. Диэлектрический световод**

**3.1 Определение поля внутри световода**

Геометрия диэлектрического световода показана на рис. 9. Он предоставляет собой плоскую диэлектрическую пластину толщиной 2а с диэлектрической проницаемостью ε1 (показатель преломления n1) и окружен диэлектрическими полупространствами с проницаемостью ε1 (показатель преломления n2). Предположим. что ε1 >ε2 (n1 > n2). Такой выбор значений диэлектрических проницаемостей обусловлен тем, что только в этом случае существует полное внутренне отражение о границ раздела сред, подобно тому, что имеет место в металлическом световоде и, кроме того, большая часть энергии (или вся) распространяется вдоль продольной оси z.

Применим такой же метод анализа, что и для металлического световода. Несмотря на схожесть геометрии, результаты анализа должны быть другими, поскольку в случае диэлектрического световода граничные условия отличаются от граничных условий на стенках металлического световода (у последнего они однородные, т.е. на границах раздела).

Рис. 9. − Планарный диэлектрический световод

Введем в световод плоскую однородную волну. Её волновой вектор имеет две компоненты: вдоль оси z, - вдоль оси x. Во второй среде волновой вектор с компонентами и . Очевидно (ранее это было показано), что должно выполняться равенство .

Сразу ограничимся случаем когда , поскольку именно он представляет наибольший практический интерес, и рассмотри м опять только Н поляризованную волну. (Изучение случая Е поляризованной волны рекомендуется провести самостоятельно).

Напряженности электрического поля падающей и отраженной волн в первой среде по-прежнему описываются выражениями (16) и (17), а напряженность полного поля (18)

. (30)

В среде 2 для преломленного поля соответственно имеем

. (31)

В выражениях (30) и (31) – R и T коэффициенты отражения и прохождения соответственно,

,

в показателе экспоненты знак “-” – для , знак “+” – для .

Полное поле (30) должно удовлетворять граничным условиям (условиям непрерывности при переходе через границу раздела) при . Учтем вначале ГУ при . Поскольку ГУ в данном случае отличаются от ГУ для металлического световода мы не можем воспользоваться результатами из раздела 2. Однако, рассматриваемая ситуация в точности совпадает с той, которая имела место при изучении явления полного внутреннего отражения. Поэтому мы можем использовать все результаты этого раздела. При этом нужно учесть только некоторые отличия чисто геометрического характера: ось x направлена в противоположную; граница раздела смещена из начала координат на величину +a ; угол θ отчитывается не от нормали к границе раздела, а от самой границы. Учитывая эти отличия, из (12, 30) получим

, (32)

, (33)

где . (34)

Удовлетворяя теперь ГУ на нижней границе , приходим к соотношению

. (35)

Равенство (35) будет иметь место при

. (36)

Соотношение (36) является по сути дисперсионным уравнением.

Из (32) с учетом (36) можно записать окончательное выражение для полного поля внутри диэлектрического световода

.

Откуда при m четных

, (37а)

и при m нечетных

. (37b)

Итак, внутри диэлектрического световода, как и внутри металлического, суперпозиция падающей и отраженной волн дает бегущую вдоль оси z плоскую волну и стоячую волну вдоль оси x (или плоскую неоднородную волну распространяющуюся вдоль оси z). Возможны четные и нечетные волны, соответствующие четному или нечетному закону распределения вдоль оси x. По обе стороны световода имеются две бегущие вдоль его границы плоские неоднородные волны, амплитуда которых экспоненциально убывает при удалении от граничной поверхности (рис. 10).

Рис. 10. − Распределение амплитуды поля в поперечном сечении

диэлектрического световода: a) четная волна, b) нечетная волна

**3.2 Дисперсионное уравнение. Распространяющиеся моды**

Полученное ранее дисперсионное уравнение (36) можно привести к виду

, (38)

откуда для четных и нечетных m имеем

если , то . (39)

Решение его в аналитическом виде невозможно, ибо это трансцендентное уравнение. Однако можно предложить простой и наглядный графический способ его решения, если учесть, что γ и α должны удовлетворять условию, которое может быть получено из следующих очевидных соотношений (см. рис. 9)

Откуда искомое условие

. (40)

Графический способ проиллюстрируем для (рис. 11). Строим зависимость от согласно (39). Для каждой частоты решение должно удовлетворять также (40), т.е. должно лежать на пересечении построенных кривых с окружностью радиуса V, равного

. (41)

Величина V получила название приведенной частоты.

Таким образом, задавая ω, находим V, затем определяем точку пересечения с кривой зависимости от и соответствующее значение . С ростом частоты V увеличивается и, как видно из рисунка 11, увеличиваются и .

Каждое p определяет закон изменения поля вдоль поперечной координаты (37) и величину продольного волнового числа, поскольку ему соответствует свое значение . Каждая такая волна называется модой. Очевидно, что в диэлектрическом световоде на определенной частоте и при определенных размерах его может существовать дискретное множество мод. Каждая мода возникает на частоте при которой окружность впервые пересечет (или коснется) соответствующую кривую на рис. 11, то есть при выполнении условия

 (42)

Откуда критическая частота p-ой моды равна

 (43)

Величину ωс можно назвать критической частотой данного световода. Физический смысл ее таков – это критическая частота моды с индексом p=1.

Рис. 11. − К решению дисперсионного уравнения

Таким образом, новые моды возникают на частотах и существуют соответственно при . Для четных мод наблюдается существенное отличие от металлического световода, а именно, существование нулевой моды с p=0. Следовательно, для диэлектрического световода нет нижнего частотного порога.

Все распространяющиеся моды возникают, когда угол θ удовлетворяет условию , т.е. , где угол θс – критический угол. Иными словами, распространяющиеся моды могут существовать только в случае, когда «первоначальная» плоская волна вводится под углами .

Однако, какая мода (с каким номером) при этом возникает зависит от частоты (43). Возбудившаяся мода будет существовать для всех . С ростом частоты угол , под которым она распространяется, будет уменьшаться ( при ).

Рассмотрим как изменяется при этом структура и фазовая скорость возникшей моды. Вблизи критической частоты и . Откуда фазовая скорость её равна , т.е. фазовой скорости во внешней среде. Поскольку , то электрическое поле этой волны не убывает при удалении от границы раздела во вторую среду. В этой среде поле имеет вид однородной плоской волны (рис. 12.а). Мощность, распространяющаяся внутри световода, составляет малую часть от всей мощности волны. С ростом частоты и возрастают.

Рис. 12. − Изменение структуры моды (p=3) в зависимости от частоты

Глубина проникновения поля во вторую среду и угол уменьшаются. Мощность волны концентрируется внутри световода (рис. 12.б). В пределе, когда , величина также стремится к , а . Волна полностью удерживается в световоде и её фазовая скорость стремится к (рис. 12.в).

Рис. 13. − Дисперсионные кривые для диэлектрического световода

**3.2 Дисперсия**

Более детальное изучение зависимостей фазовой и групповой скорости от частоты при отсутствии соответствующих аналитических соотношений можно провести качественно, если воспользоваться следующим приемом. Ранее было определено, что для каждой моды фазовая скорость меняется от до при изменении частоты от критической до бесконечности. Следовательно, если построить зависимости, то они будут выглядеть следующим образом.

Изображенные кривые называют диаграммами дисперсии (кривыми дисперсии). Они позволяют достаточно легко определить зависимости и от .

Действительно, если, например, взять точку М на кривой, соответствующей основной моде, то ясно, что тангенс угла наклона луча ОМ, равный , есть не что иное как , а тангенс угла наклона касательной в этой точке есть . На основании рис. 13 нетрудно построить следующие зависимости.

Отметим следующие особенности поведения рассматриваемых величин по сравнению с аналогичными для металлического световода (рис. 8). Обе скорости на равны , а при стремятся к . Кривые на некоторой частоте имеют точку перегиба (например, при для основной моды). В этой точке производная от по частоте имеет экстремум. Зависимость имеет четко выраженный минимум при частоте соответствующей точке перегиба кривой . Наличие этого минимума можно легко установить, если проследить за углом наклона касательной к кривой на рис. 13. Так, если точка М соответствует частоте , то, очевидно, что касательная совпадает по направлению с прямой . По мере перемещения точки М вправо угол наклона касательной уменьшается. При этом видно, что есть область частот, в которой этот угол меньше, чем у луча , т.е. . Затем при дальнейшем перемещении точки М угол наклона касательной начинает стремится к направлению прямой .

Рис. 14. − Зависимость фазовой и групповой скоростей от частоты.

Частота соответствует точке перегиба кривой для основной

моды.