МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

СУМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ

К У Р С О В А Я Р А Б О Т А

ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

на тему:

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Сумы, 2005 г.

1. Метод Адамса

Этот метод численного интегрирования разработан Адамсом в 1855г. В последствии этот метод был забыт и вновь открыт в начале века. Популяризация метода Адамса и дальнейшее его усовершенствование связаны с именем А.Н. Крылова.

Изложим метод Адамса применительно к уравнению первого порядка

 (1)

с начальным условием

 (2).

Пусть x(i=0,1,2,….) – система равностоящих значений с шагом h и =. Очевидно, имеем

 (3).

В силу второй интерполяционной формулы Ньютона с точностью до разностей четвертого порядка получаем

 (4)

где .

Подставляя выражение (4) в формулу (3) и учитывая, что dx=hdq, будем иметь



Отсюда получаем экстраполяционную формулу Адамса

. (5)

Для начала процесса нужны четыре начальных значения , так называемый начальный отрезок, который определяют исходя из начального условия (2), каким-нибудь численным методом. Можно, например, использовать метод Рунге-Кутта. Зная эти значения, из уравнения (1) можно найти значения производных и составить таблицу разностей.

 (6)

Дальнейшие значения  (i=4,5,…) искомого решения можно шаг за шагом вычислять по формуле Адамса, пополняя по мере необходимости таблицу разностей (6).

Для контроля рекомендуется вычислив первое приближение для  по формуле



определить , подсчитать конечные разности.

, ,  (7)

и затем найти второе приближение по более точной формуле

 (8)

Если  и  отличаются лишь на несколько единиц последнего сохраняемого десятичного разряда, то можно положить  , а затем, найдя , перевычислив конечные разности (7). После этого, строго говоря, следует снова найти по формуле(8). Поэтому шаг h должен быть таким , чтобы этот пересчёт был излишним.

На практике шаг h выбирают столь малым, чтобы можно было пренебречь членом  в формуле (8).

Если же расхождение величин и  значительно, то следует уменьшить шаг h.

Обычно шаг h уменьшают в два раза. Покажем, как в этом случае, имея до некоторого значения i таблицу величин и, (ji) c шагом , можно просто построить таблицу величин (k=0,1,2…) с шагом . Для кратности введения сокращенные обозначения:

(k=0,1,2…).

На основе формулы (4) будем иметь

, (9)

где . Отсюда, полагая j=i-2 и q=1/2 и учитывая, что , находим

. (10)

Аналогично при j=i-1, q=1/2 из формулы (9) получаем, что аргументу  соответствует значение

. (11)

Что касается значений  и  , то они имеются в старой таблице. После этого составляем начальный отрезок для новой таблицы. и находим конечные разности:

 (k=-3,-2,-1),

 (k=-3,-2),

 (k=-3,).

Дальше таблица продолжается обычным путём, посредством соответствующей модификации формулы (5):

,

 (j=0,1,2,…).

Для работы на электронных счётчиках машинах формулу Адамса (5) выгодно применять в раскрытом виде. Учитывая, что







после приведения подобных членов имеем

,

причём .

2. Методы, основанные на применении производных высших порядков

До сих пор для численного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка

 (1)

с начальным условием

(2)

мы применяли формулы, в которых явно используется лишь первая производная  искомого решения.

Однако если использовать формулы, явно содержащие производные высших порядков от искомого решения, то можно указать методы, дающие более точный результат на данном промежутке без увеличения числа шагов.

Выведем соответствующие формулы, предполагая, что правая часть уравнения (1) дифференцируема достаточное число раз.

Пусть - значения искомого решения y=y(x) и, соответственно, значения его производных первого и второго порядков в точках . Располагая величины



в ряды по степеням h, находим:







Из полученных формул исключим члены, содержащие  и .

Для этого вторую формулу умножим на , а третью – на  и сложим с первой. Будем иметь:



Таким образом, с точностью до  имеем приближённую формулу

 (3)

Можно показать, что остаточный член формулы (3) равен  где  Аналогично имеем:

и



Отсюда



С другой стороны

 

Поэтому



Таким образом, с точностью до h5 имеем приближённую формулу

 (4)

Можно доказать, что остаточный член формулы (4) есть



где 

К формулам (3) и (4) присоединим выражения для производных:

 (5)

 (6)

Процесс численного дифференцирования уравнения (1) при наличии начального условия (2), использющий формулы (3) и (4), происходит следующим образом. Каким-либо методом вычисляем три начальные строки (начальная таблица):



Из формулы (4) при i=2 получаем первое приближение для :

 (7)

и, пользуясь формулами (5) и (6), находим для соответствующих производных  и  их первые приближения:

 и .

Второе приближение для  определяем при i=2 из формулы (3):

 (8)

После этого исправляем значения производных  и , подсчитывая их вторые приближения:

 и .

Для контроля ещё раз вычисляем по формуле (3) третье приближение  значения , используя найденные значения  и .

Если шаг h выбран подходящим, то перещёт не даёт нового результата, и в этом случае можно положить 

В противном случае следует уменьшить шаг. Аналогично находятся дальнейшие значения  при i>3.

Для получения начальных значений  и  обычно используют метод последовательных приближений или метод Рунге-Кутта, после чего нужные производные  и  (i=0,1,2) определяются по формулам (5) и (6).

Можна также применить следующий приём: сначала, используя данное начальное значение , непосредственно вычисляем

 и .

Тем самым будет заполнена первая строка начальной таблицы .

Далее на основании формулы Тейлера приближённо получаем



и, следовательно, можно будит найти

 и .

Пользуясь этими данными, уточняем значение  по формуле (3):



и затем перевычисляем значения  и . Тем самым заполняем вторую строку начальной таблицы. Аналогично, исходя из второй строки, находим элементы ,  и  последней, третей строки начальной таблицы.

Отметим, что если пересчёты элементов строк дают значительные расхождения, то этот приём не является надёжным. В таком случае следует или уменьшить шаг h вычислений, или же обратиться к более точным методам.

В заключение приведём формулы, обеспечивающие более высокую степень точности, но требующие вычисления, кроме второй, ещё и третьей производной искомого решения. А именно, используя Формулу Тейлера и употребляя приём, аналогичный указанному выше, получаем формулы

, (11)

где

, и

, (12)

где .

Формула (11) употребляется для нахождения первого приближения ; формула (12) даёт уточнённое значение . Само собой разумеется, что к последним двум формулам целесообразно прибегать тогда, когда форма дифференциального уравнения позволяет сравнительно просто находить вторую и третью производные от искомой функции y.

Приложение

program proizw\_w\_p;

uses crt;

const epsilon=0.05;

type mas=array[1..100] of real;

nabl=array [1..3] of real;

var i:integer;

x,y,y1,y2:mas;

nabl1,nabl2,nabl3:nabl;

a,h:real;

n:integer;

function f(x, y:real):real;

 begin

 f:=sqr(x)-sqr(y);

 end;

procedure metod(xi, yi, step: real; var rez:real);

var k1, k2, k3, k4:real;

begin

 k1:=F(xi,yi);

 k2:=F(xi+step/2,yi+k1\*step/2);

 k3:=F(xi+step/2,yi+k2\*step/2);

 k4:=F(xi+step,yi+k3\*step);

 rez:=yi+(step/6)\*(k1+2\*k2+2\*k3+k4)

end;

procedure osn\_metod(xi, yi, step:real;var yh22:real;var h:real);

var yh,yh2:real;

begin

 repeat

 metod(xi, yi,step, yh);

 metod(xi, yi, step/2, yh2);

 metod(xi, yh2, step/2, yh22);

 if abs(yh-yh22)/15>epsilon then step:=h/2;

 until abs(yh-yh22)/15<epsilon;

end;

procedure iteraziya(j:integer;xi,h:real);

begin

{первое приближение}

nabl1[1]:=y[j-3]+3\*(y[j-1]-y[j-2])+sqr(h)\*y2[j-1]-y2[j-2];

{производная первого приближения}

nabl1[2]:=sqr(xi)-sqr(nabl1[1]);

{вторая производная первого приближение}

nabl1[3]:=2\*(xi-nabl1[1]\*nabl1[2]);

{второе приближение}

nabl2[1]:=y[j-1]+(h/2)\*(y1[j-1]+nabl1[2])+((sqr(h))/12)\*(nabl1[3]-y2[j-1]);

{производная второго приближения}

nabl2[2]:=sqr(xi)-sqr(nabl2[1]);

{вторая производная второго приближения}

nabl2[3]:=2\*(xi-nabl2[1]\*nabl2[2]);

{третье приближение}

nabl3[1]:=y[j-1]+(h/2)\*(y1[j-1]+nabl2[2])-(sqr(h)/12)\*(nabl2[3]-y2[j-1]);

{производная третьего приближения}

nabl3[2]:=sqr(xi)-sqr(nabl3[1]);

{вторая производная третьего приближения}

nabl3[3]:=2\*(xi-nabl2[1]\*nabl2[2]);

end;

procedure solution(h:real);

begin

{==============Метод Рунге-Кута =================================}

a:=0;

i:=1;

y[1]:=1;

while i<4 do

begin

x[i+1]:=a+i\*h;

osn\_metod(x[i], y[i], h,y[i+1], h);

inc(i);

end;

{======Окончание метода Рунге-Кута =================================}

{============найдем первые и вторые производные===============}

for i:=1 to 3 do

begin

y1[i]:=sqr(x[i])-sqr(y[i]);

y2[i]:=2\*(x[i]-y[i]\*y1[i]);

end;

{=================================================================}

for i:=4 to n do

begin

iteraziya(i,x[i],h);

if abs(nabl3[1]-nabl2[1])<epsilon

 then

 begin

 y[i]:=nabl3[1];

 y1[i]:=nabl3[2];

 y2[i]:=nabl3[3];

 end

 else

 begin

 h:=h/2;

 if keypressed then halt;

 solution(h);

 end;

end;

end;

BEGIN

{=====================init==========================================}

clrscr;

write('введите количество значений, которые необходимо вычислить n= ');

readln(n);

h:=0.1;

{==================end of init=========================================}

for i:=1 to n do

begin

x[i]:=(i-1)\*h;

end;

solution(h);

 for i:=1 to n do

 begin

write('y[',i,']= ',y[i],' y"[',i,']= ',y1[i],' y""[',i,']= ',y2[i]);

writeln;

 end;

 writeln('');

 writeln('');

 write('Press <enter> to exit....');

readln;

END.