Министерство образования Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Пояснительная записка к курсовому проекту по дисциплине**

# «СПЕЦКУРС-3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

**Вариант №3**

#### 28 марта 2008 г.

**ТОМСК 2008**

**Содержание.**

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
| 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ | 6 |
| * 1. Математическое программирование | 6 |
| 1.2 Кратко о линейном программировании | 6 |
| 1.3 Основная задача линейного программирования | 8 |
| 2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ | 10 |
| 2.1 Теоретическое введение | 10 |
| 2.2 Методика решения задач ЛП графическим методом | 12 |
| 3.ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ПРАКТИКЕ | 13 |
| 3.1 Экономическая постановка задачи линейного программирования | 13 |
| 3.2 Построение математической модели | 14 |
| 3.3 Нахождение оптимального решения задачи с помощью линейного метода. | 16 |
| 4. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ | 18 |
| 4.1 Теоретическое введение | 18 |
| 4.2 Методика графического анализа чувствительности оптимального решения | 19 |
| 4.2.1 Первая задача анализа на чувствительность (анализ на чувствительность к правой части ограничений) | 19 |
| 4.2.2 Вторая задача анализа на чувствительность (увеличение запаса какого из ресурсов наиболее выгодно) | 25 |
| 4.2.3 Третья задача анализа на чувствительность (в каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции) | 26 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 30 |
| Список литературы | 32 |

**ВВЕДЕНИЕ**

Исследование операций – это математическая дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения наилучших решений в различных областях человеческой деятельности.

Термин "Исследование операций" ("Operation Research") заимствован из западной литературы. Сейчас, пожалуй, нельзя точно назвать, ни дату его возникновения, ни автора, да и вряд ли найдется исчерпывающее определение этого понятия.

Под операциями обычно понимают целенаправленные управляемые процессы. Природа их может быть различной - это могут быть военные действия, производственные процессы, коммерческие мероприятия, административные решения, и т.д. Что интересно - операции эти (совершенно несхожие по своей природе) могут быть описаны одними и теми же математическими моделями, более того, анализ этих моделей позволяет лучше понять суть того или иного явления и даже предсказать его дальнейшее развитие. Мир, как оказалось, устроен необычайно компактно (в информационном смысле), поскольку одна и та же информационная схема реализуется в самых разных физических (и не только физических) проявлениях. В кибернетике это называется термином "изоморфизм моделей".

Если бы не изоморфизм моделей, для каждой конкретной ситуации пришлось бы отыскивать собственный, уникальный метод решения, и исследование операций как научное направление не сформировалось бы. К счастью, дело обстоит иначе. Благодаря наличию общих закономерностей в развитии самых разных систем возможно исследование их математическими методами. Исследование операций как математический инструментарий, поддерживающий процесс принятия решений в самых разных областях человеческой деятельности, как совокупность средств, позволяющих обеспечить лицо, принимающее решение, необходимой количественной информацией, полученной научными методами, сформировалось на стыке математики и разнообразных социально-экономических дисциплин. Свой вклад в его становление внесли представители самых различных областей науки.

История возникновения исследования операций уходит корнями в далекое прошлое. Так, еще в 1885 году Фредерик Тейлор пришел к выводу о возможности применения научного анализа в сфере производства. Проблема, рассмотренная им, на первый взгляд, кажется тривиальной: "как оптимальным образом организовать работу землекопов?" Казалось бы, ответ давно известен - "Бери больше, кидай дальше, отдыхай, пока летит". Однако применение математического аппарата показало несостоятельность этого принципа. Оказалось, что оптимальный вес груза, позволяющий максимизировать количество перебрасываемого материала (при разумной экономии рабочей силы) значительно меньше того, что может поднять человек при максимальной нагрузке.

Пионером в области перевода сложных военно-стратегических задач на язык математики стал Фредерик Ланчестер. Одним из наиболее значительных результатов, полученных ученым, стало открытие в 1916 г. так называемого квадратичного закона, количественно связывающего достижение победы с двумя основными факторами: численным превосходством живой силы и эффективностью оружия. Было показано, что при одновременном вступлении в бой численное превосходство в живой силе более важно, чем применение более совершенного вооружения, поскольку главную роль играет сосредоточение собственных войск и расчленение сил противника. Классическим примером использования квадратичного закона Ланчестера является тактика Нельсона в сражении при Трафальгаре.

В 1917 году датский математик А.К.Эрланг, работавший в телефонной компании, поставил задачу минимизации потерь времени на установление телефонной связи. Полученные им результаты стали основополагающими принципами в теории телефонной связи. Формулы Эрланга (среднее время ожидания вызова и др.) были приняты министерством связи Англии в качестве стандартов для расчета эффективности телефонных линий. Идеи Эрланга почти на полвека предвосхитили современные теории расчета телефонных узлов.

В 1930 г. Г.Левинсон начал применять научный анализ к решению задач, возникающих в торговле. Методика исследования операций была использована для исследования эффективности рекламы, размещения товаров, влияния конъюнктуры на номенклатуру и количество проданных товаров.

В годы второй мировой войны исследование операций широко применялось для планирования боевых действий. Так, специалисты по исследованию операций работали в командовании бомбардировочной авиации США, дислоцированном в Англии. Ими исследовались многочисленные факторы, влияющие на эффективность бомбометания. Были выработаны рекомендации, приведшие к 4-х-кратному повышению эффективности бомбометания.

В начале войны боевое патрулирование самолетов союзников для обнаружения кораблей и подводных лодок противника носило неорганизованный характер. Привлечение к командованию специалистов по исследованию операций позволило установить такие маршруты патрулирования и такое расписание полетов, при которых вероятность оставить объект незамеченным была сведена до минимума. Полученные рекомендации были применены для организации патрулирования над Южной частью Атлантического океана с целью перехвата немецких кораблей с военными материалами. Из пяти вражеских кораблей, прорвавших блокаду, три были перехвачены на пути из Японии в Германию, один был обнаружен и уничтожен в Бискайском заливе и лишь одному удалось скрыться благодаря тщательной маскировке.

Мы привели лишь два примера использования методов исследования операций в военной практике. Число их очень велико. В годы войны все эти работы по применению были совершенно секретны, в последствии многие из них нашли свое отражение в специальной литературе.

По окончании второй мировой войны группы специалистов по исследованию операций продолжили свою работу в вооруженных силах США и Великобритании. Публикация ряда результатов в открытой печати вызвала всплеск общественного интереса к этому направлению. Возникает тенденция к применению методов исследования операций в коммерческой деятельности, в целях реорганизации производства, перевода промышленности на мирные рельсы. На развитие математических методов исследования операций в экономике ассигнуются миллионы долларов.

В Великобритании национализация некоторых видов промышленности создала возможность для проведения исследований экономических на базе математических моделей в общегосударственном масштабе. Исследование операций стало применяться при планировании и проведении некоторых государственных, социальных и экономических мероприятий. Так, например, исследования, проведенные для министерства продовольствия, позволили предсказать влияние политики правительственных цен на семейный бюджет.

В США внедрение методов исследования операций в практику управления экономикой происходило несколько медленнее - но и там многие концерны вскоре стали привлекать специалистов такого рода для решения проблем, связанных с регулированием цен, повышением производительности труда, ускорением доставки товаров потребителям и пр. Лидерство в области применения научных методов управления принадлежало авиационной промышленности, которая не могла не идти в ногу с растущими требованиями к ВВС. В 50-е-60-е годы на Западе создаются общества и центры исследования операций, выпускающие собственные научные журналы, ряд американских университетов включает эту дисциплину в свои учебные планы.

В настоящее время в рамках исследования операций сформированы отдельные самостоятельные направления - линейное программирование, выпуклое программирование, теория игр, теория массового обслуживания, и др.

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Целью нашего курсового проекта является решение задачи линейного программирования графическим методом.

* 1. **Математическое программирование.**

Математическое программирование ("планирование")– это раздел математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений функции, на аргументы которой наложены ограничения. Методы математического программирования используются в экономических, организационных, военных и др. системах для решения так называемых **распределительных задач**. Распределительные задачи (РЗ) возникают в случае, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой из намеченных работ эффективным образом и необходимо наилучшим образом распределить ресурсы по работам в соответствии с выбранным критерием оптимальности.

* 1. **Кратко о линейном программировании.**

Что же такое линейное программирование? Это один из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования. Именно линейное программирование явилось тем разделом, с которого начала развиваться сама дисциплина «математическое программирование». Термин «программирование» в названии дисциплины ничего общего с термином «программирование (т.е. составление программ) для ЭВМ» не имеет, так как дисциплина «линейное программирование» возникла еще до того времени, когда ЭВМ стали широко применяться при решении математических, инженерных, экономических и других задач. Термин «линейное программирование» возник в результате неточного перевода английского «linear programming». Одно из значений слова «programming» - составление планов, планирование. Следовательно, правильным переводом «linear programming» было бы не «линейное программирование», а «линейное планирование», что более точно отражает содержание дисциплины. Однако, термин линейное программирование, нелинейное программирование и т.д. в нашей литературе стали общепринятыми.

Итак, линейное программирование возникло после Второй мировой войны и стал быстро развиваться, привлекая внимание математиков, экономистов и инженеров благодаря возможности широкого практического применения, а так же математической «стройности».   
       Можно сказать, что линейное программирование применимо для построения математических моделей тех процессов, в основу которых может быть положена гипотеза линейного представления реального мира: экономических задач, задач управления и планирования, оптимального размещения оборудования и пр.

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств. Кратко задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом: найти вектор значений переменных, доставляющих экстремум линейной целевой функции при *m* ограничениях в виде линейных равенств или неравенств.

  Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации. К числу задач линейного программирования можно отнести задачи:

* рационального использования сырья и материалов; задачи оптимизации раскроя;
* оптимизации производственной программы предприятий;
* оптимального размещения и концентрации производства;
* составления оптимального плана перевозок, работы транспорта;
* управления производственными запасами;
* и многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

Так, по оценкам американских экспертов, около 75% от общего числа применяемых оптимизационных методов приходится на линейное программирование. Около четверти машинного времени, затраченного в последние годы на проведение научных исследований, было отведено решению задач линейного программирования и их многочисленных модификаций.

Первые постановки задач линейного программирования были сформулированы известным советским математиком Л.В.Канторовичем, которому за эти работы была присуждена Нобелевская премия по экономике.

В настоящее время линейное программирование является одним из наиболее употребительных аппаратов математической теории оптимального принятия решения.

Итак, линейное программирование - это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции.

**1.3 Основная задача линейного программирования**

*Основная задача линейного программирования* (ОЗЛП) ставится следующим образом: Имеется ряд переменных . Требуется найти такие их неотрицательные значения, которые удовлетворяли бы системе линейных уравнений:



{1.1}



и, кроме того, обращали бы в минимум линейную *целевую функцию* (ЦФ)



Очевидно, случай, когда ЦФ нужно обратить не в минимум, а в максимум, легко сводится к предыдущему, если изменить знак функции и рассмотреть вместо нее функцию



*Допустимым решением* ОЗЛП называют любую совокупность переменных , удовлетворяющую уравнениям (1.1).



*Оптимальным решением* называют то из допустимых решений, при котором ЦФ обращается в минимум.

На практике ограничения в задаче линейного программирования часто заданы не уравнениями, а неравенствами. В этом случае можно перейти к основной задаче линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования с ограничениями-неравенствами, которые имеют вид

{1.2}



и являются линейно-независимыми. Последнее означает, никакое из них нельзя представить в виде линейной комбинации других. Требуется найти , которые удовлетворяют неравенствам и обращают в минимум



Введём уравнения:

{1.3}  
  
где - добавочные переменные, которые также как и являются неотрицательными.



Таким образом, имеем общую задачу линейного программирования - найти неотрицательные , чтобы они удовлетворяли системе уравнений (1.3) и обращали в минимум .



Коэффициенты в формуле (1.3) перед равны нулю.



**2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

**2.1. Теоретическое введение**

Графический метод довольно прост и нагляден для решения задач линейного программирования с двумя переменными. Он основан на *геометрическом* представлении допустимых решений и ЦФ задачи.

Каждое из неравенств задачи линейного программирования (1.2) определяет на координатной плоскости некоторую полуплоскость (рис.2.1), а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется *областью допустимых решений* (ОДР). ОДР всегда представляет собой *выпуклую*фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок АВ принадлежит ей. ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучом, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи (1.2) ОДР является пустым множеством.



Все вышесказанное относится и к случаю, когда система ограничений (1.2) включает равенства, поскольку любое равенство



можно представить в виде системы двух неравенств (см. рис.2.1)



ЦФ при фиксированном значении определяет на плоскости прямую линию . Изменяя значения L, мы получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня*.



Это связано с тем, что изменение значения L повлечет изменение лишь длины отрезка, отсекаемого линией уровня на оси (начальная ордината), а угловой коэффициент прямой останется постоянным (см.рис.2.1). Поэтому для решения будет достаточно построить одну из линий уровня, произвольно выбрав значение L.



Вектор с координатами из коэффициентов ЦФ при и перпендикулярен к каждой из линий уровня (см. рис.2.1). Направление вектора совпадает с направлением*возрастания* ЦФ, что является важным моментом для решения задач. Направление*убывания* ЦФ противоположно направлению вектора.



Суть графического метода заключается в следующем. По направлению (против направления) вектора в ОДР производится поиск оптимальной точки . Оптимальной считается точка, через которую проходит линия уровня , соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции . Оптимальное решение всегда находится на границе ОДР, например, в последней вершине многоугольника ОДР, через которую пройдет целевая прямая, или на всей его стороне.



При поиске оптимального решения задач линейного программирования возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи; существует бесконечное множество решений (альтернативный оптиум); ЦФ не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

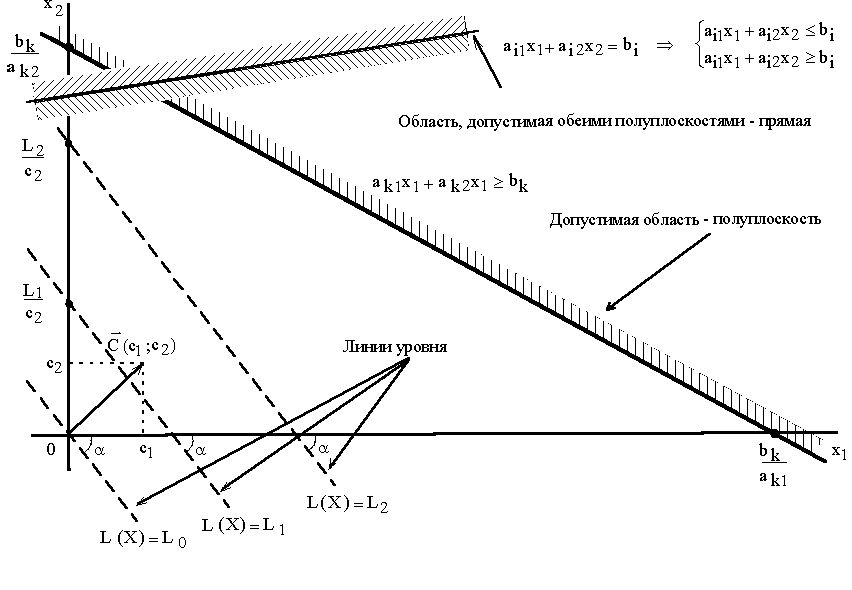


Рисунок 2.1 Геометрическая интерпретация ограничений и ЦФ задачи.

### 2.2. Методика решения задач ЛП графическим методом.

1. В ограничениях задачи (1.2) заменить знаки неравенств знаками точных равенств и построить соответствующие прямые.
2. Найти и заштриховать полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств задачи (1.2). Для этого нужно подставить в конкретное неравенство координаты какой-либо точки [например, (0;0)], и проверить истинность полученного неравенства.

*Если*неравенство истинное,

*то*    надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку;

*иначе* (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку и должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси и правее оси , т.е. в I-м квадранте.



Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой. Поэтому необходимо выделить на графике такие прямые.

1. Определить ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделить ее. При отсутствии ОДР задача не имеет решений.
2. Если ОДР – не пустое множество, то нужно построить целевую прямую, т.е. любую из линий уровня (где L – произвольное число, например, кратное и , т.е. удобное для проведения расчетов). Способ построения аналогичен построению прямых ограничений.



1. Построить вектор , который начинается в точке (0;0) и заканчивается в точке . Если целевая прямая и вектор построены верно, то они будут *перпендикулярны*.



1. При поиске максимума ЦФ необходимо передвигать целевую прямую *в направлении* вектора , при поиске минимума ЦФ – *против направления* вектора . Последняя по ходу движения вершина ОДР будет точкой максимума или минимума ЦФ. Если такой точки (точек) не существует, то можно сделать вывод о *неограниченности ЦФ на множестве планов* сверху (при поиске максимума) или снизу (при поиске минимум).



1. Определить координаты точки max (min) ЦФ и вычислить значение ЦФ . Для вычисления координат оптимальной точки необходимо решить систему уравнений прямых, на пересечении которых находится .



**3.** **ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ПРАКТИКЕ.**

**3.1 Экономическая постановка задачи линейного программирования**

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем первой линии − 60 изделий, второй линии − 80 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 15 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели − 10 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 950 единиц. Прибыли от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равны 40$ и 20$ соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей на основе графического решения задачи.

**3.2 Построение математической модели.**

*Переменные задачи*

В задаче  требуется установить, сколько радиоприемников первой и второй модели надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются *суточные* *объемы производства* каждого типа радиоприемников:

 – суточный объем производства радиоприемников первой модели, [шт/сутки];



 – суточный объем производства радиоприемников второй модели, [шт/сутки];



*Целевая функция*

Цель задачи  – добиться максимального дохода от реализации продукции. Т.е. критерием эффективности служит параметр *суточного* *дохода*, который должен стремиться к *максимуму*.Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи радиоприемников обоих моделей, необходимо знать:

* их объемы производства, т.е. и радиоприемников в сутки;



* прибыль от их реализации  – согласно условию, соответственно 40 и 20 $.

Таким образом, доход от продажи суточного объема производства радиоприемников первой модели равен $ в сутки, а от продажи радиоприемников второй модели – $  в сутки. Поэтому запишем ЦФ в виде суммы дохода от продажи радиоприемников первой и второй модели:



[$/сутки]



*Ограничения*

Возможные объемы производства радиоприемников и ограничиваются следующими условиями:



* количество элементов электронных схем, израсходованное в течении суток на производство радиоприемников обоих моделей, не может превышать суточного запаса этих элементов на складе;
* суточный объем первой технологической линии (производство радиоприемников первой модели) не может превышать 60 шт в сутки, второй (производство радиоприемников второй модели) – 80 шт;
* объемы производства радиоприемников не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на 3 группы, обусловленные:

1) расходом элементов электронных схем;

2) суточным объемом технологических линий;

3)неотрицательностью объемов производства.

Запишем эти ограничения в *математической* форме:

1. Т.к. из условия на радиоприемники первой и второй модели необходимо 15 и 20 элементов соответственно, то данное ограничение имеет вид:

[шт/сутки]



1. Ограничения по суточному объему первой и второй технологических линий имеют вид:

[шт/сутки]



1. Неотрицательность объемов производства задается как

.



Таким образом, *математическая модель* этой задачи имеет вид



**3.3 Нахождение оптимального решения задачи с помощью линейного метода.**

Математическую модель задачи о радиоприёмниках мы нашли на предыдущем шаге:



Построим прямые ограничений, для чего вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат (рис.3.1).



прямая (1) – точки (0;95) и (63,(3);0), прямая (2) проходит через точку параллельно оси , прямая (3) проходит через точку параллельно оси .

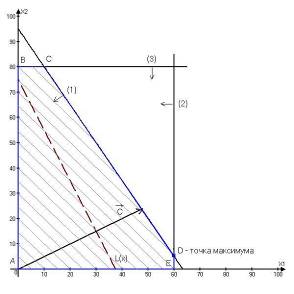


Рис.3.1. Графическое решение задачи о производстве радиоприемников.

Определим ОДР. Например, подставим точку (0;0) в исходное ограничение (1), получим , что является истинным неравенством, поэтому стрелкой обозначим полуплоскость, *содержащую* точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (1). Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений (см. рис.3.1). Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник ABCDE.



Целевую прямую можно построить по уравнению



Точки пересечения с осями – (0;75) и (37,5;0)

Строим вектор из точки (0;0) в точку (40;20). Точка D – это последняя вершина многоугольника допустимых решений ABCDE, через которую проходит целевая прямая, двигаясь *по направлению* вектора . Поэтому D – это точка максимума ЦФ. Определим координаты точки D из системы уравнений прямых ограничений (1) и (2)



Получили точку D(60;5) [шт/сутки].

Максимальное значение ЦФ равно [$/сутки].



Таким образом, наилучшим режимом работы предприятия является ежесуточное производство радиоприемников первой модели в количестве60 штук и радиоприемников второй модели в количестве 5 штук. Доход от продажи составит 2500$ в сутки.

**4.** **АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

### 

### 4.1. Теоретическое введение

Неизбежное колебание значений таких экономических параметров, как цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке и т.д. может привести к неоптимальности или непригодности прежнего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится анализ чувствительности, т.е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение задачи ЛП.

Для решения задач анализа чувствительности ограничения линейной модели классифицируются следующим образом. *Связывающие* ограничения проходят черезоптимальную точку. *Несвязывающие* ограничения не проходят черезоптимальную точку. Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют *дефицитным***,** а ресурс, представляемый несвязывающим ограничением – *недефицитным*. Ограничениеназывают *избыточным* в том случае, если его исключение не влияет на ОДР и, следовательно, на оптимальное решение. Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

**1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов**:

* на сколько можно увеличить (ограничения типа ) запас *дефицитного* ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?



* на сколько можно уменьшить (ограничения типа ) запас *недефицитного* ресурса при сохранении оптимального значения ЦФ?



**2. Увеличение** (ограничения типа ) **запаса какого из ресурсов наиболее выгодно**?



**3. Анализ изменения коэффициентов** **ЦФ:** каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

**4.2. Методика графического анализа чувствительности оптимального решения.**

#### 4.2.1. Первая задача анализа на чувствительность (анализ на чувствительность к правой части ограничений)

Проанализируем чувствительность оптимального решения задачи о производстве радиоприемников. ОДР задачи (рис.3.1) – многоугольник ABCDE. В оптимальной точке D пересекаются прямые (1) и (2). Поэтому ограничения (1) и (2) являются*связывающими*, а соответствующие им ресурсы (суточный объем элементов электронных схем и производительность первой технологической линии) – *дефицитными*.

Рассмотрим экономический смысл этих понятий. Точка максимума ЦФ D соответствует суточному производству 60 шт радиоприемников первой модели и 5 шт радиоприемников второй модели. В производстве радиоприемников используются однотипные элементы электронных схем. Суточный запас на складе этих элементов – это правая часть связывающего ограничения (1) (950 шт/сутки). Согласно этому ограничению, на производство в точке D расходуется

[шт элементов/сутки](1).



Аналогично видим, что производительность первой технологической линии - это правая часть связывающего ограничения (2) (60 шт/сутки). Согласно этому ограничению в точке D данная линия производит 60 радиоприемников первой модели в сутки.

Таким образом, понятие "*связывающие* *ограничения*" (1) и (2) означает, что при производстве радиоприемников в точке D(60;5) запасы элементов электронных схем расходуются *полностью****,*** а так же производительность первой технологической линии используется *в полном объеме****.*** По этой причине невозможно дальнейшее наращивание производства. В этом заключается экономический смысл понятия *дефицитности* ресурсов, т.е. если предприятие сможет увеличить суточные запасы элементов электронных схем или производительность первой технологической линии, то это позволит увеличить выпуск радиоприемников. В связи с этим возникает вопрос: до какого уровня целесообразно увеличить данные ресурсы, и на сколько при этом увеличится *оптимальное* производство радиоприемников?

*Правило №1*

**Чтобы** графически определить максимальное увеличение запаса дефицитного ресурса, вызывающее *улучшение* оптимального решения,

**необходимо** передвигать соответствующую прямую в направлении *улучшения* ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет *избыточным*.

При прохождении прямой (1) через точку К (рис.4.1) многоугольник ABKE становится ОДР, а ограничение (1) – избыточным. Действительно, если удалить прямую (1), проходящую через точку К, то ОДР ABKE не изменится. Точка К становится *оптимальной*, в этой точке ограничения (2) и (3) становятся *связывающими.*

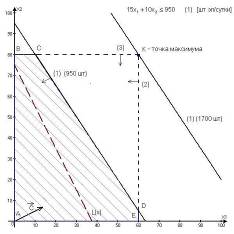


Рис.4.1. Анализ увеличения суточного запаса элементов электронных схем

*Правило №2*

**Чтобы** численно определить максимальную величину запаса дефицитного ресурса, вызывающую улучшение оптимального решения,

**необходимо:**

1) определить координаты точки , в которой соответствующее ограничение становится избыточным;



2) подставить координаты в левую часть соответствующего ограничения.



Координаты точки К(60;80) находятся путем решения системы уравнений прямых (2) и (3). Т.е. в этой точке предприятие будет производить 60 шт радиоприемников первой модели и 80 шт радиоприемников второй модели. Подставим и в левую часть ограничения (1) и получим максимально допустимый запас элементов электронных схем



[шт эл/сутки].



Дальнейшее увеличение запаса элементов электронных схем нецелесообразно, потому что это *не изменит* ОДР и *не приведет* к другому оптимальному решению (см. рис.4.1). Доход от продажи радиоприемников в объеме, соответствующем точке К, можно рассчитать, подставив ее координаты в выражение ЦФ

[$/сутки].



Рассмотрим вопрос о целесообразности увеличения производительности первой технологической линии. Согласно правилу №1, соответствующее ограничение (2) становится избыточным в точке J, в которой пересекаются прямая (1) и ось переменной (рис.4.2). Многоугольник ABCJ становится ОДР, а точка J(63,33;0) (или (63;0)-целочисленное решение) – оптимальным решением.

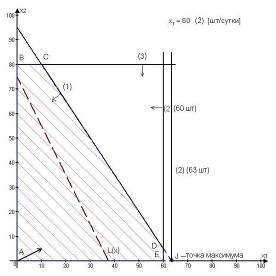


Рис.4.2. Анализ увеличения производительности первой технологической линии

В точке J выгодно производить только радиоприемники первой модели (63 шт в сутки). Доход от продажи при этом составит

[$/сутки]



Чтобы обеспечить такой режим работы, согласно правилу №2, производительность первой технологической линии надо увеличить до величины

[шт/сутки].



Ограничение (3) является *несвязывающим*, т.к. не проходит через оптимальную точку D (см. рис.4.3). Соответствующий ему ресурс (производительность второй технологической линии) является *недефицитным*. С экономической точки зрения это означает, что в данный момент уровень производительности второй технологической линии *непосредственно* не определяет объемы производства. Поэтому некоторое его колебание может никак не повлиять на оптимальный режим производства в точке D.

Например, увеличение (уменьшение) суточного объема второй технологической линиибудет соответствовать перемещению прямой ограничения (3) вверх (вниз). Перемещение прямой (3) вверх никак не может изменить точку D максимума ЦФ. Перемещение же прямой (3) вниз не влияет на существующее оптимальное решение *только до пересечения* с точкой D (см. ниже правило №3). Из рис.4.3 видно, что дальнейшее перемещение (3) приведет к тому, что точка D будет за пределами новой ОДР, выделенной более темным цветом. Кроме того, любое оптимальное решение для этой новой ОДР будет хуже точки D.

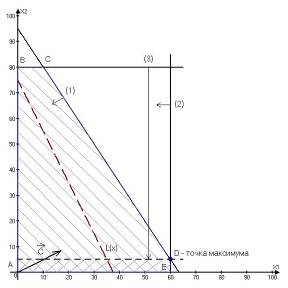


Рис.4.3. Анализ уменьшения производительности второй технологической линии

*Правило №3*

**Чтобы** определить максимальное уменьшение запаса недефицитного ресурса, *не меняющее* оптимальное решение,

**необходимо** передвигать соответствующую прямую *до пересечения* *с* *оптимальной* точкой.

*Правило №4*

**Чтобы** *численно* определить минимальную величину запаса недефицитного ресурса, не меняющую оптимальное решение,

**необходимо** подставить координаты *оптимальной* точки в *левую часть* соответствующего ограничения.

Чтобы выяснить, до каких пределов уменьшение производительности второй технологической линии не повлияет на производство в точке D, используем правило №4 Подставляем в левую часть ограничения (3) координаты точки D, получаем

[шт/сутки].



Делаем вывод: предельный уровень, до которого может уменьшиться объем второй технологической линии, и при котором не изменится оптимальность полученного ранее решения, равен 5 шт радиоприемников в сутки.

Результаты решения первой задачи анализа оптимального решения на чувствительность представлены в табл.4.1.

Таблица 4.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Тип ресурса | Max  изменение ресурса,  , шт/сутки | Max  изменение  дохода,  ,  $/сутки | Ценность  дополнительной  единицы ресурса  , $/шт |
| (1) | Дефицитный | 1700-950=+750 | 4000-2500=+1500 |  |
| (2) | Дефицитный | 63-60=+3 | 2520-2500=+20 |  |
| (3) | Недефицитный | 5-80=-75 | 2500-2500=0 |  |

#### 4.2.2. Вторая задача анализа на чувствительность (увеличение запаса какого из ресурсов наиболее выгодно)

Анализ табл.4.1 показывает, что к улучшению оптимального решения, т.е. к увеличению суточного дохода приводит увеличение *дефицитных* ресурсов. Для определения выгодности увеличения этих ресурсов используют понятие *ценности дополнительной единицы i-го ресурса*



где – максимальное приращение оптимального значения ЦФ;  – максимально допустимый прирост объема *i*-го ресурса.



Например, из табл.4.1 следует, что увеличение суточного запаса элементов электронных схем (ограничение (1)) на 1 шт позволит получить дополнительный доход, равный 2 $/сутки, в то время как увеличение производительности первой технологической линии (ограничение (2)) на 1 шт принесет 6,7 $/сутки. Недефицитные ресурсы имеют нулевые ценности, поскольку изменение этих ресурсов не приводит к увеличению дохода.

*Вывод*: дополнительные вложения в первую очередь необходимо направлять на увеличение суточного объема первой технологической линии, а лишь потом на увеличение суточного запаса элементов электронных схем. Изменять недефицитные ресурсы нет необходимости.

**4.2.3. Третья задача анализа на чувствительность (в каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции)**

Изменение цен на продукцию, т.е. изменение коэффициентов ЦФ, представляется на графике вращением целевой прямой вокруг оптимальной точки. Так, при увеличении коэффициента ЦФ или уменьшении целевая прямая вращается *по* часовой стрелке. При уменьшении или же увеличении целевая прямая вращается *против* часовой стрелки (рис.4.4).



При таких поворотах точка D будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой *не* *выйдет за пределы*, определяемые наклонами прямых ограничений (1) и (2). Так, например, если наклон целевой прямой совпадет с наклоном прямой (1), то оптимальным решением будут точки отрезка СD. При совпадении c прямой (2) оптимальным решением будут точки отрезка DE.

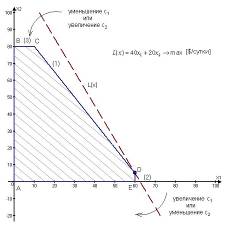


Рис.3.4. Анализ изменения цен

Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение может достигаться при различных значениях переменных. Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1), то оптимальной точкой станет точка C. Допустим, что цена на радиоприемники второй модели не меняется, т.е. зафиксируем значение целевого коэффициента . Проанализируем графически результаты изменения значения целевого коэффициента , т.е. цены на радиоприемники первой модели. Оптимальное решение в точке D не будет меняться при увеличении до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично, оптимальное решение в точке D не будет меняться при уменьшении до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).



Совпадение в процессе вращения целевой прямой с прямой ограничения означает, что углы их наклона относительно горизонтальной оси сравнялись, а значит, стали равны тангенсы углов наклона этих прямых.

*Правило №5*

**Чтобы** определить границы допустимого диапазона изменения коэффициента ЦФ, например и ,



**необходимо** приравнять тангенс угла наклона целевой прямой поочередно к тангенсам углов наклона прямых связывающих ограничений, например и (рис.4.5 и 4.6).

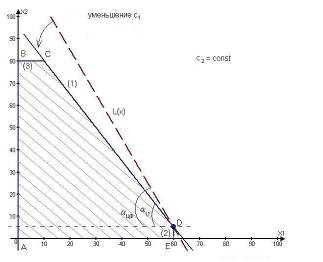


Рис.4.5. Определение

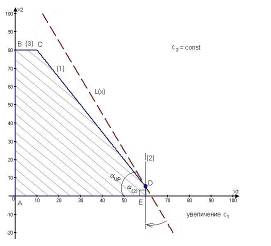


Рис.4.6. Определение



Определим, насколько максимально может снизиться цена на радиоприемники первой модели, не изменяя оптимальную точку D. Для этого применим правило №5.

Тангенсы угла наклона для прямых *L(x)* и (1) соответственно равны:

и



Тогда из равенства находим [$/шт]



Теперь попробуем определить, насколько максимально может увеличиться цена на радиоприемники первой модели, чтобы не изменилась оптимальная точка D.

На рис 4.6 видно, что значение c1 можно увеличивать беспредельно, так как прямая *L(x)* при c2 = 20 и никогда не совпадает с прямой (2). Следовательно, точка D при всех значениях коэффициента будет единствен­ной оптимальной.



Из приведенных выше расчетов и графической их иллюстрации следует, что если цена на радиоприемники первой модели станет меньше 30 $/шт, то наиболее выгодным будет производство радиоприемников в точке C (см. рис.4.5). При этом производительность первой технологической линии будет использоваться не в полном объеме, что приведет к недефицитности данного ресурса (2), а дефицитными будут ресурсы (1) и (3).

Проведем те же самые исследования для радиоприемников второй модели. Для этого зафиксируем значение .  *Ищем :*



Тогда из равенства находим [$/шт]



На рис 4.6 видно, что значение c2 можно уменьшать до нуля, так как прямая *L(x)* при c1 = 40 и совпадает с прямой (2). Следовательно, точка D при всех значениях коэффициента будет оптимальной.



Аналогично делаем вывод, что если цена на радиоприемники второй модели станет выше 26,67 $/шт, то наиболее выгодным будет производство радиоприемников в точке C.

С экономической точки зрения производство радиоприемников в точке С означает, что предприятию станет выгоднее изготовлять радиоприемники второй модели, используя на полную мощность производительность второй технологической линии.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.**

В ходе работы над курсовым проектом была рассмотрена задача линейного программирования о производстве радиоприемников. Для решения задачи использовался графический метод. Получены следующие результаты:

Оптимальная прибыль от реализации продукции достигается при следующем суточном производстве радиоприемников: 60 шт радиоприемников первой модели и 5 шт радиоприемников второй модели. При этом прибыль от реализации составит 2500$ в сутки.

Рассмотрев три задачи анализа полученного решения на чувствительность к принятой модели, мы можем ответить на следующие вопросы:

1. Определите предел увеличения производительности первой линии, превышение которого уже не будет улучшать значения целевой функции.

- *предел увеличения производительности первой линии равен 63 радиоприемника в сутки. Дальнейшее увеличение производительности не имеет смысла, т.к. значение ЦФ не улучшится*.

1. Определите предел уменьшения производительности второй линии, при котором полученное оптимальное решение останется неизменным.

*- предельный уровень, до которого может уменьшиться производительность второй технологической линии, и при котором не изменится оптимальность полученного ранее решения, равен 5 радиоприемников в сутки.*

1. Определите предел увеличения суточного запаса элементов электронных схем, при превышении которого улучшить значение целевой функции оказывается невозможным.

*- предел увеличения суточного запаса элементов электронных схем равен 1700 шт в сутки. Дальнейшее увеличение нецелесообразно, потому что это не изменит ОДР и не приведет к другому оптимальному решению.*

1. Определить дефицитный ресурс, который имеет наибольший приоритет при возможности увеличения запасов ресурсов.

*- т.к. увеличение производительности первой технологической линии на 1 шт принесет 6,7 $/сутки (в отличии от 2$/сутки от увеличения суточного запаса элементов электронных схем), то именно данный ресурс (2) имеет приоритет.*

1. Определите интервал изменения прибыли от продажи радиоприемника первой модели, в котором оптимальное решение остается неизменным.

*- интервал изменения прибыли от продажи радиоприемника первой модели, в котором оптимальное решение остается неизменным, определяется неравенством $/шт.*



1. Определите аналогичный интервал для приемника второй модели.

- *интервал изменения прибыли от продажи радиоприемника второй модели, в котором оптимальное решение остается неизменным, определяется неравенством $/шт.*



Решение данной задачи помогло более глубоко и основательно изучить и укрепить на практике все тонкости и моменты графического метода решения задач линейного программирования, а так же разобраться с основами анализа на чувствительность модели к полученному оптимальному решению.

**Список литературы**

1. АстафуровВ.Г., Колодникова Н. - Компьютерное учебное пособие, раздел “Анализ на чувствительность с помощью двойственной задачи”, Томск-2002.
2. Алесинская Т.В. - Задачи по исследованию операций с решениями.
3. Смородинский С.С., Батин Н.В. - Оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования: Учебное пособие.
4. Кононов В.А. - Исследование операций. Для продвинутых математиков.