Учреждение образования «Брестский государственный университет  
им. А.С. Пушкина»

Кафедра алгебры и геометрии

Свойства многоугольников и их применение в решении задач

Курсовая работа

студентки 3 курса

Руководитель

преподаватель кафедры алгебры и геометрии

Брест 2007

ВВЕДЕНИЕ

Многими математическими знаниями люди пользовались уже в глубокой древности – тысячи лет назад. Эти знания были необходимы древним купцам и строителям храмов, дворцов и пирамид, воинам и землемерам, жрецам и путешественникам.

Знания постепенно накапливались и систематизировались. Около 4 тыс. лет назад возникла наука об измерении расстояний, площадей и объёмов, о свойствах различных фигур. Так как речь в основном шла о земельных участках, то древние греки, узнавшие об этой науке от египтян, назвали её геометрией (по-гречески «гео» - земля, а «метрео» - измеряю. Значит, «геометрия» буквально означает «землемерие». Греческие учёные узнали много новых свойств геометрических фигур, и уже тогда геометрией стали называть науку о геометрических фигурах, а для науки об измерении Земли ввели другое название – «геодезия» (происходит от греческих слов «деление земли»).

Древние люди знали, что немаловажное значение имеют такие фигуры как многоугольники. Например, древнегреческие математики (Антифон, Бризон, Архимед и др.) использовали правильные многоугольники для вычисления числа π. Они вычисляли площади вписанных в окружность и описанных вокруг неё многоугольников, постепенно увеличивая число их сторон и получая таким образом оценку площади круга.

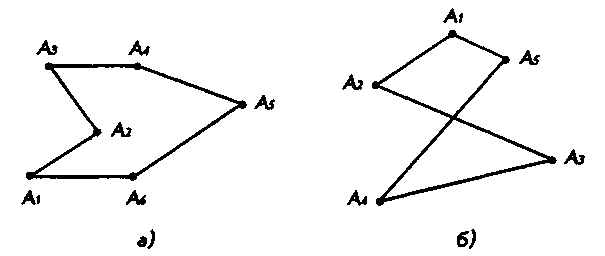
В данной работе мне предстоит изучить некоторые свойства многоугольников и их особенности при решении задач, а также научиться применять полученные знания на практике.

1.1.МНОГОУГОЛЬНИКИ. СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Многоугольник — это геометрическая фигура, обычно определяется как замкнутая ломаная без самопересечений (простой многоугольник (рис.1а) ), однако иногда самопересечения допускаются (тогда многоугольник не является простым (рис.1б) )

Вершины ломаной называются вершинами многоугольника, а отрезки — сторонами многоугольника. Вершины многоугольника называются соседними, если они являются концами одной из его сторон. Отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называются диагоналями.

Рис.1.1



Углом (или внутренним углом) выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине, при этом угол считается со стороны многоугольника. В частности угол может превосходить 180° если многоугольник невыпуклый.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. В общем случае внешний угол это разница между 180° и внутренним углом. Из каждой вершины -угольника при  > 3 выходят  — 3 диаго­нали, поэтому общее число диагоналей -угольника равно .

Многоугольник с тремя вершинами называется треугольником, с чётырьмя — четырёхугольником, с пятью — пятиугольником и т. д.

Многоугольник с *n* вершинами называется *n-*угольником**.**

Плоскиммногоугольником называется фигура, которая состоит из многоугольника и ограниченной им конечной части площади.

Многоугольник называют выпуклым, если выполнено одно из следующих (эквивалентных) условий:

1. он лежит по одну сторону от любой прямой, соединяющей его соседние вершины. (т. е. продолжения сторон многоугольника не пересекают других его сторон);
2. он является пересечением (т. е. общей частью) нескольких полуплоскостей;
3. любой отрезок с концами в точках, принадлежащих многоугольнику, целиком ему принадлежит.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны, например равносторонний треугольник, квадрат и пентагон.

Выпуклый многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на одной окружности.

Выпуклый многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности

Правильный многоугольник — это многоугольник, у которого все углы и все стороны равны между собой.

Свойства многоугольников:

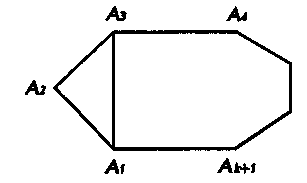
1 Каждая диагональ выпуклого -уголь­ника, где >3, разлагает его на два выпуклых много­угольника.

2 Сумма всех углов выпуклого -угольника равна .

Д-во: Теорему докажем методом математической ин­дукции. При  = 3 она очевидна. Предположим, что теорема верна для -угольника, где  *<,* и докажем ее для -угольника.

Пусть— данный многоугольник. Прове­дем диагональ этого многоугольника. По теоре­ме3 многоугольник разложен на треугольник и выпуклый -угольник (рис.5). По предположению индукции . С другой сто­роны, . Складывая эти ра­венства и учитывая, что *(* — внутренний луч угла *)* и  *(*— внутренний луч угла*),* получаем .При  получаем: .

Рис.1.2



3 Около любого правильного многоуголь­ника можно описать окружность, и притом только одну.

Д-во: Пусть правильный многоугольник, а и — биссектрисы углов , и  (рис. 150). Так как , то , следовательно, \* 180° < 180°. Отсюда следует, что биссектрисы и  углов и  пересекаются в некоторой точке *О.* Докажем, что *O*= *ОА2* = *О* = ... = *ОАп.* Треугольник *О* равнобедренный, поэтому *О*= *О*. По второму признаку равенства треугольников , следовательно, *О* = *О*. Аналогично

Рис.1.3

доказывается, что *О*= *О* и т. д. Таким обра­зом, точка *О* равноудалена от всех вершин много­угольника, поэтому окружность с центром *О*  радиуса *О*является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины много­угольника, например, , *А2,* . Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника *...* нельзя описать более чем одну ок­ружность. ч.т.д.

4 В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и притом только одну.

5 Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

6 Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

7 Симметрия:

Говорят, что фигура обладает симметрией (симметрична) , если существует такое движение (не тождественное), переводящее эту фигуру в себя.

7.1. Треугольник общего вида не имеет осей или центров симметрии, он несимметричен. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет одну ось симметрии: серединный перпендикуляр к основанию.

7.2. Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (серединные перпендикуляры к сторонам) и поворотную симметрию относительно центра с углом поворота 120 ° .

7.3 У любого правильного n-угольника есть n осей симметрии, все они проходят через его центр. Он также имеет поворотную симметрию относительно центра с углом поворота .

При четном *n* одни оси симметрии проходят через противоположные вершины, другие - через середины противоположных сторон.

При нечетном *n* каждая ось проходит через вершину и середину противоположной стороны.

Центр правильного многоугольника с четным числом сторон является его центром симметрии. У правильного многоугольника с нечетным числом сторон центра симметрии нет.

8 Подобие:

При подобии и -угольник переходит в -угольник, полуплоскость – в полуплоскость, поэтому выпуклый *n*-уголъник переходит в выпуклый *n*-уголъник

Теорема: Если стороны и углы выпуклых многоугольников  иудовлетворяют ра­венствам:

, (1)   
где -- коэффициент подия

, (2)

то эти многоугольники подобны.

8.1 Отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.

8.2. Отношение площадей двух выпуклых подобных многоугольников равно квадрату коэффици­ента подобия.

2.ТРЕУГОЛЬНИКИ

2.1. СВОЙСТВА ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В геометрии выделяют следующие основные свойства треугольников:

1. Во всяком треугольнике:

* Против равных сторон лежат равные углы;
* Против большей стороны лежит больший угол;
* Против большего угла лежит большая сторона.

1. Сумма внутренних углов треугольника равна *180°*.
2. В любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.
3. Любой внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.
4. Любой внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.
5. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.
6. Длина любой стороны треугольника меньше суммы и больше модуля разности длин двух других сторон:

*|AC-CB|<AB<AC+CB* (2.1)

1. Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон.
2. Два не совпадающих ни с одной из сторон треугольника отрезка, поведённых из двух разных вершин треугольника до противолежащих этим вершинам сторон, пересекаются.
3. Прямая, проходящая через вершину треугольника и пересекающая противолежащую вершине сторону, делит данный треугольник на два треугольника, площади которыхсоответственно пропорциональны отрезкам**,** отсекаемым прямой на стороне данного треугольника.
4. Множеством вершин треугольников с одними и теми же основанием *ВС* и высотой *h* является множество точек двух прямых, параллельных прямой *ВС* и проходящих на расстоянии *h* от нее.
5. Если *а, b, с* - положительные числа, то треугольник со сторонами *а, b, с* существует в том и только в том случае, если одновременно выполняются неравенства:

*а + b>с, b+с>а, а + с>b* (2.2)

Эта система неравенств равносильна двойному неравенству

*|a-b|<2c<a+b* (2.3).

13.Площадь треугольника равна половине произведения его основаниям на высоту

14.Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

15.Любой треугольник можно вписать в окружность.

16.Около любого треугольника можно описать только одну окружность.

17.Любой треугольник имеет три вневписанные окружности. Каждая сторона треугольника касается одной и только одной из этих окружностей.

2.2. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИЗНАК И СВОЙСТВА

Пример равнобедренного треугольника

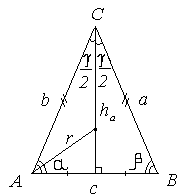


Рис. 2.1.

Признак равнобедренного треугольника:

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Свойства равнобедренного треугольника:

Для равнобедренного треугольника справедливы все свойства произвольного треугольника. Кроме того, имеют место следующие свойства:

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. В равнобедренном треугольнике медианы (а также высоты или биссектрисы), проведенные к боковым сторонам, равны.

2.3. СВОЙСТВА РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Пример равностороннего треугольника

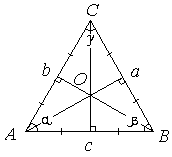


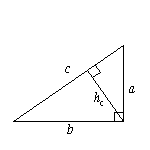
Рис. 2.2.

Свойства равностороннего треугольника:

1. У равностороннего треугольника все углы равны между собой и составляют 60°.
2. В равностороннем треугольнике любая биссектриса является одновременно медианой и высотой.
3. В равностороннем треугольнике все медианы (а также высоты или биссектрисы) равны между собой.
4. Точка пересечения медиан (высот, биссектрис) равностороннего треугольника, называемая его центром, является центром вписанной и описанной окружностей.

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Пример прямоугольного треугольника



*В*

С

А

Рис. 2.3

Признаки прямоугольного треугольника:

1. Если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то такой треугольник прямоугольный.
2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Свойства прямоугольного треугольника:

Для прямоугольного треугольника справедливы все свойства произвольного треугольника. Кроме того, имеют место следующие свойства:

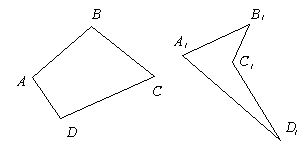
1. У прямоугольного треугольника только один прямой угол, два других его угла острые.
2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета.
4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен 45°.
5. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.
6. Гипотенуза вписанного в окружность прямоугольного треугольника совпадает с диаметром этой окружности.
7. Высота прямоугольного прямоугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит этот треугольник на два треугольника, подобных исходному.
8. Биссектриса прямого угла в прямоугольном треугольнике лежит между медианой и высотой и делит угол между ними пополам.
9. Площадь равна половине произведения его катетов.

3. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а соединяющие их отрезки не пересекаются.

Две несмежные стороны четырехугольника называются противоположными . Две вершины, не являющиеся соседними, называются также противоположными.

Рис.3.1



Четырехугольники бывают выпуклые (как ABCD) и невыпуклые (A1B1C1D1).

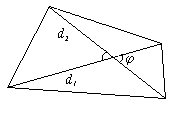
Свойства четырехугольника:

1. Четырехугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда его диагонали пересекаются.
2. В любом четырехугольнике какие-то две противолежащие вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.
3. Прямые, содержащие диагонали любого четырехугольника, пересекаются.
4. Каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех других сторон:

 (3.1)

5. Площадь произвольного выпуклого четырехугольника:

*d1*, *d2 —* диагонали; — угол между ними; *S —* площадь.



*S =d*1*d*2 *sin*  (3.2)



Рис.3.2

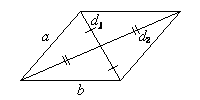
6 Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, ког­да сумма противоположных углов этого четырехуголь­ника равна, 180°.

7 В четырехугольнике, впи­санном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон(Теорема Птолемея).

8 В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда сум­мы его противоположных сторон равны.

3.1. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ. ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.



Свойствапараллелограмма:

1. противолежащие стороны равны;
2. противоположные углы равны;

Рис.3.3

1. диагонали точкой пересечения делятся пополам;
2. сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;
3. сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон: *d12+d22=2(a2+b2).* (3.3)
4. Около параллелограмма можно опи­сать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм является прямоугольником.
5. Если параллелограмм вписан в окружность, то он является ромбом.

Признакипараллелограмма:

Четырехугольник является параллелограммом, если:

1. Две его противоположные стороны равны и параллельны.
2. Противоположные стороны попарно равны.
3. Противоположные углы попарно равны.
4. Диагонали точкой пересечения делятся пополам.

3.2. ТРАПЕЦИЯ. СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ТРАПЕЦИИ

Трапецией называется четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие непараллельны.

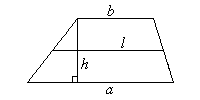


Рис.3.4

Параллельные стороны трапеции называются ее основаниями, а непараллельные стороны — боковыми сторонами. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией.

Трапеция называется равнобедренной (или равнобокой), если ее боковые стороны равны.

Трапеция, один из углов которой прямой, называется прямоугольной.

#### Свойства трапеции:

1 ее средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме;

2 если трапеция равнобокая, то ее диагонали равны и углы при основании равны;

3 если трапеция равнобокая, то около нее можно описать окружность;

4 если сумма оснований равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность.

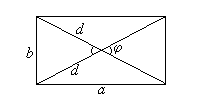
5 Площадь трапеции:   
*a* и *b* — основания; *h —*расстояние между ними; *l —* средняя линия  
, *S = lh* (3.4)

6 Около трапеции можно описать ок­ружность тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

#### Признаки трапеции:

Четырехугольник является трапецией, если его параллельные стороны не равны

3.3. ПРЯМОУГОЛЬНИК. ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ



Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства прямоугольника:

1 все свойства параллелограмма;

Рис.3.5

2 диагонали равны.

3 площадь равна:

*S = ab* (3.5)

*S =d*1*d*2 *sin*  (3.6)



4 если прямоугольник вписан в окружность, то он является квадратом.

#### Признаки прямоугольника:

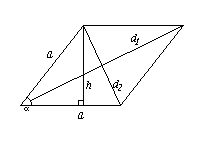
Параллелограмм является прямоугольником, если:

1. Один из его углов прямой.
2. Его диагонали равны.

3.4. РОМБ. ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

#### Свойства ромба:



1 все свойства параллелограмма;

2 диагонали перпендикулярны;

3 диагонали являются биссектрисами его углов.

4 площадь ромба:

Рис.3.6

*S = aha*(3.7)

*S = a2sin* (3.8)

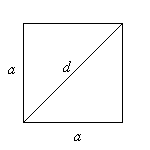
S =d1d2 (3.9)

#### Признаки ромба:

1. Параллелограмм является ромбом, если:
2. Две его смежные стороны равны.
3. Его диагонали перпендикулярны.
4. Одна из диагоналей является биссектрисой его угла.

3.5. КВАДРАТ. ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.



#### Свойства квадрата

1 все углы квадрата прямые;

2 диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.

Рис.3.7

3 площадь квадрата:

*S = a2* (3.10)

*S =d*2 (3.11)

Признаки квадрата**:**

Прямоугольник является квадратом, если он обладает каким-нибудь признаком ромба.

4.ПРИМЕРЫ РЕШЕННЫХ ЗАДАЧ.

1. Точка *Р* лежит внутри прямоугольника *ABCD.* Докажите, что .

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим параллелограммы BLDP и APCL: по свойству *d12+d22=2(a2+b2)* получим





Рис.4.1

Т.к. ABCD прямоугольник, то BD=AC. Тогда  И . Приравняем полученные равенства:

= .

1. *AC* – наибольшая сторона треугольника *ABC*. На *АС* выбираются точки *А1* и *С1* так, что *АС1=АВ* и *СА1=СВ*. Затем на стороне *АВ* берется точка *А2* так, что *АА1=АА2*, а на стороне *CD* – точка *С2* так, что *СС1=СС2*. Докажите, что точки *А1*, *А2*, *С1*, *С2* лежат на одной окружности.

РЕШЕНИЕ: *АА1=АА2* и *АС1=АВ*(по условию задачи), а тока *А1* и *А2 A1A2||BC1*? При чем  по теореме Фалеса. Можно сделать вывод, что *A1A2BC1* равнобокая трапеция. Аналогично можно доказать, что четырехугольник *A1ВС2С1* также равнобокая трапеция. Так как эти трапеции правильные, то около них можно описать окружности  и  соответственно. Мы получили, что точки *A1, В* и *С1* принадлежат двум окружностям одновременно, что невозможно, т.к. по свойству окружности: через три точки может проходить только одна окружность. Тогда можно сделать вывод о том, что  и  совпадают. А следовательно точки *А1*, *А2*, *С1*, *С2* лежат на одной окружности.

Рис.4.2

1. Докажите, что выпуклый *n*-угольник является правильным тогда и только тогда, когда он переходит в себя при повороте на угол вокруг некоторой точки.



РЕШЕНИЕ: Выпуклый *n*-угольник называется правильным, если все его стороны равны и все углы равны. Пусть *A*1*A*2...*A*n -- правильный многоугольник, *O* — точка пересечения биссектрис его углов *A*n*A*1*A*2 и *A*1*A*2*A*3. Тогда треугольники *A*n*OA*1 и *A*2*OA*1 равны по двум сторонам и углу между ними.

Кроме того, из равенства углов *n*-угольника следует, что треугольники *A*n*OA*1*A*2*OA*1 — равнобедренные. Поэтому

*OA*n = *OA*1 = *OA*2, *A*n*OA*1 = *A*1*OA*2.



Аналогично докажем, что

*OA*1 = *OA*2 =...= *OA*n,*A*1*OA*2 = *A*2*OA*3 =...= =*A*n*OA*1 = .

Рис.4.3



Следовательно, *O* — центр окружности, проходящей через точки *A*1, *A*2, ..., *A*n. При повороте на угол вокруг точки *O* данный *n*-угольник переходит сам в себя.



Пусть теперь известно, что некоторый выпуклый *n*-угольник *A*1*A*2...*A*n переходит в себя при повороте вокруг некоторой точки *O* на угол . Ясно, что эта точка лежит внутри многоугольника, а т.к. многоугольник выпуклый, то



*A*1*OA*2 +...+ *A*n*OA*1 = 360o.



Поскольку вершины многоугольника при повороте переходят в вершины, то точки *A*1, *A*2, ..., *A*n лежат на окружности с центром *O*, и

*A*1*OA*2 = *A*2*OA*3 =...= *A*n*OA*1 = .



Поэтому *A*1*OA*2, *A*2*OA*3, ..., *A*n*OA*1 — равные равнобедренные треугольники. Следовательно, все стороны и все углы многоугольника равны, т.е. он правильный.

Рис.4.4

Задача4 Докажите, что в правильном 12-угольнике *A*1*A*2...*A*12 диагонали *A*1*A*5, *A*2*A*6, *A*3*A*8 и *A*4*A*11 пересекаются в одной точке.

РЕШЕНИЕ:

Пусть *A*1*A*2...*A*12 — правильный 12-угольник. Рассмотрим треугольник *A*2*A*4*A*8. Прямые *A*2*A*6, *A*3*A*8 и *A*4*A*11 — биссектрисы его углов. Точно так же прямые *A*3*A*8, *A*5*A*1 и *A*11*A*4 — биссектрисы углов треугольника *A*3*A*5*A*11. Отсюда следует, что диагонали *A*1*A*5, *A*2*A*6, *A*3*A*8 и *A*4*A*11 проходят через одну точку.

Рис.4.5

Задача5 Пусть *О —* центрправильного многоугольника *A1A2A3...An, X --* произвольная точка плоскости. Докажите, что:

a) *+...+ =* ***0***



б) *+...+ = n.*



РЕШЕНИЕ:

а) Обозначим *+...+ = .* При повороте на уголвокруг точки *O* точка ** переходит в точку ** (1i n - 1), а точка *An —* в точку *A1.* Поэтому векторпри таком повороте переходит сам в себя. Следовательно, *=****0****.*

Рис.4.6



б) 

Задача6 Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки X до вершин правильного *n*-угольника будет наименьшей, если *X*— центр *n-*угольника.

РЕШЕНИЕ:

Пусть*Xk —* образ точки*X* приповороте относительно центра*O* данного*n-*угольника, переводящем*Ak в A1.* При этом повороте отрезок*AkX* переходитв *A1Xk.* Следовательно,*A1X + ... + AnX = A1X1 + ... + A1Xn.* А так как*n-*угольник*X1...Xn* правильный, то*+ ... + = n* (см. Задачу5),а значит,*A1X1 + ... + AnXn n.*

Рис.4.7



Задача7 В правильном *n*-угольнике (*n* 3) отмечены середины всех сторон и диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной, окружности?



РЕШЕНИЕ:

Пусть сначала *n = 2m.* Диагонали и стороны правильного *2m-*угольника имеют *m* различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на *m - 1* концентрических окружностях (по *n* точек на каждой) или в общем центре этих окружностей. Поскольку различные окружности имеют не более двух общих точек, окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более  *1+2(m - 1)=2m-1=n-1* отмеченных точек.

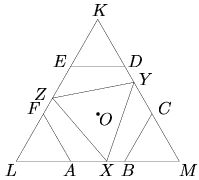
Пусть теперь *n = 2m + 1*. Диагонали и стороны правильного *(2m + 1)-*угольника имеют *m* различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на *m* концентрических окружностях (по *n* точек на каждой). Окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более *2m = n - 1* отмеченных точек.

В обоих случаях наибольшее число отмеченных точек, лежащих на одной окружности, равно *n.*

Задача8 Вершины правильного треугольника находятся на сторонах *AB*, *CD* и *EF* правильного шестиугольника *ABCDEF*. Докажите, что они имеют общий центр.

РЕШЕНИЕ:

Пусть *XYZ* — данный треугольник, *KLM* — треугольник, получаемый при продолжении сторон *AB*, *CD* и *EF* шестиугольника *ABCDEF* (рис.). Пусть *O* — центр треугольника *XYZ*, докажем, что он является центром треугольника *KLM*.



При повороте относительно точки *O* на *1200* против часовой стрелки прямая *AB* переходит в прямую, параллельную *CD*. Поскольку при этом повороте точка *X* прямой *AB* переходит в точку *Y*, то образ прямой *AB* должен проходить через точку *Y,* значит совпадать с *CD*. Поэтому точка *O* равноудалена от прямых *AB* и *CD*. Аналогично доказывается, что она равноудалена от прямых *CD* и *EF*. Значит, она является центром окружности, вписанной в треугольник *KLM* и, тем самым, центром шестиугольника *ABCDEF*.

Рис.4.9

Задача9 Окружности, диаметрами которых служат стороны *АВ* и *СD* выпуклого четырехугольника *ABCD*, касаются сторон *CD* и *AB* соответственно. Докажите, что *ВС* || *AD*.

РЕШЕНИЕ:

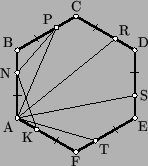
Пусть *М* и *N* – середины сторон *АВ* и *CD.* Опустим из точки *D* перпендикуляр *DP* на прямую *MN*, а из точки М перпендикуляр *MQ* на *СВ*. Тогда *Q* – точка касания прямой *CD* и окружности с диаметром *AB*. Прямоугольные треугольники *PDN* и *QMN* подобны, поэтому *DP=ND\*MQ/MN=ND\*MA/MN*. Аналогично расстояние от точки *А* до прямой *MN* равно *ND\*MA/MN*. Следовательно, *AD*||*MN*. Аналогично *BC||MN.*

Рис.4.10

Задача10 Прямая отсекает треугольник *AKN* от правильного шестиугольника *ABCDEF* так, что *AK + AN = AB*. Найдите сумму углов, под которыми отрезок *KN* виден из вершин шестиугольника *( KAN +  
 KBN + KCN + KDN + KEN + KFN).*



РЕШЕНИЕ: Будем считать, что *N* лежит на*AB,* а *K* лежит на*AF* (рис.4.11). Заметим, что *FK = AN.* Выберем точку *P* на*BC*, точку *R* на *CD*, точку *S* на *DE* и точку *T* на *EF*



так, чтобы выполнялись равенства *FK = AN = BP = =CR = DS = ET. Тогда KBN = TAK, KCN =   
=SAT, KDN = RAS, KEN = PAR, KFN =   
=NAP,* откуда



*KAN+KBN+KC+KDN+KEN+KFN=  
=KAN+TAK+SAT+RAS+PAR+NAP=  
KAN+KAN=120o+120o=240o.*

Рис.4.11



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В своей работе я изучила свойства многоугольников и как они применяются на практике.

Можно сказать, что многоугольник является универсальной фигурой, так как он применяется во многих задачах и обладает множеством интересных свойств. Многоугольники находят своё применение в самых разных науках. Из этого следует ценность многоугольника как фигуры.