# 1. Анализ устойчивости замкнутой системы

## 

## 1.1 Анализ устойчивости системы по корням характеристического уравнения

Запишем передаточную функцию разомкнутой системы:

. (1)



Передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

.



Характеристическое уравнение замкнутой системы:

(2)



Корни характеристического уравнения (2):



Характеристическое уравнение (2) имеет два правых корня, следовательно, данная замкнутая система неустойчива.

## 

## 1.2 Анализ устойчивости системы по алгебраическому критерию

Для характеристического уравнения (2) замкнутой системы коэффициенты *ai, i=0..3*,

*а0=0.00008,*

*a1=0.0078,*

*a2= – 0.03,*

*a3=48.*

Необходимым условием устойчивости системы является:

*ai>0, i=0..3*

Данное условие не выполняется (*a2<0*), следовательно, замкнутая система неустойчива.

## 

## 1.3 Анализ устойчивости системы по частотным критериям

### 

### а) Критерий Найквиста (на комплексной плоскости)

Используя передаточную функцию разомкнутой системы (1) запишем характеристическое уравнение разомкнутой системы:

. (3)



Найдем корни характеристического уравнения (3):



Характеристическое уравнение разомкнутой системы (3) имеет один правый корень, следовательно, разомкнутая система неустойчива.

Построим годограф Найквиста. Для этого определим частотную передаточную функцию разомкнутой системы и ее действительную и мнимую части.

(4)



(5)



(6)



Используя выражения (5) и (6), заполним таблицу:

Таблица 1.3.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *w* | 0 | - | - | ∞ |
| *P* | -48 | 0 | - | 0 |
| *Q* | 0 | - | 0 | 0 |

Построим годограф Найквиста (Рис. 1.3.1):



Рис. 1.3.1

Для случая, когда разомкнутая система неустойчива критерий Найквиста звучит следующим образом: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста охватывал особую точку (; ) в положительном направлении на угол , где *l –* число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.



Число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы (3) равно единице (*l=*1), полученный годограф не охватывает особую точку (-1, j0) на угол *l*π=π (годограф охватывает особую точку в направлении по часовой стрелке), следовательно, критерий Найквиста не выполняется и система неустойчива.

### б) Критерий Найквиста (на плоскости ЛЧХ)

Построим ЛЧХ заданной системы, для этого определим расчетные выражения для *L(w)* и *φ(w)*:

(7)



(8)



Для построения асимптотической ЛАЧХ найдем параметры:



ЛФЧХ системы также можно построить как геометрическую сумму ЛФЧХ отдельных звеньев системы.

Графики расчетных ЛЧХ, построенные по формулам (7) и (8) изображены на рисунке (1.3.2):



Рис. 1.3.2

*wср*(частота среза) – частота, соответствующая пересечению ЛАЧХ с осью lgw;

*wкр*(критическая частота) – частота, соответствующая пересечению ЛФЧХ уровня –π;

Система устойчива, если выполняется условие:

*wср< wкр*

Данное условие не выполняется, следовательно, система неустойчива. Аналогичный вывод можно сделать по асимптотической ЛАЧХ и ЛФЧХ системы, построенной как сумма отдельных звеньев, входящих в систему, изображенной на рисунке (1.3.3):

### в) Критерий Михайлова

Используя характеристическое уравнение замкнутой системы (2) введем функцию Михайлова:

, где



,



.



Для заданной системы функция Михайлова примет вид:



(9)



(10)



Графическое изображение функции Михайлова на комплексной плоскости при называется годографом Михайлова. Для устойчивости системы n-го порядка необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова начинался на вещественной положительной полуоси и при увеличении частоты до ∞ проходил последовательно в положительном направлении n квадрантов, нигде не обращаясь в ноль.



Используя выражения (9) и (10), заполним таблицу:

Таблица 1.3.3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *w* | 0 | 77,625 | - | ∞ |
| *X(w)* | 47 | 0 | - | -∞ |
| *Y(w)* | 0 | -39,748 | 0 | -∞ |

Построим годограф Михайлова (Рис. 1.3.4):



Рис. 1.3.4

Полученный годограф начинается на вещественной положительной полуоси, проходит 2 квадранта в отрицательном направлении, таким образом, критерий Михайлова не выполняется, следовательно, система неустойчива.

# 

# 2. Построение области устойчивости в плоскости параметра Кр

Построим область устойчивости, используя критерий Гурвица.

Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы в общем виде:

.



Для конкретного случая характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

(11)



Для устойчивости системы КР должно удовлетворять необходимому условию



Рис. 2.1

Но заметим, что исходный КР удовлетворяет этому условию, и его изменением устойчивости замкнутой системы добиться невозможно, т. к. в ХУ ЗС (2.3) *а2*<0, и зависит этот коэффициент от постоянных времени.

Построим область устойчивости в плоскости параметра Т2

Необходимое условие устойчивости:



Достаточное условие устойчивости для системы третьего порядка по критерию Гурвица имеет вид:



Учитывая все условия:



Рис. 2.2

# 

# 3. Коррекция системы

Для обеспечения устойчивости системы необходимо ввести корректирующее звено с передаточной функцией вида:



Структурная схема скорректированной системы (Рис. 3.1):



Рис. 3.1

Передаточная функция скорректированной разомкнутой системы имеет вид:

(12)



Определим параметр *Т* из условия обеспечения минимального запаса устойчивости (*Lзап=5 дБ*).

Запас по амплитуде определяется на критической частоте – частоте, на которой функция *φ(w)* принимает значение, равное *-π*

Расчетное выражение для *φ(w)*:



, отсюда



(13)



Расчетное выражение для *L(w)*:

(14)



Подставим найденное выражение *Т* (13) в функцию *L(w)* (14):



На критической частоте значение функции *L(w)*, исходя из условия обеспечения минимального запаса устойчивости, должно быть равно не менее 5 дБ.



Из данного выражения найдем *wкр*

*wкр=308,4185,* следовательно,

*Т=0,001198*

Анализируя данное значение и область устойчивости, найденную в п. 2, можно сделать вывод, что введение корректирующего звена с передаточной функцией обеспечит не только устойчивость системы, но и более чем минимальный запас устойчивости по амплитуде.



# 4. Построение и анализ ЛЧХ системы и годографа Найквиста скорректированной системы

Используя передаточную функцию скорректированной разомкнутой системы (12), запишем характеристическое уравнение скорректированной разомкнутой системы:

(15)



Найдем корни характеристического уравнения (15):



Уравнение (15) имеет один правый корень, следовательно, скорректированная разомкнутая система неустойчива.

Построим годограф Найквиста. Для этого определим частотную передаточную функцию скорректированной разомкнутой системы и ее действительную и мнимую части.



(16)



(17)



Используя выражения (16) и (17), заполним таблицу:

Таблица 4.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *w* | 0 | - | 328,8237 | ∞ |
| *P* | -48 | 0 | -0,485 | 0 |
| *Q* | 0 | - | 0 | 0 |

Построим годограф Найквиста (Рис. 4.1):



Рис. 4.1

Для случая, когда разомкнутая система неустойчива критерий Найквиста звучит следующим образом: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста охватывал особую точку (; ) в положительном направлении на угол , где *l –* число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.



Число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы равно единице (*l=*1), полученный годограф охватывает особую точку (-1, j0) на угол *l*π=π, следовательно, критерий Найквиста выполняется и система устойчива.

Построим ЛЧХ разомкнутой скорректированной системы:

Определим расчетные выражения для *L(w)* и *φ(w)*:

(18)



(19)



Для построения асимптотической ЛАЧХ найдем параметры:



ЛФЧХ системы также можно построить как геометрическую сумму ЛФЧХ отдельных звеньев системы.

Графики расчетных ЛЧХ, построенные по формулам (18) и (19), изображены на рисунке (4.2):



Рис. 4.2

*wср*(частота среза) – частота, соответствующая пересечению ЛАЧХ с осью lgw;

*wкр*(критическая частота) – частота, соответствующая пересечению ЛФЧХ уровня –π;

Система устойчива, если выполняется условие:

*wср< wкр*

Данное условие выполняется, следовательно, система устойчива. Запас устойчивости по амплитуде: *Lзап*= 5,8 дБ

Запас устойчивости по фазе: *φзап*=0,2 рад

Аналогичный вывод можно сделать по асимптотической ЛАЧХ и ЛФЧХ системы, построенной как сумма отдельных звеньев, входящих в систему.

# 

# 5. Анализ качества системы в переходном режиме

Определим прямые показатели качества, для этого построим переходную характеристику:

, где (20)



(21)



*Ф(s)* – передаточная функция скорректированной замкнутой системы.

Переходная характеристика, построенная по формуле (20), изображена на рисунке (5.1):



Рис. 5.1

По рисунку (5.1) определим: *hmax*=0.3; *hуст*=0.17; *h(0)*=0, время регулирования на уровне 0.05 (hуст-h(0)).

Коридор: [0.95 (hуст-h(0)); 1.05 (hуст-h(0))].

Коридор: [0.1615; 0.1785].

Время регулирования: *tрег*= 0,15 с*.*

Перерегулирование равно:

(5.3)



*.*



Определим показатель коллебательности. Используя передаточную функцию скорректированной замкнутой системы (21), запишем частотную передаточную функцию скорректированной замкнутой системы:



Выделим действительную и мнимую части:



Модуль частотной передаточной функции замкнутой системы:

(22)



Построим амплитудно-частотную характеристику, используя выражение (22) (Рис. 5.2):



Рис. 5.2

По рисунку (5.2) определим: *;* *.*



Показатель колебательности *M* есть отношение максимальной ординаты амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы к начальной ординате:



Определим запасы устойчивости системы.

Найдем критическую частоту – частоту, на которой значение *φ(w)* равняется –π.

(23)



*wкр*=328,824

Рассчитаем запас по амплитуде:

(24)



Запас по амплитуде: *Lзап*= 5,797 дБ

Найдем частоту среза – частоту, на которой значение *L(w)* равняется 0, используя выражение (24):



*wср*=232,624

Рассчитаем запас по фазе, используя выражение (23):



Запас по фазе: *φзап*=0,168 рад.

# 

# 6. Анализ качества системы в установившемся режиме

Установившаяся ошибка системы равна:

(25)



εустХо=С0Х0(t)+ С1Х'0(t)+…

εуст f =С0F0(t)+ С1F'0(t)+…

Так как в заданном случае задающее и возмущающее воздействия – константы, необходимо найти лишь первые коэффициенты функций ошибок.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы по ошибке по задающему воздействию:



Установившаяся ошибка системы по задающему воздействию:



Запишем передаточную функцию замкнутой системы по ошибке по возмущению:



Установившаяся ошибка системы по задающему воздействию:



Рассчитаем установившуюся ошибку системы, используя выражение (25):



Приведем размерность установившейся ошибки к размерности входного сигнала:

;



Система является статической как относительно возмущения, так и относительно задающего воздействия, установившаяся ошибка системы равна 7/282.