Московский авиационный институт

(технический университет)

**Курсовая работа**

Дисциплина: Теория вероятности и математическая статистика

Выполнил

студент группы Р 2/1

Истелюев Батырбек.

Ахтубинск-2004

**Задания**

1. Проверить выполнение теоремы Бернулли на примере электрической схемы.
2. Методом дискретных случайных величин смоделировать случайную величину, имеющую закон распределения Пуассона. Заполнить массив из 300 точек.
3. Критерием Колмогорова проверить, что данный массив имеет соответствующий закон распределения.

**Краткая теория**

В теории вероятности часто встречается такой характер приближения одних величин к другим, и для его описания введен специальный термин: «сходимость по вероятности».

Говорят, что величина Xn сходится по вероятности к величине а, если при сколь угодно малом е вероятность неравенства │Xn–a│<e с увеличением неограниченно приближается к единице. Применяя этот термин, можно сказать, что при увеличении числа опытов частота события не стремится к вероятности события, а сходится к ней по вероятности. Это свойство составляет содержание теоремы Бернулли.

Например, при бросании монеты 10 раз теоретически возможно, что все 10 раз появится герб, т.е частота появлений будет равна 1; при 1000 бросаниях такое событие возможно, но приобретает меньшую вероятность; при еще большом количестве бросаний вероятность становится на столько мала, что это событие можно считать практически неосуществимым.

**Теорема Я. Бернулли:** при увеличении количества опытов, частота появлений событий сходится по вероятности к вероятности этого события.

Теорема Я. Бернулли утверждает устойчивость частоты при постоянных условиях опыта. Но при изменяющихся условиях опыта аналогичная устойчивость также существует. Теорема, устанавливающая свойство устойчивости частот при переменных условиях опыта, называется теоремой Пуассона.

Закон Пуассона.

Рассмотрим случайную величину Х, которая может принимать целые, неотрицательные значения: 0,1,2,…,m,…

Говорят, что эта СВ Х распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определенное значение m, выражается формулой:

Pm=(am/m!)\*e-a (m=0,1,2…), a – некоторая положительная величина называемая параметром закона Пуассона.

Ряд распределения СВ Х, распределенный по закону Пуассона, имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xm | 0 | 1 | 2 | … | m | … |
| pm | e-a | (a/1!)\*e-a | (a2/2!)\*e-a | … | (am/m!)\*e-a | … |

Математическое ожидание данного распределения случайной величины равно параметру закона Пуассона а: mx=a; Дисперсия также равна этому параметру: Dx=a. Таким образом дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона равна ее математическому ожиданию и равна параметру а.

Это свойство применяется на практике для решения вопроса, правдоподобна ли гипотеза о том, что случайная величина Х, распределена по закону Пуассона, для этого определяют из опыта статистические характеристики: математическое ожидание и дисперсию. Если их значения близки, то гипотеза является правдоподобной.

Дискетной называется случайная величина, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа (т.е. между двумя возможными соседними значениями нет возможных значений), которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Другими словами, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (в последнем случае множество всех возможных значений называют счетным).

Законом распределения называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Критерий А.Н. Колмогорова.

В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями Колмогоров рассматривает максимальное значение модуля разности между статистической функцией распределения F\* (x) и соответствующей теоретической функцией распределения F(x) :

D=max│F\*(x)–F(x)│.

Основанием для выбора в качестве расхождения величины D является простота ее вычисления. Вместе с тем она имеет достаточно простой закон распределения. Колмогоров доказал, что, какова бы ни была функция распределения F(x) непрерывной случайной величины X, при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений n вероятность неравенства

D√n≥ λ стремится к пределу P(λ)=1–∑k=-∞∞(-1)k e-2∙k^(2)∙λ^(2) значения Р(λ) можно найти по таблице, зная λ.

**Задание №1**

**Проверить выполнение теоремы Бернулли на примере электрической схемы:**

Пусть вероятность того, что каждый элемент данной схемы не выйдет из строя, равна:

Р1=0,6; Р2=0,4; Р3=0,5; Р4=0,7; Р5=0,3; Р6=0,8.

**Программа, полученная в среде PASCAL:**

Program Shema;

Uses CRT;

Var a:array[1..6] of integer;

p,x:array[1..6] of real;

m,n,i,j,c:integer;

R,S,B:real;

BEGIN

CLRSCR;

p[1]:=0.6;p[2]:=0.4;p[3]:=0.5;p[4]:=0.7;p[5]:=0.3;p[6]:=0.8;

n:=1000;

c:=0;

while n<=25000 do begin

m:=0;

for i:=1 to n do begin

for j:=1 to 6 do begin

x[j]:=random;

if x[j]<p[j] then a[j]:=1 else a[j]:=0;

end;

if a[1]\*(a[2]+a[3]+a[4])\*(a[5]+a[6])>=1 then m:=m+1;

end;

R:=m/n;

writeln('кол-во опытов=',n:5,' P=',R:5:3);

S:=S+R;

n:=n+1000;

inc(c);

end;

S:=S/c;

writeln;

writeln('Вероятность безотказной работы=', s:4:5);

writeln;

B:=p[1]\*(1-(1-p[2])\*(1-p[3])\*(1-p[4]))\*(1-(1-p[5])\*(1-p[6]));

writeln('Вероятность работы(2-ой способ) =' , B:4:5);

readln;

END.

**Результаты работы:**

кол-во опытов= 1000 P=0.476

кол-во опытов= 2000 P=0.480

кол-во опытов= 3000 P=0.474

кол-во опытов= 4000 P=0.463

кол-во опытов= 5000 P=0.476

кол-во опытов= 6000 P=0.470

кол-во опытов= 7000 P=0.467

кол-во опытов= 8000 P=0.463

кол-во опытов= 9000 P=0.473

кол-во опытов=10000 P=0.476

кол-во опытов=11000 P=0.468

кол-во опытов=12000 P=0.466

кол-во опытов=13000 P=0.462

кол-во опытов=14000 P=0.472

кол-во опытов=15000 P=0.473

кол-во опытов=16000 P=0.464

кол-во опытов=17000 P=0.469

кол-во опытов=18000 P=0.474

кол-во опытов=19000 P=0.471

кол-во опытов=20000 P=0.472

кол-во опытов=21000 P=0.467

кол-во опытов=22000 P=0.464

кол-во опытов=23000 P=0.468

кол-во опытов=24000 P=0.466

кол-во опытов=25000 P=0.469

Вероятность безотказной работы=0.46972

Вероятность работы(2-ой способ) =0.46956

**Вывод:** по результатам видно, что вероятность безотказной работы цепи, при большом количестве опытов, сходится к общей вероятности безотказной работы этой цепи, значит, частота событий при большом числе опытов приближается к вероятности этого события, о чем говорит теорема Бернулли.

**Задание №2**

**Смоделировать массив из 300 дискретных случайных величин, имеющий закон распределения Пуассона.**

**Программа:**

Program Puasson;

Uses CRT;

Const a=5; d=15; n=300;k=d+1;

Var i,j,w:word;sums,ran:real;

xmin,xmax,mx,Dx,Rx,Sx,Ex,Sk,h:real;

s,al:array[0..d] of real;

x:array[1..n] of byte;

function Pwr(x,p:real):real;

Begin

randomize;

if x>0 then pwr:=exp(p\*ln(x))

else pwr:=0;

end;

function fact(x:word):real;

var i:word;

f:real;

Begin

f:=1

if x>0 then for i:=1 to x do f:=f\*i;

fact:=f;

end;

Function f(m:word):real;

begin

if m>=0 then f:=pwr(a,m)\*exp(-a)/fact(m)

else f:=0;

end;

begin

sums:=0;

for i:=1 to d do begin

s[i]:=f(i);sums:=sums+s[i];

end;

for i:=0 to d do begin al[i]:=0;

for j:=0 to i do al[i]:=al[i]+s[j]/sums;

end;

for w:=1 to n do begin

ran:=random;

for i:=0 to d do begin

if al[i]>ran then begin

x[w]:=i;break;

end;

end;

end;

writeln;

writeln('Массив,полученный по закону распределения Пуассона:');

writeln;

mx:=0;

for i:=1 to n do begin

write(x[i]:2,' ');

mx:=mx+x[i]/n;

end;

Dx:=0;

Sk:=0;

xmin:=x[1];

xmax:=xmin;

for i:=1 to n do begin

Dx:=Dx+sqr(x[i]-mx)/(n-1);

if xmin>x[i] then xmin:=x[i];

if xmax<x[i] then xmax:=x[i];

end;

SX:=sqrt(Dx);

writeln;

Rx:=d;

h:=Rx/k;

Ex:=-3;

for i:=1 to n do begin

Sk:=Sk+((x[i]-mx)\*(x[i]-mx)\*(x[i]-mx))/(sqr(dx)\*sqr(dx)\*sqr(dx));

Ex:=Ex+((x[i]-mx)\*(x[i]-mx)\*(x[i]-mx)\*(x[i]-mx))/(sqr(dx)\*sqr(dx)\*sqr(dx)\*sqr(dx))

end;

writeln('Интервал значений случайной величины:',xmin:0:3,'-',Xmax:0:3);

writeln('математическое ожидание=',mx:0:3);

writeln('Дисперсия=',Dx:0:3);

writeln('Среднее квадротическое отклонение=',Sx:0:3);

writeln('Скошенность=',Sk:0:3);

writeln('Эксцесс=',Ex:0:3);

readln;

END.

Результат работы:

Массив, полученный по закону распределения Пуассона:

2 4 5 3 8 5 5 6 5 4 3 1 6 8 7 2 8 8 7 3

8 4 4 1 5 4 2 4 3 4 1 5 7 4 6 3 3 7 4 7

6 5 4 7 2 7 4 10 5 4 4 7 6 5 4 3 4 5 7 5

2 2 3 11 7 7 6 8 4 5 8 7 9 3 6 5 3 3 6 5

7 6 2 5 1 2 6 6 4 2 13 6 5 5 2 3 9 3 7 7

2 7 6 4 3 4 1 7 6 4 5 4 4 4 5 2 5 4 3 6

3 4 4 5 7 4 4 7 6 3 8 5 7 5 4 3 4 5 6 9

2 4 8 6 8 7 6 3 5 9 2 4 8 1 7 1 4 6 6 7

2 2 3 3 3 4 3 3 1 6 7 4 8 2 3 7 5 5 6 4

6 4 9 10 4 6 4 7 4 7 3 2 3 6 9 3 4 5 6 10

5 10 7 9 5 3 4 7 6 5 7 2 3 7 6 4 5 10 3 6

7 10 3 7 5 5 5 7 7 4 5 2 5 2 9 2 5 8 4 4

5 7 5 6 5 5 4 1 3 5 5 6 9 3 5 3 5 2 13 7

7 5 1 5 3 9 7 5 3 5 5 8 7 4 10 5 5 8 7 8

7 3 4 7 8 4 2 7 7 2 3 4 6 7 4 7 4 5 7 2

Интервал значений случайной величины:1.000-13.000

математическое ожидание=5.093

Дисперсия=4.941

Среднее квадротическое отклонение=2.223

Скошенность=0.104

Эксцесс=-2.934

**Задание №3:**

**Критерием Колмогорова проверить, что данный массив, полученный во втором задание, имеет соответствующий закон распределения.**

Статистическая обработка полученного массива.

По полученному массиву построим таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| M | 0 | 10 | 26 | 39 | 53 | 54 | 33 | 48 | 17 | 10 | 7 | 1 | 0 | 2 |

где, M – количество точек.

Таблица статистических вероятностей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| P(x) | 0 | 0,033 | 0,0867 | 0,13 | 0,1767 | 0,18 | 0,11 | 0,16 | 0,0567 | 0,0333 | 0,2333 | 0,0033 | 0 | 0,0067 |

Таблица статистических значений функции:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| F(x) | 0 | 0,033 | 0,12 | 0,25 | 0,4267 | 0,6067 | 0,7167 | 0,8767 | 0,933 | 0,9667 | 0,99 | 0,9933 | 0,9933 | 1 |

**Теоретическая обработка**

Таблица теоретических вероятностей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| P\*(x) | 0,00674 | 0,034 | 0,084 | 0,14 | 0,175 | 0,175 | 0,146 | 0,104 | 0,065 | 0,036 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 0,018 | 0,00824 | 0,00343 | 0,00132 | 4,7\*10^(-4) | 1,57\*10^(-4) | 4,92\*10^(-5) | 1,46\*10^(-5) | 4\*10^(-6) | 1,05\*10^(-6) | 2,64\*10^(-7) |

F(X)=P(X<x), значит таблица теоретических значений функции распределения выглядит так:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| F\*(x) | 0,00674 | 0,04 | 0,125 | 0,265 | 0,44 | 0,616 | 0,762 | 0,867 | 0,932 | 0,968 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 0,986 | 0,995 | 0,998 | 0,999 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Находим максимальный модуль разности между F(x) и F\*(x), она равна

D=│F(6)–F\*(6)│=│0,7167–0,762│=0,0453.

Найдем λ=D\*√n=0,0453\*√300=0,78462.

Вероятность P(λ)=1–∑k=-∞∞(-1)k e-2∙k^(2)∙λ^(2) равна(при λ=0,78462 из табл)=0,544.

**Вывод:** Значение вероятности не малое, т.е.>критического значения 0.1, значит гипотезу можно считать правдоподобной.