Министерство образования РБ

Учреждение образования

« Гомельский Государственный

университет имени Ф. Скорины »

Математический факультет

Кафедра дифференциальных уравнений

Курсовая работа

**«Уравнения равновесия»**

Исполнитель:

Студентка группы М-41 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Поляк Е. М.

Научный руководитель:

Кандидат физико-математических наук

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Вересович П.П.

Г**омель 2006**

**Содержание**

Введение 3

Постановка задачи 4

Уравнения равновесия 5

Решение уравнений равновесия 12

Заключение 16

Список использованной литературы 17

## Введение

Актуальным направлением научно-технического прогресса является развитие и широкое использование возможностей современных высокопроизводительных компьютеров, сетей мультипрограммных ЭВМ и на этой основе - применение математических методов моделирования в научных исследованиях. Развитие вычислительной техники в Республике Беларусь приводит к необходимости создания систем и сетей ЭВМ, эффективно обслуживающих запросы различных пользователей. Благодоря задачам, связанным с математическим моделированием мультипрограммных вычислительных систем и анализом их производительности, с проектированием и анализом сетей передачи данных и сетей ЭВМ теория сетей массового обслуживания (СМО) является сравнительно новым и быстро развивающимся разделом теории массового обслуживания.

Исходным материалом для аналитического исследования СМО является стационарное (инвариантное) распределение вероятностей состояний. Ввиду сложности и многомерности случайных процессов, описывающих функционирование таких сетей, большинство аналитических результатов связано с получением стационарного распределения в форме произведения множителей, характеризующих стационарное распределение отдельных узлов сети.

Актуальным вопросом, связанным с исследованием СМО является доказательство инвариатности стационарного распределения таких сетей относительно функционального вида распределений длительности обслуживания в узлах, позволяющее при проектировании и эксплуатации реальных сетей, считать, что обслуживание в узлах имеет наиболее простое для анализа распределение - экспоненциальное.

## Постановка задачи

Сеть состоит из двух приборов, на каждый из которых поступает простейший поток с параметрами и соответственно. В случае, если прибор занят, заявка, поступающая на него выбивает заявку находящуюся на приборе, и та становится в очередь на дообслуживание. После обслуживания на I приборе заявка с вероятностью уходит из сети, а с вероятностью поступает на II прибор. Аналогично, после обслуживания на II приборе заявка с вероятностью уходит из сети, а с вероятностью поступает на I прибор.

Пусть - число заявок в очереди на I приборе, - число заявок в очереди на II приборе, - функция распределения времени обслуживания -ой заявки на I приборе, - функция распределения времени обслуживания -ой заявки на II приборе. Предполагается, что

 =

 =

Требуется доказать, что стационарное распределение не зависит от вида функций распределения времени обслуживания . При этом можно считать, что

,

где

, ,

т.е. когда - экспоненциальны.


## Уравнения равновесия

Введем случайный процесс

,

где - число заявок в очереди на I приборе в момент времени , - число заявок в очереди на II приборе в момент времени , -время, которое еще будет дообслуживаться заявка с момента , стоящая i-ой в очереди I прибора, -время, которое еще будет дообслуживаться заявка с момента , стоящая j-ой в очереди II прибора.

Пусть существует стационарное эргодическое распределение процесса и процесса , т.к. процесс - это процесс , дополненный непрерывными компонентами до того, чтобы быть марковским.

Изучим поведение процесса в устойчивом режиме. Пусть

Введем в рассмотрение событие А, состоящее в том, что



а) Предположим, что за время от до не было поступления требований. Тому, чтобы не изменило за время своего значения и при этом выполнилось событие А, отвечает выражение:



б) Тому, что за время от до на 1-ом приборе обслужена заявка и ушла из сети, отвечает слагаемое:



Тому, что за время от до на 2-ом приборе обслужена заявка и ушла из сети, отвечает слагаемое:



в) Тому, что за время от до на 1-ый прибор поступила заявка. Количество времени на дообслуживание этой заявки должно быть не больше, чем , где - определяется моментом поступления заявки внутри интервала . Этому случаю отвечает слагаемое:



Тому, что за время от до на 2-ой прибор поступила заявка. Количество времени на дообслуживание этой заявки должно быть не больше, чем , где - определяется моментом поступления заявки внутри интервала . Этому случаю отвечает слагаемое:



г) Если в интервале заявка окончила свое обслуживание на I приборе и перешла на II, то время на ее дообслуживание II прибором должно быть не больше, чем , где - определяется моментом поступления заявки внутри интервала .



Если в интервале заявка окончила свое обслуживание на II приборе и перешла на I, то время на ее дообслуживание I прибором должно быть не больше, чем , где - определяется моментом поступления заявки внутри интервала .



Наконец, остальные случаи, благодаря событию А сводятся к тому, что за время либо поступало, либо обслужено более одной заявки, или заявки поступали и обслуживались. Для простейшего входящего потока вероятность поступления двух и более заявок за время есть . Если же мы будем рассматривать слагаемые, соответствующие возможности окончания обслуживания в сочетании с поступлением заявок, то, очевидно, что эти слагаемые есть . Таким образом, приходим к следующим соотношениям:













Вводя обозначение



и учитывая, что



,

последнее соотношение перепишется в виде



Рассматривая все слагаемые в последнем соотношении как сложные функции от , разлагаем их в ряд Тейлора в окрестности 0 с остаточным членом в форме Пеано:

.

После чего приводим подобные слагаемые и устремляем к . Тогда вводя обозначение



и учитывая, что

,

,

,

получаем, что свободные члены сократились, а слагаемые, содержащие своим сомножителем образуют уравнениям равновесия.

Таким образом, приходим к уравнениям равновесия:

.


## Решение уравнений равновесия

Покажем, что удовлетворяет нашим уравнениям равновесия, где - решение для случая, когда и - экспоненциальны, т.е.

,

.

Для этого распишем все частные производные функции .

.

С учетом вида функции уравнения равновесия перепишутся в виде

.

Подставив в это уравнение и, учитывая, что



приходим к выводу, что функция

.

есть неотрицательное, абсолютно-непрерывное решение исходных уравнений равновесия.

Отсюда следует, что стационарное распределение не зависит от вида функций распределения времени обслуживания и , поскольку , при этом можно считать, что

,

где

, ,

т.е. когда и - экспоненциальны.


## Заключение

Таким образом, для рассматриваемой сети массового обслуживания установлена инвариантность стационарного распределения относительно функционального вида распределений длительности обслуживания в узлах, т.е. установили, что стационарное распределение не зависит от вида функций распределения времени обслуживания и , если известно, что для них выполняется следующие ограничения:

 =

 =

При этом, можно считать, что функции распределения времени обслуживания и имеют экспоненциальный вид.


## Список использованной литературы

1. Буриков А.Д., Малинковский Ю.В., Маталыцкий М.А.//Теория массового обслуживания: Учебное пособие по спецкурсу.-Гродно: 1984г.-108с.

2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. // Введение в теорию массового обслуживания.-Москва: Наука. 1966г.-432с.