# МИНЕСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математический факультет

Кафедра вычислительной математики, информатики и методики ее преподавания

КУРСОВАЯ РАБОТА

взаимодействия двух радиально пульсирующих пузырьков газа в жидкости

Выполнил студент 146 группы: Вафин А.А.

Научный руководитель: д. ф. – м. н. Аганин А. А.

Казань – 2007

# Содержание

## Введение

## Постановка задачи в рамках уравнений динамики жидкости

## Математическая модель взаимодействия пузырьков

## Методика решения

## Исследование взаимодействия двух радиально пульсирующих пузырьков газа в жидкости

## Заключение

## Литература

## Приложение. (Программа расчета).

# Введение

К настоящему времени довольно хорошо изучена динамика отдельного пузырька газа в жидкости. Полученные в этом отношении результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение. Вместе с тем, в реальных жидкостях, как правило, присутствует не один, а множество пузырьков, так что свойства жидкостей существенно зависят от особенностей взаимодействия между пузырьками. В силу большей сложности этот вопрос является менее изученным, хотя он и имеет важное прикладное значение.

В данной курсовой работе исследуется взаимодействия двух радиально пульсирующих пузырьков газа в жидкости ранние выведенной математической модели. В принципе, такое взаимодействие можно изучать и на основе широко известных уравнений Навье-Стокса методом прямого численного моделирования. Однако такой подход пока не используется в силу больших потребностей компьютерного времени даже на современных компьютерах с высоким быстродействием. В модели, использующейся в курсовой работе, жидкость считается невязкой несжимаемой, пузырьки – осесимметричными. Пузырьки расположены сносно. Их общая ось симметрии направлена вертикально вдоль действия силы тяжести. Пузырьки совершают нелинейные радиальные колебания, а скорости их вертикального пространственного перемещения считаются малыми. Используются три системы отсчета, одна неподвижная и две подвижные. В качестве неподвижной системы приняты декартовые координаты, а в качестве подвижных систем – сферические координаты. Начало отсчета радиальных координат в подвижных сферических системах отсчета связано с центрами пузырьков. Поверхности каждого из пузырьков представляются в виде ряда по поверхностным сферическим гармоникам нулевой, второй, третьей, четвертой и т.д. степеней. При этом сферическая гармоника нулевой степени описывает радиальную составляющую поверхности пузырька, а гармоники второй, третьей и т.д. степеней – отклонения от сферической формы в виде соответствующей гармоники (второй степени – эллипсоидальные отклонения, третьей – грушеобразные и т.д.).

Созданная математическая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков, пространственного положения их центров и амплитуды отклонений от сферической формы пузырьков в виде сферических поверхностных гармоник. При выводе этих уравнений используются частные решения уравнения Лапласа в сферической системе координат и интеграл Коши-Лагранжа.

# Постановка задачи в рамках уравнений динамики жидкости

Рассматривается динамика двух газовых пузырьков в неограниченном объеме невязкой несжимаемой жидкости. Динамика жидкости описывается уравнениями

, . (1)



Здесь – время эйлеровых (неподвижных) систем координат , , (нижний индекс означает частную производную), – вектор скорости, – плотность жидкости, – давление, , , , –направляющие векторы пространственных координат. Здесь и далее, если не оговорено противное, по повторяющимся индексам предполагается суммирование (здесь от 1 до 3).



Пузырьки расположены вдоль вертикальной оси неподвижной декартовой системы координат (рис.1).

Рис.1



*x*

*z*



На поверхности каждого пузырька выполняются следующие условия:

кинематическое

, (2)



и динамическое

. (3)



Здесь – скорость точки поверхности пузырька, – нормаль к поверхности пузырька, верхние знаки указывают на отношение к внешней (+) и внутренней (–) сторонам поверхности.



Газ в пузырьках принимается гомобарическим (с однородным распределением давления) с давлением, изменяющимся по закону (Ван-дер-Ваальса)

, (4)



где – начальное давление газа в пузырьке, – текущий и начальный объемы пузырька, – постоянная, – показатель адиабаты.



На бесконечном удалении от пузырьков давление жидкости совершает гармонические колебания



, (5)



где – статическое давление в жидкости, , – амплитуда и частота колебаний.



Рассматриваются случай, когда форма пузырьков в интересующем промежутке времени остается относительно близкой к сферической.

# Математическая модель взаимодействия пузырьков

В пятом приближении относительно уравнения динамики двух газовых пузырьков в вязкой сжимаемой жидкости представляют собой систему, состоящую из четырех дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков , координат их центров



;



;



;



;



# Методика решения

Имея четыре уравнения второго порядка относительно радиуса и положения центра пузырьков. Вводим замену, чтобы избавится от второго порядка, и запишем уравнения 1 ого порядка:



Получаем систему 8-и уравнений 1-го порядка относительно радиуса, положения центра пузырьков, скорость изменения радиусов и положения центра пузырьков.

;



()/;



/;



/;



/;



/;



/;



;



()/;



()/;



()/;



/;



/;



()/;



;



/;



0;



()/;



()/;



/;



()/;



;



/;



0;



()/;



()/;



/;



()/;



Отсюда получаем данные уравнения в следующем виде:



**Решим уравнение методом последовательных приближений.**

В нулевом приближении данные уравнения записываются относительно радиуса и положения центра пузырьков.



Подставляя выражения, находим уравнения нулевого приближения:



В первом приближении уравнения записываются относительно радиуса, положения центра пузырьков, скорость изменения радиусов и положения центра пузырьков. Полученное первое приближение добавляем к нулевому приближению. И так находим до пятого приближения.



Исходя из этого, можем записать следующую систему:



Полученные дифференциальные уравнения решаются методом Дортсмана–Принса восьмой степени точности. (Программа приведена ниже).

# Исследование взаимодействия двух радиально пульсирующих пузырьков газа в жидкости

Для учета влияния вязкости и сжимаемости жидкости проводим следующую модификацию математической модели. (По аналогии с работой Дойникова[?]).

1. С учетом сжимаемости жидкости получим следующие уравнения:

;



;



## Решение для нулевого приближения для одного пузырька

;



**Вводим замены**:

; ; ;*;*



= =;



*- начальное давление газа в пузырьке;*



*; -давление газа в пузырьке.*



*А - константа Ван-дер-Ваальса;*

*- коэффициент поверхностного натяжения;*



*- давление газа в пузырьке;*



*- статическое давление в жидкости;*



*- Начальный радиус пузырька;*



*R - Радиус пузырька;*

*- Центр пузырька;*



*u - Вектор скорости жидкости;*

*-давление в жидкости на большом удалении от пузырька, где*



*- амплитуда и частота колебаний давления. Рассматривается лишь один период колебаний ().*



*- Плотность жидкости;*



*- Скорость звука в жидкости;*



*- Кинематический коэффициент вязкости*



*- расстояние между пузырьками*.



;



;



Обозначим слагаемые и сомножители через: , ,,,:



; ; ;



; ;



;



;



Добавляем второе уравнение: =0 =>



;



;



### Добавляем уравнение второго пузырька

;



; ; ; = =;



;



;



; ; ;



; ;



;



;



Добавляем второе уравнение: =0 =>



;



;



## Решение для первого приближения одного пузырька

;



;



;



;



();



;



### Добавляем уравнение второго пузырька

;



;



;



;



;



## Решение для второго приближения одного пузырька

;



/



;



;



();



;



;



### Добавляем уравнение второго пузырька

;



;



;



;



;



;



## Решение для третьего приближения одного пузырька

;



)/



;



;



;



;



;



;



;



### Добавляем уравнение второго пузырька

;



;



;



;



;



;



;



;



## Решение для четвертого приближения одного пузырька

;



)/



;



;



;



;



;



;



;



;



;



### Добавляем уравнение второго пузырька

;



;



;



;



;



;



;



;



;



;



## Решение для пятого приближения одного пузырька

;



)/



;



;



;



;



;



;



;



;



;



;



;



### Добавляем уравнение второго пузырька

;



;



;



;



;



;



;



;



;



;



1. Для исследования добавляем вязкость и решаем уравнение:



;



;



где , (*j* = 1,  *i* = 2);



- Кинематический коэффициент вязкости;



,



, , ,



Вводим замену, чтобы избавится от второго порядка, и запишем уравнения 1 ого порядка:



Для первого уравнения:

;



=;



;



;



;



0;



;



;



;



;



Для второго уравнения:

;



=;



;



;



;



0;



;



;



;



;



|  |
| --- |
| Рис.1. Изменение радиуса пузырька и положения его центра во времени. |