Министерство образования и науки Украины

Донецкий государственный институт искусственного интеллекта

Донецкий лицей «Интеллект»

Кафедра математики и информатики

Научная работа

на тему: «Применение неравенств при решении олимпиадных задач».

( электронный учебник )

Выполнила:

ученица 11-Г класса

Борисенкова О.Д.

Научный руководитель:

Степанов Т.Л.

Донецк 2006

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение

1 Постановка задачи

2 Актуальность

3 Реализация задачи

3.1 Теоретические сведения

3.2 Решение задач с применением данных неравенств

3.3 Сборник задач

3.4 Тесты

4 Инструкция по пользованию

Выводы

Список использованной литературы

**ВВЕДЕНИЕ**

При решении задач, предлагаемых на вступительных письменных экзаменах и олимпиадах по математике, могут быть использованы любые известные абитуриентам математические методы. При этом разрешается пользоваться и такими, которые не изучаются в общеобразовательной школе.

Все это свидетельствует о необходимости самостоятельного изучения абитуриентами математических методов, в основе которых лежат понятия и положения, не входящие в программу по математике общеобразовательной школы. К таким понятиям, например, относятся неравенства Коши, Коши-Буняковского, Бернулли и Йенсена.

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Таким образом, целью данной работы является разработка электронного обучающего пособия, в котором будет предложен материал по выбранной теме. Т.е. в учебнике будут предоставлены теоретические сведения по всем неравенствам, примеры применения этих неравенств в решении олимпиадных задач, сборник задач для самостоятельного решения, решения к ним, а также тестовые вопросы, которые позволят оценить себя и проверить уровень полученных знаний.

Для реализации поставленной задачи был выбран язык электронной разметки текста HTML.

**2. АКТУАЛЬНОСТЬ**

Данная разработка рассчитана на учащихся, которые имеют довольно-таки высокий уровень знаний в области математики, причем как в пределах, так и вне школьной программы, но все равно хотят его повысить. Т.е. этот учебник будет очень полезным для самостоятельного изучения темы и подготовки к олимпиадам ІІ-ІІІ этапов.

Также очень удобен и прост в применении, для работы с ним не требуется никаких специальных программ или дополнительных приложений, кроме стандартного Internet-браузера.

Важным пунктом является то, что в учебнике собрана информация по теме неравенств, которую в принципе довольно-таки сложно найти, причем так, чтобы она была в одном и том же печатном издании. Большая часть сведений по некоторым неравенствам была найдена только в периодических изданиях, журналах. Здесь же все собрано воедино, информация представлена кратко, но исчерпывающе для того, чтобы разобраться и понять.

**3. РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ**

**3.1 Теоретические сведения**

Неравенство Йенсена

Теорема (неравенство Йенсена):

Пусть – функция, выпуклая на некотором интервале, x1, x 2, …, x n – произвольные числа из этого интервала, а α1, α2, …, αn – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда:



. (1)



Доказательство:

Рассмотрим на графике функции точки А1, А2, …, Аn с абсциссами х1, x2, …, xn. Расположим в этих точках грузы с массами, m2, …, mn. Центр масс этих точек имеет координаты



.

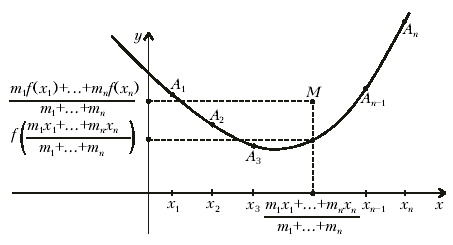


Так как точки А1, А2, …, Аn принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику (ибо надграфик – выпуклая фигура). А это означает, что ордината центра масс М не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой (рис. 1), т.е.

. (2)



рис. 1



Для завершения доказательства остаётся положить m1= α1, …, mn= αn.

Однако есть два важных замечания. Во-первых, в процессе доказательства неравенства Йенсена (1) мы доказали неравенство (2). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (1) (i=1, 2, ..., n), мы получаем неравенство (2). Поэтому естественно эти два неравенства называются неравенствами Йенсена. Неравенство (1) выглядит более компактно, однако для приложений удобней пользоваться неравенством (2). Во-вторых, если функция вогнутая, то для неё неравенства Йенсена (1) и (2) меняются на противоположные. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть выпуклую функцию .



Неравенство Коши-Буняковского

На первый взгляд, неравенство Йенсена не производит особого впечатления: слишком общо выглядит формулировка. Однако дальше можно убедиться, что это впечатление обманчиво.

Продемонстрировать силу неравенства Йенсена можно на конкретном примере. А именно, доказать знаменитое неравенство Коши-Буняковского , где a1, a2, …, an, b1, b2, …, bn – произвольные положительные числа.



Доказательство:

Как мы знаем, функция - выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Йенсена (2):



, (mi > 0).



Следовательно, . Положив , получим требуемое неравенство.



Неравенство Коши

При решении многих задач часто используется классическое неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическим неотрицательных чисел.

Пусть x1, x 2, …, x n – неотрицательные числа. Средним арифметическим этих чисел называется число –

.



Средним геометрическим чисел x1, x 2, …, x n называется число –

.



Теорема 1. Если x1, x 2, …, x n – неотрицательные числа, то имеет место неравенство

. (1)



Причём знак равенства в нем достигается тогда и только тогда, когда все числа равны.

Соотношение (1) называется неравенством Коши. При n=2 неравенство Коши следует из очевидного неравенства

. Действительно, , откуда



. (2)



Отметим, что знак равенства в (2) имеет место тогда и только тогда, когда x1=x2.

Пусть x1, x 2, …, x n – положительные числа. Средним гармоническим (средним пропорциональным) этих чисел называется число –

.



Теорема 2. Если x1, x 2, …, x n – положительные числа, то имеют место неравенства

An ≥Gn ≥ Hn.

Действительно, применяя к числам неравенство Коши, получаем



, (3)



откуда Gn ≥ Hn.

Пусть x1, x 2, …, x n – произвольные числа. Средним квадратическим этих чисел называется число –

.



Теорема 3. Если x1, x 2, …, x n – положительные числа, то имеют место неравенства

Kn ≥ An ≥ Gn ≥ Hn , или

. (4)



Причём знак равенства в (4) достигается тогда и только тогда, когда все числа равны.

Для двух чисел неравенство (4) можно записать как

,



которое очень легко доказать с помощью простых преобразований. А именно,



аналогично доказывается и для n чисел, откуда Kn ≥ An.

Неравенство Бернулли

Ещё один способ решения некоторых олимпиадных задач – это использование неравенства Бернулли, которое иногда может значительно облегчить задачу. «Классическое» неравенство Бернулли формируется следующим образом:

Теорема. Для x > -1 и произвольного натурального n имеет место

(1)



причем равенство в (1) достигается при x=0, n=0 или n=1.

Однако кроме (1) существует и более общее неравенство Бернулли, которое содержит в себе два неравенства:

если n<0 или n>1, то

, (2)



если 0<n<1, то

, (3)



где x > -1.

Следует отметить, что равенства (2) и (3) имеют место лишь при x=0.

Доказательство(I способ):

, где xi – числа одного и того же знака и .



Применяем метод математической индукции.

Проверяем неравенство для n=1: . Неравенство верно.



Пусть неравенство верно для n членов, т.е. верно неравенство

.



Умножим его на неотрицательное число 1+xn+1 (оно неотрицательно, т.к. ). Получим:



.



Т.к. xi одного знака, произведения в правой части положительны, и если их отбросить, неравенство только усилится. Получаем:

.



Как мы видим, неравенство верно и для n+1 членов, а значит верно для любых n.

Доказательство(II способ):

Также применяем метод математической индукции.

При n=1 имеем , . Утверждаем, что при n=k неравенство верно: . Тогда при n=k+1 имеем



.



Неравенство доказано.

Весовое (общее) неравенство Коши

Ранее мы рассмотрели так называемое классическое неравенство Коши. Однако очень большое значение имеет также одно важное обобщение неравенства Коши – это общее, или весовое, неравенство Коши.

Теорема. Для любых действительных положительных чисел m1, m2, …, mn и для любых неотрицательных x1, x2, …, xn имеет место неравенство

. (1)



Числа m1, m2, …, mn называются весовыми коэффициентами.

Неравенство (1) выполняется и для неотрицательных весовых коэффициентов m1, m2, …, mn, но в этом случае необходимо требовать, чтобы знаменатель левой части (1) не превращался в ноль и выражения имели смысл (т.е. не все m1, m2, …, mn равны нулю и числа xi и mi одновременно не равнялись нулю).



Понятно, что при m1= m2= …= mn, весовое неравенство Коши превращается в обыкновенное неравенство Коши.

Выражение, которое стоит в левой части (1), называется весовым средним арифметическим, а то, которое в правой – весовым средним геометрическим.

Неравенство (1), для натуральных m1, m2, …, mn, непосредственно следует из обыкновенного неравенства Коши:

. (2)



Неравенство (1) с неотрицательными рациональными весовыми коэффициентами легко привести к случаю, когда .



**3.2 Решение задач с применением данных неравенств**

Неравенство Йенсена

Задача:

Пусть a1,…, an > 0, . Доказать .



Решение:

Записываем неравенство Йенсена для f(x)=x2, mi=n. Получаем:

, , ,



что и требовалось доказать.

Неравенство Коши-Буняковского

Задача:

Пусть a+b+c=1. Доказать, что .



Решение:

Из неравенства Коши-Буняковского имеем

.



А отсюда имеем, что .



Неравенство Коши

Задача:

Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна единице. Доказать, что

(1+a)(1+b)(1+c) ≥ 8(1-a)(1-b)(1-c).

Решение:

Поскольку a+b+c=1, то 1+a= (1-b)+(1- c). Используя неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим , получаем



.



Аналогично

,



.



Перемножая все три неравенства, получаем искомое неравенство.

Неравенство Бернулли

Задача:

Решить уравнение

.



Решение:

К каждому слагаемому левой части уравнения применяем неравенство Бернулли, тогда

,



причем равенство возможно лишь при , т.е. x=±1. Следовательно, x=±1 – корни уравнения.



Весовое (общее) неравенство Коши

Задача 1:

Для действительных положительных чисел a, b доказать неравенство .



Решение:

По весовому неравенству Коши (), имеем



.



Для завершения доказательства осталось учесть очевидное неравенство . Равенство достигается при a=b.



Задача 2:

Для произвольных a,b≥0 доказать неравенство

(1).



Решение:

По весовому неравенству Коши имеем, что

.



Добавляя к указанному неравенству аналогичное



получаем

,



что и требовалось доказать. Равенство в (1) достигается при a=b.

Понятно, что решение этой задачи состоит из двух ключевых идей. Первая – это неравенство (2). Вторая – переход от неравенства (2) к неравенству (1).

Что касается неравенства (2), то пока ещё не понятно, как можно было «угадать», что для решения задачи надо было использовать неравенство Коши именно с такими весовыми коэффициентами m1=7, m2=4, m3=1.

Покажем, что эти коэффициенты можно найти (именно так они и были найдены) с помощью стандартной процедуры: «метода неопределённых коэффициентов». Неравенство (2) будем искать из таких соображений. Рассмотрим весовое неравенство Коши

. (4)



Подберём весовые коэффициенты m1, m2, m3 так, чтобы в правой части неравенства (4) получить a3b. Для этого достаточно решить систему

(5)



Кроме этого, если к (4) добавить аналогичное неравенство (в решении задачи это было неравенство (3))

, (6)



то получим

. (7)



Следовательно, чтобы неравенство (7) совпало с неравенством в задаче, к системе (5) надо прибавить еще два равенства

(8)



Решая систему (8), имеем m1=7 m3, m2=4 m3. При таком подборе m1 , m2 , m3 неравенство (4) становится неравенством (2), неравенство (6) – неравенством (3), а неравенство (7) – неравенством (1).

Подводя итоги сказанному, мы видим, что для доказательства неравенства типа (1) записываем общее весовое неравенство Коши с неопределенными весовыми коэффициентами, где слева стоят все слагаемые левой части, а справа – одно слагаемое правой части искомого неравенства. Подбираем неопределенные коэффициенты (путем решения соответствующей системы равенств) так, чтобы после симметризации весового неравенства найти решение задачи.

**3.3 Сборник задач**

Упражнение 1. Неравенство Йенсена:

1.Докажите неравенство , (подсказка: ).



2.Докажите неравенство , где .



3.Докажите неравенство , при .



Упражнение 2. Неравенство Коши-Буняковского:

1.Доказать, что , где a,b,c – стороны треугольника; ha, hb, hc – высоты треугольника, опущенные на эти стороны; S – площадь треугольника.



2.Доказать, что , .



3.Доказать, что , если .



Упражнение 3. Неравенство Коши:

1.Для неотрицательных a, b, c выполняется условие a2+b2+c2=1. Доказать, что .



2.Дано: a, b, c≥0, a+b+c=1. Доказать неравенство: .



3.Доказать: .



4.Дано: x, y, z>0, xyz=1. Доказать .



Упражнение 4. Неравенство Бернулли:

1.Решить уравнение: .



2.Решить уравнение: .



3.Решить уравнение: .



Упражнение 5. Весовое (общее) неравенство Коши:

1.Доказать неравенство , если .



2.Доказать неравенство: .



3.Доказать неравенство:.



**3.4 Тесты**

1. Какая зависимость между коэффициентами αi в неравенстве Йенсена

?



а) их произведение равно единице

б) их сумма равна единице

в) они равны между собой

г) никакой

2. Как доказать неравенство Коши-Буняковского?

а) доказать неравенство Йенсена для функции



б) применить неравенство Коши для n чисел

в) доказать методом математической индукции

г) путем алгебраических преобразований

3. Когда достигается равенство в неравенстве Коши?

а) когда сумма всех чисел равна их количеству

б) когда их произведение равно единице

в) когда все числа равны между собой

г) никогда

4. В неравенстве Бернулли x – переменная – может быть…

а) любым числом

б) строго меньше нуля

в) строго больше нуля

г) строго больше минус единицы

5. В каком случае весовое неравенство Коши превращается в классическое неравенство Коши?

а) когда все переменные равны между собой

б) когда все весовые коэффициенты равны между собой

в) когда произведение весовых коэффициентов равно единице

г) когда сумма весовых коэффициентов равна единице

6. С помощью какого неравенства лучше доказывать неравенство

?



а) с помощью неравенства Коши

б) с помощью неравенства Бернулли

в) с помощью неравенства Йенсена

г) с помощью неравенства Коши-Буняковского

7. Какую надо применить функцию в неравенстве Йенсена, чтобы доказать

?



а)



б)



в)



г)



8. Чему равны весовые коэффициенты в неравенстве ?



а)



б)



в)



г)



9. Какое неравенство доказывается с помощью неравенства Коши-Буняковского?

а)



б)



в)



г) .



**4. ИНСТРУКЦИЯ ПО ПОЛЬЗОВАНИЮ**

Данный электронный учебник по математике предназначен для изучения темы «Использование неравенств при решении олимпиадных задач».

Стартовая страница является титульным листом, на котором находится тема работы и сведения об ее авторе. Вторая страница – инструкция по пользованию самим приложением, внизу которой находится ссылка «поехали!!». Нажав на нее, пользователь попадает на главную страницу учебника.

Окно приложения состоит из двух частей: левая – навигация по учебнику, правая – основное окно, в котором предоставляется вся информация.

Весь учебник разбит на главы, что облегчает восприятие информации.

В «инструкции по пользованию учебником» (вторая страница в приложении) описаны все правила, выполнение которых необходимо для корректной работы разработки.

**ВЫВОДЫ**

В результате проделанной работы был подобран материал по теме «Неравенства в олимпиадных задачах», а именно: теоретические сведения по неравенствам Йенсена, Коши, Коши-Буняковского и Бернулли, задачи, в решениях которых используются эти неравенства, а также составлены тестовые вопросы для проверки уровня полученных знаний. Все это было собрано и оформлено в виде электронного учебника, написанного на языке HTML. Учебник позволяет самостоятельно изучать эту тему, получая знания на достаточном уровне.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1972. – 416 с.: ил.
2. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Йенсена. – Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №4, 1990. – 95с.:ил.
3. Конюшков А. Неравенство Коши-Буняковского. – Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №8, 1987. – 110с.:ил.
4. Лещев Д. Создание интерактивного web-сайта: учебный курс. – СПб.: Питер, 2003. – 544 с.: ил.
5. Супрун В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. – Мн.: Полымя, 1998. – 108 с. – («В помощь абитуриентам и студентам»)