**Введение.**

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседнев­ной практике, являются многовариантными. Среди множе­ства возможных вариантов в условиях рыночных отно­шений приходится отыскивать наилучшие в некотором смысле при ограничениях, налагаемых на природные, эко­номические и технологические возможности. В связи с этим возникла необхо­димость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций и систем математические методы и современную вычислительную технику? Такие методы объединяются под общим названием — математическое программирование.

*Математическое программирование —* область мате­матики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограниче­ниями, т. е. задач на экстремум функции многих пере­менных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют *целевой, показателем эффективности* или *критерием опти­мальности.* Экономические возможности формализуются в виде *системы ограничений.* Все это составляет матема­тическую модель. *Математическая модель* задачи — это отражение ори­гинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д. Модель задачи математического программирования включает:

1. совокупность неизвестных величин*,* действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют *планом задачи* (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.);
2. целевую функцию (функцию цели, показатель эф­фективности, критерий оптимальности, функционал зада­чи и др.). Целевая функция позволяет выбирать наилуч­ший вариант -из множества возможных. Наилучший ва­риант доставляет целевой функции экстремальное значе­ние. Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень об­служивания или дефицитности, число комплектов, отходы и т. д.;

Эти условия следуют из огра­ниченности ресурсов, которыми располагает общество в любой момент времени, из необходимости удовлетворения насущных потребностей, из условий производственных и технологических процессов. Ограниченными являются не только материальные, финансовые и трудовые ресурсы. Таковыми могут быть возможности технического, техноло­гического и вообще научного потенциала. Нередко по­требности превышают возможности их удовлетворения. Математически ограничения выражаются в виде уравне­ний и неравенств. Их совокупность образует *область до­пустимых решений (область экономических возможно­стей).* План, удовлетворяющий системе ограничений зада­чи, называется *допустимым*. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, на­зывается *оптимальным.* Оптимальное решение, вообще говоря, не обяза­тельно единственно, возможны случаи, когда оно не су­ществует, имеется конечное или бесчисленное множество оптимальных решений.

Один из разделов математического программирования - *линейным программированием*. Методы и модели линейного программирования широко применяются при оптимизации процессов во всех отраслях народного хозяйства: при разработке производственной программы предприятия, распределении ее по исполните­лям, при размещении заказов между исполнителями и по временным интервалам, при определении наилучшего ассортимента выпускаемой продукции, в задачах перспек­тивного, текущего и оперативного планирования и управ­ления; при планировании грузопотоков, определении плана товарооборота и его распределении; в задачах раз­вития и размещения производительных сил, баз и складов систем обращения материальных ресурсов и т. д. Особенно широкое применение методы и модели линейного програм­мирования получили при решении задач экономии ресур­сов (выбор ресурсосберегающих технологий, составление смесей, раскрой материалов), производственно-транспорт­ных и других задач.

Начало линейному программированию было положено в 1939 г. советским математиком-экономистом Л. В. Кан­торовичем в работе «Математические методы организации и планирования производства». Появление этой работы открыло новый этап в применении математики в эконо­мике. Спустя десять лет американский математик Дж. Данциг разработал эффективный метод решения данного класса задач — симплекс-метод. Общая идея *симплексного метода (ме­тода последовательного улучшения плана)* для решения ЗЛП состоит в следующем:

1. умение находить начальный опорный план;
2. наличие признака оптимальности опорного пла­на;
3. умение переходить к нехудшему опорному плану.

**§1.Задача линейного программирования и свойства ее решений.**



**1.1 Понятие линейного программирования.** Линейное про­граммирование—раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополни­тельных ограничениях, налагаемых на переменные. По типу решаемых задач его методы разделяются на уни­версальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые *задачи линейного про­граммирования* (ЗЛП). Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с на­хождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

Формы записи задачи линейного программирования:

Общей задачей линейного программирования называют задачу

(1)



при ограничениях

(2)



(3)



(4)



(5)



- произвольные (6)



где - заданные действительные числа; (1) – целевая функция; (1) – (6) –ограничения;



- план задачи.



**1.2 Свойства решений.**

Пусть ЗПЛ представлена в следующей записи:

(7)



(8)



(9)



Чтобы задача (7) – (8) имела решение, системе её ограничений (8) должна быть совместной. Это возможно, если r этой системы не больше числа неизвестных n. Случай r>n вообще невозможен. При r= n система имеет единственное решение, которое будет при оптимальным. В этом случае проблема выбора оптимального решения теряет смысл. Выясним структуру координат угловой точки много­гранных решений. Пусть r<n. В этом случае система векторов содержит базис — максимальную линейно независимую подсистему векторов, через которую любой вектор системы может быть выражен как ее линей­ная комбинация. Базисов, вообще говоря, может быть несколько, но не более *.* Каждый из них состоит точно из r векторов. Переменные ЗЛП, соответствующие r век­торам базиса, называют, как известно, *базисными* и обо­значают БП. Остальные n – r переменных будут *свобод­ными,* их обозначают СП. Не ограничивая общности, будем считать, что базис составляют первые m векторов . Этому базису соответствуют базисные переменные *,* а свобод­ными будут переменные *.*



Если свободные переменные приравнять нулю, а базис­ные переменные при этом примут неотрицательные значе­ния, то полученное частное решение системы (8) назы­вают *опорным решением (планом).*

**Теорема.** Если система векторов содер­жит m линейно независимых векторов , то допустимый план (10) является крайней точкой многогранника планов*.*



**Теорема**. Если ЗЛП имеет решение, то целевая функция достигает экстремального значения хотя бы в одной из крайних точек многогранника решений. Если же целевая функция достигает экстремального значения бо­лее чем в одной крайней точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся их выпуклой ли­нейной комбинацией.

**§2.Графический способ решения ЗЛП.**

Геометрическая интерпретация экономических задач дает возможность наглядно представить, их структуру, выявить особенности и открывает пути исследования бо­лее сложных свойств. ЗЛП с двумя переменными всегда можно решить графически. Однако уже в трехмерном пространстве такое решение усложняется, а в простран­ствах, размерность которых больше трех, графическое решение, вообще говоря, невозможно. Случай двух переменных не имеет особого практиче­ского значения, однако его рассмотрение проясняет свой­ства ОЗЛП, приводит к идее ее решения, делает геомет­рически наглядными способы решения и пути их практи­ческой реализации.

Пусть дана задача

(11)



(12)



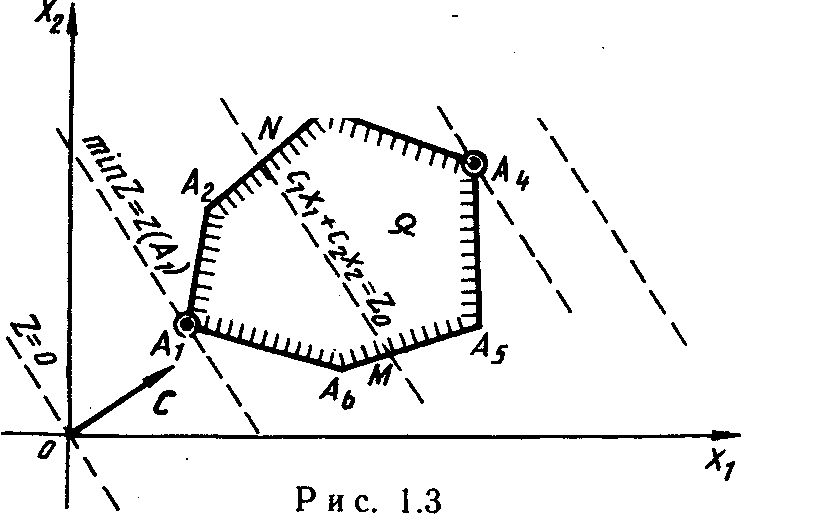
(13)



Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи. Каждое из ограничений (12), (13) задает на плоскости некоторую полуплоскость. Полу­плоскость — выпуклое множество. Но пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множест­вом. Отсюда следует, что область допустимых решений задачи (11) — (13) есть выпуклое множество.



Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции. Пусть область допустимых решений ЗЛП — не­пустое множество, например многоугольник .



Выберем произвольное значение целевой функ­ции ***.*** Получим *.* Это уравнение пря­мой линии. В точках прямой *NМ* целевая функция сохра­няет одно и то же постоянное значение . Считая в ра­венстве (11) параметром, получим уравнение семей­ства параллельных прямых, называемых линиями уровня целевой функции (линиями постоянного значения).



Найдём частные производные целевой функции по и



(14)



(15)



Частная производная (14) ((15)) функции пока­зывает скорость ее возрастания вдоль данной оси. Следо­вательно, и *—* скорости возрастания соответст­венно вдоль осей и . Вектор называ­ется градиентом функции. Он показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции:



Вектор — указывает направление наискорейшего убывания целевой функции. Его называют антигра­диентом.



Вектор перпендикулярен к прямым семейства



Из геометрической интерпретации элементов ЗЛП вы­текает следующий порядок ее графического решения.

1. С учетом системы ограничений строим область до­пустимых решений



1. Строим вектор наискорейшего возра­стания целевой функции — вектор градиентного направ­ления.



1. Проводим произвольную линию уровня



1. При решении задачи на максимум перемещаем ли­нию уровня в направлении вектора так, чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайнем по­ложении (крайней точке)*.* В случае решения задачи на минимум линию уровня перемещают в антиградиентном направлении



1. Определяем оптимальный план и экстре­мальное значение целевой функции *.*



**§3.Симплексный метод.**

Общая идея симплексного метода (ме­тода последовательного улучшения плана) для решения ЗЛП состоит

1. умение находить начальный опорный план;
2. наличие признака оптимальности опорного пла­на;
3. умение переходить к нехудшему опорному плану.

Пусть ЗЛП представлена системой ограничений в каноническом виде:

.



Говорят, что ограничение ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательной правой части левая часть ограничений содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения равенства - с коэффициентом, равным нулю.



Пусть система ограничений имеет вид



Сведем задачу к каноническому виду. Для этого прибавим к левым частям неравенств дополнительные переменные . Получим систему, эквивалентную исходной:



,



которая имеет предпочтительный вид

.



В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю .



Пусть далее система ограничений имеет вид



Сведём её к эквивалентной вычитанием дополнительных переменных из левых частей неравенств системы. Получим систему



Однако теперь система ограничений не имеет предпочтительного вида, так как дополнительные переменные входят в левую часть (при ) с коэффициентами, равными –1. Поэтому, вообще говоря, базисный план не является допустимым. В этом случае вводится так называемый искусственный базис. К левым частям ограниче­ний-равенств, не имеющих предпочтительного вида, добав­ляют искусственные переменные *.* В целевую функцию переменные , вводят с коэффициентом М в случае реше­ния задачи на минимум и с коэффициентом -М для за­дачи на максимум, где М - большое положительное число. Полученная задача называется М-задачей, соот­ветствующей исходной. Она всегда имеет предпочти­тельный вид.



Пусть исходная ЗЛП имеет вид

(1)



(2)



(3)



причём ни одно из ограничений не имеет предпочтительной переменной. М-задача запишется так:

(4)



(5)



, , (6)



Задача (4)-(6) имеет предпочтительный план. Её начальный опорный план имеет вид



Если некоторые из уравнений (2) имеют предпочтительный вид, то в них не следует вводить искусственные переменные.

**Теорема.** Если в оптимальном плане

(7)



М-задачи (4)-(6) все искусственные переменные , то план является оптимальным планом исходной задачи (1)-(3).



Для того чтобы решить задачу с ограничениями, не имеющими предпочтительного вида, вводят искусственный базис и решают расширенную М-задачу, которая имеет начальный опорный план



Решение исходной задачи симплексным методом путем введения искусственных переменных называется сим­плексным методом с искусственным базисом*.*



Если в результате применения симплексного метода к расширенной задаче получен оптимальный план, в кото­ром все искусственные переменные , то его первые n компоненты дают оптимальный план исходной задачи.



**Теорема.** Если в оптимальном плане М-задачи хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, т. е. ее условия несовместны.

**3.1 Признаки оптимальности.**

**Теорема.** Пусть исходная задача решается на мак­симум. Если для некоторого опорного плана все оценки неотрицательны, то такой план оптимален.



**Теорема.** Если исходная задача решается на мини­мум и для некоторого опорного плана все оценки неположительны, то такой план оптимален.



**§4. Понятие двойственности.**

Понятие двойственности рассмотрим на примере зада­чи оптимального использования сырья. Пусть на предпри­ятии решили рационально использовать отходы основного производства. В плановом периоде появились отходы сырья m видов в объемахединиц . Из этих отходов, учитывая специализацию предприятия, можно наладить выпуск n видов неосновной продукции. Обозна­чим через норму расхода сырья i-го вида на единицу j-й продукции, - цена реализации единицы j-й продукции (реализация обеспечена). Неизвестные величи­ны задачи:  *—* объемы выпуска j-й продукции, обеспечи­вающие предприятию максимум выручки.



Математическая модель задачи:

(1)



(2)



(3)



Предположим далее, что с самого начала при изучении вопроса об использовании отходов основного производст­ва на предприятии появилась возможность реализации их некоторой организации. Необходимо установить прикидочные оценки (цены) на эти отходы. Обозначим их .



Оценки должны быть установлены исходя из следующих требований, отражающих несовпадающие интересы предприятия и организации:

1. общую стоимость отходов сырья покупающая организация стремится мини­мизировать;
2. предприятие согласно уступить отходы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньшую той, что могло бы получить, органи­зовав собственное производство.

Эти требования форма­лизуются в виде следующей ЗЛП.

Требование 1 покупающей организации – минимизация покупки: (4)



Требование 2 предприятия, реализующего отходы сырья, можно сформулировать в виде системы ограничений. Предприятие откажется от выпуска каждой единицы продукции первого вида, если , где левая часть означает выручку за сырьё идущее на единицу продукции первого вида; правая – её цену.



Аналогичные рассуждения логично провести в отношении выпуска продукции каждого вида. Поэтому требование предприятия, реализующего отходы сырья, можно формализовать в виде сл. системы ограничений:

(5)



По смыслу задачи оценки не должны быть отрицательными:

(6)



Переменные называют двойственными оценками или объективно обусловленными оценками.



Задачи (1)-(3) и (4)-(6) называют парой взаимно двойственных ЗПЛ.

Между прямой и двойственной задачами можно установить следующую взаимосвязь:

1. Если прямая задача на максимум, то двойственная к ней — на минимум, и наоборот.
2. Коэффициенты целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной задачи.



1. Свободные члены ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойст­венной.



1. Матрицы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.
2. Если прямая задача на максимум, то ее система ограничений представляется в виде неравенств типа . Двойственная задача решается на минимум, и ее система ограничений имеет вид неравенств типа .



1. Число ограничений прямой задачи равно числу пере­менных двойственной, а число ограничений двойствен­ной — числу переменных прямой.
2. Все переменные в обеих задачах неотрицательны.

**Теорема.** Для любых допустимых планов и прямой и двойственной ЗЛП справедливо неравенство , т.е.



(7) – основное неравенство теории двойственности.



**Теорема. (критерий оптимальности Канторовича)**

Если для некоторых допустимых планов и пары двойственных задач выполняется неравенство , то и являются оптимальными планами соответствующих задач.



**Теорема. (малая теорема двойственности)**

Для су­ществования оптимального плана любой из пары двойст­венных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.

§5. Основные теоремы двойственности

**и их экономическое содержание**

**Теорема.**

Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функ­ций равны: . Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.



Экономическое содержание первой теоремы двойствен­ности состоит в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продук­ции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукции, полученной при реализации оптимального плана, совпадает с суммар­ной оценкой ресурсов. Совпадение значений целевых функций для соответствующих планов пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти планы были опти­мальными. Это значит, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов*.* Двойст­венные оценки, обладают тем свойством, что они гаранти­руют рентабельность оптимального плана, т. е. равенство общей оценки продукции и ресурсов, и обусловливают убыточность всякого другого плана, отличного от опти­мального. Двойственные оценки позволяют сопоставить и сбалансировать затраты и результаты системы.

**Теорема. (о дополняющей нежесткости )**

Для того, чтобы планы и пары двойственных задач были оптимальны, необходимо и достаточно выполнение условий:



(1)



(2)



Условия (1), (2) называются условиями допол­няющей нежесткости. Из них следует: если какое-либо ограничение одной из задач ее оптимальным планом обра­щается в строгое неравенство, то соответствующая компо­нента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента опти­мального плана одной из задач положительна, то соответ­ствующее ограничение в двойственной задаче ее опти­мальным планом должно обращаться в строгое равенство.

Экономически это означает, что если по некоторому оптимальному плану производства расход i -го ресурса строго меньше его запаса , то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы это­го ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i -я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствую­щего ресурса равен его запасу. Отсюда следует вывод: двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положитель­ную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полно­стью) имеет нулевую оценку.



**Теорема .(об оценках).** Двойственные оценки пока­зывают приращение функции цели, вызванное малым из­менением свободного члена соответствующего ограниче­ния задачи математического программирования, точнее

(3)



§6. Примеры экономических задач

**5.1 Задача о наилучшем использовании ресурсов.** Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объеди­нение и т. д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресур­сов, может выпускать n различных видов продукции (то­варов), известных под номерами, обозначаемыми индек­сом j . Ее будем обозначать *.* Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограни­чиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, дру­гих производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т. д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют ингре­диентами . Пусть их число равно m; припишем им индекс i . Они ограничены, и их количества равны соответственно условных единиц. Таким обра­зом, - вектор ресурсов. Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпуск­ной цене товара, его прибыльности, издержкам произ­водства, степени удовлетворения потребностей и т. д. При­мем в качестве такой меры, например, цену реализации



, т. е. *—*вектор цен. Известны также технологические коэффициенты , кото­рые указывают, сколько единиц i–го ресурса требуется для производства единицы продукции j-го вида. Матрицу коэффициентов называют технологической и обо­значают буквой А*.* Имеем . Обозначим через план производства, показывающий, какие виды товаров нужно произво­дить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприя­тию максимум объема реализации при имеющихся ре­сурсах.



Так как - цена реализации единицы j'-й продукции, цена реализованных единиц будет равна , а общий объем реализации



Это выражение — целевая функция, которую нужно мак­симизировать.

Так как - расход i-го ресурса на производство единиц j-й продукции, то, просуммировав расход i-горесурса на выпуск всех n видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосхо­дить единиц:



Чтобы искомый план был реализован, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объёмы выпуска продукции:



.



Таким образом, модель задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид:

(1)



при ограничениях:

(2)



(3)



Так как переменные входят в функцию и систему ограничений только в первой степени, а показатели являются постоянными в планируемый период, то (1)-(3) – задача линейного программирования.



**5.2 Задача о смесях.**

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспе­чивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и сма­зочных смесей в нефтеперерабатывающей промышлен­ности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших за­тратах на исходные сырьевые материалы.

**5.3 Задача о раскрое материалов.**

Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких техно­логически допустимых планов раскроя, при которых полу­чается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму. Рассмотрим простейшую модель раскроя по одному измерению. Более сложные постановки ведут к задачам целочисленного программирования.

**5.4 Транспортная задача.**

Рассмотрим простейший ва­риант модели транспортной задачи, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям; при этом имеется ба­ланс между суммарным спросом потребителей и возмож­ностями поставщиков по их удовлетворению. Причем по­требителям безразлично, из каких пунктов производства будет поступать продукция, лишь бы их заявки были пол­ностью удовлетворены. Так как от схемы прикрепления потребителей к поставщикам существенно зависит объем транспортной работы, возникает задача о наиболее рацио­нальном прикреплении, правильном направлении перево­зок грузов, при котором потребности полностью удовлетворяются, вся продукция от поставщиков вывозится, а затраты на транспортировку минимальны.

**5.5 Задача о размещении заказа.**

Речь идет о задаче рас­пределения заказа (загрузки взаимозаменяемых групп оборудования) между предприятиями (цехами, станками, исполнителями) с различными производственными и тех­нологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказа. Требуется составить план размещения заказа (загрузки оборудования), при кото­ром с имеющимися производственными возможностями заказ был бы выполнен, а показатель эффективности до­стигал экстремального значения.

**§7. Анализ задачи об оптимальном использовании сырья.**

Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выступать четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объём ресурсов, расход каждого ресурса за единицу продукции, приведены в таблице 1. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли. Выполнить после оптимизационный анализ решения и параметров модели.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | | Выпускаемая продукция | | | | | | | Объём  Ресурсов |
|  |  | |  | |  | |
|  | Трудовые ресурсы, чел-ч | 4 | | 2 | | 2 | | 8 | 4800 |
|  | Полуфабрикаты, кг | 2 | | 10 | | 6 | | 0 | 2400 |
|  | Станочное оборудование, станко-ч | 1 | | 0 | | 2 | | 1 | 1500 |
| Цена единицы продукции, р. | | 65 | | 70 | | 60 | | 120 |

Решение.

Пусть - объёмы продукции планируемый к выпуску; - сумма ожидаемой выручки.



Математическая модель пря мой задачи:



Математическая модель двойственной задачи:



По условиям примера найти:

1. Ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий предприятию максимум реализации (максимум выручки)
2. Оценки ресурсов, используемых при производстве продукции.

Симплексным методом решаем прямую задачу, модель которой составлена выше в таблице1.

После второй итерации все оценки оказались отрицательными, значит, найденный опорный план является оптимальным: ,



Основные переменные показывают, что продукциюи выпускать нецелесообразно, а продукции следует произвести 400 ед., - 500 ед.



Дополнительные переменные и показывают, что ресурсы используются полностью , а вот равенство свидетельствует о том, что 200 единиц продукции осталось неиспользованным.



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номера ит. | БП | Сб |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 65 | 70 | 60 | 120 | 0 | 0 | 0 |
| 0 |  | 0 | 4800 | 4 | 2 | 2 | 8 | 1 | 0 | 0 |
|  | 0 | 2400 | 2 | 10 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | 0 | 1500 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
|  | | 0 | -65 | -70 | -60 | -120 | 0 | 0 | 0 |
| 1 |  | 120 | 600 | 1/2 | 1/4 | 1/4 | 1 | 1/8 | 0 | 0 |
|  | 0 | 2400 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  | 0 | 900 | 1/2 | -1/4 | 7/4 | 0 | -1/8 | 0 | 1 |
|  | | 72000 | -5 | -40 | -30 | 0 | 15 | 0 | 0 |
| 2 |  | 120 | 500 | 5/12 | -1/6 | 0 | 1 | 1/8 | -1/24 | 0 |
|  | 60 | 400 | 1/3 | 5/3 | 1 | 0 | 0 | 1/6 | 0 |
|  | 0 | 200 | -1/12 | -19,6 | 0 | 0 | -1/8 | -7/24 | 1 |
|  | | 84000 | 5 | 10 | 0 | 0 | 15 | 5 | 0 |

Выпишем из таблицы2. Компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки. В канонической форме прямой задачи переменные - являются свободными, а дополнительные переменные - базисными. В канонической форме двойственной задачи свободными будут переменные - а базисными



Соответствие между переменными примет вид



Учитывая это соответствие, выпишем из индексной строки последней итерации компоненты искомого плана - двойственные оценки.



min f = max Z =84000.

Запишем это неравенство в развернутой форме:

48000\*15 + 2400\*5 + 1500\*0 = 65\*0 + 70\*0 + 60\*400 + 120\*500

Учитывая, что компонеты представляют собой оценки ресурсов заключаем:

При оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции.

Теперь установим степень дефицитно­сти используемых ресурсов и обоснуем рентабельность оптимального плана.

Мы нашли оптимальный план выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство:



0+2-400+500= 1300< 1500. Это означает, что расход ресурса мень­ше его запаса, т. е. ресурс избыточный. Именно поэтому в оптималь­ном плане двойственной задачи оценка этого ресурса равна нулю.



А вот оценки и ресурсов и выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: они при оптимальном плане используются полностью. В самом деле, ограни­чения по этим ресурсам выполняются как строгие равен­ства: 4.0+2.0+2.400+8.500=4800, 2-0+10.0+6.400=2400.



Поскольку 15>5, ресурс считается более дефицитным, чем ресурс .



На основе теоремы (о дополняющей нежесткости) нетрудно объяснить, почему не вошла в опти­мальный план продукция и : первое и второе ограничения двой­ственной задачи выполняются как строгие неравенства: 4-15+2-5+0>65, 2-15+10\*5>70.



Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции и , превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпу­скать предприятию невыгодно. Что же касается продукции и *,* то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходо­ванных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: 2\*15+ +6\*5+2\*0=60, 8\*15+0=120.



Таким образом, в оптимальный план войдет только та продукция, которая выгодна предприятию, и не войдет убыточная продукция. В этом проявляется рентабельность оптимального плана.

Рассмотрим возможность дальней­шего совершенствования оптимального ассортимента выпускаемой про­дукции.

Выше установлено, что ресурсы и являются дефицитными. В связи с этим на основе теоремы (об оценках) можно утверждать, что на каждую единицу ресурса , введенную дополнительно в производ­ство, будет получена дополнительная выручка , численно равная .В самом деле, при получаем . По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурсаобеспечит прирост выручки, равный 5 р. Теперь становится понятно, почему ресурс считается более дефицитным по сравнению с ресурсом : он может содействовать получению большей выручки.



Что же касается избыточного ресурса *,* то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку . Из приве­денных рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершен­ствовать план выпуска продукции.



Выясним экономический смысл оценок продукции ,,,.



По оптимальному плану выпускать следует продукцию и . Оценки и этих видов продукции равны нулю. Что это означает, практически станет ясно, если представить оцен­ки в развернутой записи:



Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на вы­пуск единицы такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовлен­ной продукции.

Что же касается продукции и являющейся, как установлено выше, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок и получаем:



Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень.

§8. Программа и расчеты.

{Программа составлена для решения задачи линейного программирования

симплексным методом}

uses crt;

const n=2;{число неизвестных исходной задачи}

m=3;{число ограничений}

m1=0;{последняя строка равенств}

m2=1;{последняя строка неравенств вида >=}

label 5,15,20,10;

var b,cb:array[1..m] of real;c,x,e:array[1..50] of real;a:array[1..m,1..50] of real;

s0,max,mb,s1:real;i,j,k,i0,j0,m21,nm1,n1:integer; Bi:array[1..m] of integer;

begin

clrscr;

writeln;

writeln (' Симплексный метод решения задачи линейного программирования:');

writeln;

writeln (' Проведем некоторые преобразования с данной задачей:');

writeln;

writeln (' Подготовьте матрицу: сначала равенства, потом неравенства вида >= и неравенства вида <=;');

writeln (' Целевая функция должна быть на минимум (привести ее к такому виду); ');

writeln (' Вектор b должен состоять только из положительных элементов (привести его к та- кому виду);');

writeln(' Введите матрицу А ',m,'\*',n,' построчно:');

for i:=1 to m

do begin for j:=1 to n

do read (a[i,j]);

readln

end;

writeln (' Введите в виде строки вектор b, состоящий из ',m,' компонент:');

for i:=1 to m

do read (b[i]);

writeln(' Введите теперь вектор с, состоящий из ',n,' компонент:');

for i:=1 to n

do read (c[i]);

m21:=m2-m1+n;nm1:=n+m-m1;n1:=n+m-m1+m2;

for i:=1 to m

do for j:=n+1 to n1

do a[i,j]:=0;

{переход к равенствам в неравенствах >=}

for i:=m1+1 to m2

do a[i,n+i-m1]:=-1;

{переход к равенствам в неравенствах <=}

for i:=m2+1 to m

do a[i,m21+i-m2]:=1;

{создание искуственного базиса}

for i:=1 to m2

do a[i,nm1+i]:=1;

{ввод mb в вектор с}

mb:=12345;

for i:=n+1 to nm1

do c[i]:=0;

for i:=nm1+1 to n1

do c[i]:=mb;

{выписать cb}

for i:=1 to m2

do begin cb[i]:=mb; Bi[i]:=nm1+i end;

for i:=m2+1 to m

do begin Bi[i]:=m21+i-m2;

cb[i]:=0;

end;

for i:=1 to n1

do x[i]:=0;

writeln(' Решение задачи:');

{применяем симплексный метод, вычисляем оценки}

5: for j:=1 to n1

do begin s0:=0;

for i:=1 to m

do s0:=s0+cb[i]\*a[i,j];

e[j]:=s0-c[j]

end;

max:=e[1];j0:=1;

for i:=2 to n1

do if e[i]>max

then begin max:=e[i];

j0:=i

end;

{получили столбец с максимальной оценкой}

if max<=0

then begin for i:=1 to m

do x[Bi[i]]:=b[i];

goto 15

end;

s1:=a[1,j0];

for i:=2 to m

do if s1<a[i,j0]

then s1:=a[i,j0];

if s1<=0

then goto 10;

s1:=mb;

for i:=1 to m

do if a[i,j0]>0

then if s1>b[i]/a[i,j0]

then begin

s1:=b[i]/a[i,j0];

i0:=i

end;

{главный элемент a[i0,j0]}

s0:=a[i0,j0]; Bi[i0]:=j0;

for j:=1 to n1

do a[i0,j]:=a[i0,j]/s0;

b[i0]:=b[i0]/s0;

for i:=1 to m

do if i<>i0

then begin s1:=-a[i,j0];

b[i]:=b[i]+b[i0]\*s1;

for j:=1 to n1

do a[i,j]:=a[i,j]+a[i0,j]\*s1

end;

cb[i0]:=c[j0];

goto 5;

10: writeln(' Нет оптимального плана, функция неограничена');

goto 20;

{просмотр иск. переменных}

15: for i:=nm1+1 to n1

do if x[i]>0

then begin writeln(' Пустое множество планов');

goto 20

end;

for i:=1 to n

do writeln(' x[',i,']=',x[i]:7:4);

20:readkey

end.

Содержание

Введение………………………………………………………………………………1

§1. Задача линейного программирования и свойства её решений…………….…4

§2. Графический способ решения

задачи линейного программирования……………………………………….…6

§3. Симплексный метод……………………………………………………………..8

§4. Понятие двойственности……………………………………………………….11

§5. Основные теоремы двойственности

и их экономическое содержание………………………………………….……14

§6. Примеры экономических задач………………………………………………..16

§7. Анализ задачи об оптимальном использовании сырья………………………19

§8. Программа и расчеты…………………………………………………………..25