Академия России

Кафедра Физики

Реферат на тему:

«АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ»

Орел 2006

**Учебные вопросы**

1. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

2. Графо-аналитический и аналитический методы анализа

3. Анализ цепей методом угла отсечки

4. Воздействие двух гармонических колебаний на безынерционный

нелинейный элемент

Литература

**Вступление**

Для всех рассмотренных ранее линейных цепей справедлив принцип суперпозиции, из которого вытекает простое и важное следствие: гармонический сигнал, проходя через линейную стационарную систему, остается неизменным по форме, приобретая лишь другие амплитуду и начальную фазу. Именно поэтому линейная стационарная цепь не способна обогатить спектральный состав входного колебания.

Особенностью НЭ, по сравнению с линейными, является зависимость параметров НЭ от величины приложенного напряжения или силы протекающего тока. Поэтому на практике при анализе сложных нелинейных цепей пользуются различными приближенными методами (например, заменяют нелинейную цепь линейной в области малых изменений входного сигнала и используют линейные методы анализа) или ограничиваются качественными выводами.

Важным свойством нелинейных электрических цепей является возможность обогащения спектра выходного сигнала. Эта важная особенность используется при построении модуляторов, преобразователей частоты, детекторов и т. д.

Решение многих задач, связанных с анализом и синтезом радиотехнических устройств и цепей, требует знания процессов, происходящих при одновременном воздействии на нелинейный элемент двух гармонических сигналов. Это связано с необходимостью перемножения двух сигналов при реализации таких устройств, как преобразователи частоты, модуляторы, демодуляторы и т. д. Естественно, что спектральный состав выходного тока НЭ при бигармоническом воздействии будет гораздо богаче, чем при моногармоническом.

Нередко возникает ситуация, когда один из двух воздействующих на НЭ сигналов мал по амплитуде. Анализ в этом случае значительно упрощается. Можно считать, что по отношению к малому сигналу НЭ является линейным, но с переменным параметром (в данном случае крутизной ВАХ). Такой режим работы НЭ называется параметрическим.

**1. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов**

При анализе нелинейных цепей (НЦ) обычно не рассматривают процессы, происходящие внутри элементов, составляющих эту цепь, а ограничиваются лишь внешними их характеристиками. Обычно это зависимость выходного тока от приложенного входного напряжения

, (1)



которую принято называть вольт-амперной характеристикой (ВАХ).

Самое простое – использовать имеющуюся табличную форму ВАХ для численных расчетов. Если же анализ цепи должен проводиться аналитическими методами, то возникает задача подбора такого математического выражения, которое отражало бы все важнейшие особенности экспериментально снятой характеристики.

Это не что иное, как задача аппроксимации. При этом выбор аппроксимирующего выражения определяется как характером нелинейности, так и используемыми расчетными методами.

Реальные характеристики имеют достаточно сложный вид. Это затрудняет их точное математическое описание. Кроме того, табличная форма представления ВАХ делает характеристики дискретными. В промежутках между этими точками значения ВАХ неизвестны. Прежде чем переходить к аппроксимации, необходимо как-то определиться с неизвестными значениями ВАХ, сделать ее непрерывной. Тут возникает задача интерполяции (от лат. *inter* – между, *polio* – приглаживаю) – это отыскание промежуточных значений функции по некоторым известным ее значениям. Например, отыскание значений в точках лежащих между точками по известным значениям . Если , то аналогичная процедура носит задачи экстраполяции.



Обычно аппроксимируют лишь ту часть характеристики, которая является рабочей областью, т. е. в пределах изменения амплитуды входного сигнала.

При аппроксимации вольт-амперных характеристик необходимо решить две задачи: выбрать определенную аппроксимирующую функцию и определить соответствующие коэффициенты. Функция должна быть простой и в то же время достаточно точно передавать аппроксимируемую характеристику. Определение коэффициентов аппроксимирующих функций осуществляется методами интерполяции, среднеквадратичного или равномерного приближения, которые рассматриваются в математике.

Математически постановка задачи интерполяции может быть сформулирована следующим образом.

Найти многочлен степени не больше *n* такой, что *i* = 0, 1, …, *n*, если известны значения исходной функции в фиксированных точках , *i* = 0, 1, …, *n*. Доказывается, что всегда существует только один интерполяционный многочлен, который может быть представлен в различных формах, например в форме Лагранжа или Ньютона. (Рассмотреть самостоятельно на самоподготовке по рекомендованной литературе).



Аппроксимация степенными полиномами и кусочно-линейная

Она основана на использовании хорошо известных из курса высшей математики рядов Тейлора и Маклорена и заключается в разложении нелинейной ВАХ в бесконечномерный ряд, сходящийся в некоторой окрестности рабочей точки . Поскольку такой ряд физически не реализуем, приходится ограничивать число членов ряда, исходя из требуемой точности. Степенная аппроксимация применяется при относительно малом изменении амплитуды воздействия относительно .



Рассмотрим типичную форму ВАХ любого НЭ (рис. 1).

Напряжение определяет положение рабочей точки и, следовательно, статический режим работы НЭ.



Рис. 1. Пример типичной ВАХ НЭ

Обычно аппроксимируется не вся характеристика НЭ, а лишь рабочая область, размер которой определяется амплитудой входного сигнала, а положение на характеристике – величиной постоянного смещения . Аппроксимирующий полином записывается в виде



, (2)



где коэффициенты определяются выражениями



.



Аппроксимация степенным полиномом заключается в нахождении коэффициентов ряда . При заданной форме ВАХ эти коэффициенты существенно зависят от выбора рабочей точки , а также от ширины используемого участка характеристики. В этой связи целесообразно рассмотреть некоторые наиболее типичные и важные для практики случаи.



1. Рабочая точка расположена на середине линейного участка (рис. 2).



Рис. 2. Рабочая точка ВАХ – на середине линейного участка

Участок на характеристике, где закон изменения тока близок к линейному, относительно неширок, поэтому амплитуда входного напряжения не должна выходить за пределы этого участка. В этом случае можно записать:



, (3)



где – ток покоя;



;



– дифференциальная крутизна характеристики.



Этот случай применим только при слабом сигнале , поскольку в этом случае можно без большой погрешности пренебречь нелинейностью ВАХ.



2. Рабочая точка расположена на начальном участке характеристики.



## Рис. 3. Рабочая точка ВАХ – на начальном участке характеристики

При небольшом изменении амплитуды входного сигнала относительно можно с малой погрешностью аппроксимировать ВАХ квадратичной параболой (степенным полиномом второго порядка). Аппроксимирующее выражение будет иметь вид



(4)



Как и в выражении (6.6), – ток покоя (постоянная составляющая выходного тока); – крутизна характеристики в точке . Для определения значений и необходимо составить систему уравнений:



(5)



Отсюда можно записать:



3. Рабочая точка является точкой перегиба характеристики (рис. 4).



## Рис. 4. Рабочая точка ВАХ – точка перегиба

В точке перегиба все четные производные функции обращаются в нуль, поэтому в выражении (3) будут присутствовать только слагаемые с нечетными степенями , *k* = 1, 2, 3, … .



Напомним, что точка перегиба – точка кривой, в которой:

1. вогнутость (выпуклость) кривой меняется на выпуклость (вогнутость);
2. кривая "лежит" по разные стороны от касательной в этой точке.

В общем случае аппроксимирующий полином может быть любого, сколь угодно высокого порядка. Однако в большинстве практических случаев достаточную для инженерной практики точность дает полином третьей степени:

(6)



На рисунке 4 график, соответствующий (6), показан пунктирной линией. Рабочий участок ВАХ (динамический диапазон) определяется интервалом . На границах этого интервала производные аппроксимирующей функции обращаются в нуль. Для нахождения коэффициентов и необходимо, как и в предыдущем случае, составить систему уравнений и решить ее относительно и :



(7)



Откуда



При очень больших амплитудах входного сигнала часто бывает удобнее заменять реальную характеристику идеализированной, составленной из отрезков прямых линий. Такое представление ВАХ называется кусочно-линейной аппроксимацией. На рисунке 5 показаны некоторые характерные примеры.



а б в

## Рис. 5. Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ

## 2. Графоаналитический и аналитический методы анализа

##### Графоаналитический метод анализа

Этот метод используется в тех случаях, когда отсутствует отсечка тока. Этот метод известен под названием трех (пяти, семи) ординат. Суть его заключается в следующем (рис. 6): пусть на НЭ воздействует напряжение

. (8)



Рис. 6. Иллюстрация графоаналитического метода анализа

Ток через НЭ будет представлять собой периодическое колебание сложной формы. Аналитически его можно записать в виде ряда Фурье

(9)



В реальных исследованиях приходится ограничивать число членов ряда, а для определения амплитуд используются вышеназванные методы. Практически наиболее часто применяются методы трех и пяти ординат.



Суть метода заключается в следующем: ВАХ нелинейного элемента делится на три (пять) участка, точки 1, 3, 5 или 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 6.6), при этом фиксируются значения входного и выходного сигналов ( и ). Затем составляется система из трех (пяти) уравнений для токов и решается относительно неизвестных и т. д. Из графика на рисунке 6 видно, что в точках 1–5 будут следующие значения амплитуд и фаз входного и выходного сигналов (табл. 1).



Таблица 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №  точек | Мгновенная фаза входного сигнала, | Амплитуда входного сигнала, *u*(*t*) | Амплитуда  выходного тока |
| 1 | 0 |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |

Для метода трех ординат ряд (9) сокращается до трех слагаемых:

, (10)



Составляется система из трех уравнений и решается относительно :



(11)



Откуда

(12)



Если требуется определить большее число спектральных составляющих, аналогичным методом составляется и решается система из требуемого числа уравнений. Данный метод применим при слабо выраженной нелинейности ВАХ и отсутствии отсечки тока.

##### Аналитический метод анализа

Если работа НЭ (нелинейной цепи) происходит в режиме малого сигнала и, как правило, без отсечки выходного тока, для аппроксимации используется степенной полином вида:

. (13)



Пусть на входе действует напряжение При подстановке его в (13) получим:



(14)



Воспользовавшись известными формулами

(15)



представим равенство (14) так:

(16)



Отсюда вытекают следующие соотношения для расчета постоянной составляющей тока и амплитуд гармоник:

(17)



**3. Анализ цепей методом угла отсечки**

При работе нелинейной цепи с большими амплитудами входного сигнала, когда степенная аппроксимация не дает хороших результатов применяется кусочно-линейная аппроксимация. Работа НЭ происходит при этом с отсечкой выходного тока, и большое применение находит аналитический метод анализа, получивший название метода угла отсечки.

Форма тока в цепи, содержащей НЭ с характеристикой

(18)



видна из графика, представленного на рисунке 7 (при условии, что на вход подано напряжение ).



Рис. 7. График тока через НЭ при работе с отсечкой тока

График тока имеет характерный вид периодической последовательности косинусоидальных импульсов, которые характеризуются амплитудой и длительностью 2, где – угол отсечки, числено равный половине той части периода, в течение которого через НЭ протекает ток. Период повторения импульсов равен . Спектральный состав такого периодического колебания легко определить, разложив функцию тока в ряд Фурье:



(19)



Угол отсечки легко найти из равенства :



(20)



Функция тока определяется следующим выражением:

. (21)



При :



. (22)



Амплитуды спектральных составляющих тока через НЭ определяются через коэффициенты Берга:

(23)



где коэффициенты являются функциями одного аргумента – угла отсечки , получили название коэффициентов (функций) Берга.



Рис. 8. Графики функций Берга

Анализ графиков функций позволяет сделать вывод о том, при каких углах отсечки амплитуды (*n* = 0, 1, 2, ...) имеют максимальные или минимальные (нулевые) значения. Это дает возможность с помощью выбора режима работы НЭ (изменяя напряжение смещения ,можно менять ) управлять соотношением амплитуд гармоник в спектре тока через НЭ.



*Таким образом, алгоритм вычисления амплитуд гармоник тока через НЭ может быть следующим:*

1. По известным значениям , , определяется угол отсечки с помощью формулы (18).



1. По формуле (20) или графически определяется величина .



1. С помощью таблицы или по графикам (рис. 8) находят .



1. Вычисляются амплитуды гармоник: *k* = 1, 2, ….



**4. Воздействие двух гармонических сигналов на безынерционный НЭ**

Для выявления основных закономерностей рассмотрим реакцию НЭ на воздействие двух гармонических сигналов. Такое воздействие принято называть бигармоническим:

(24)



Для упрощения анализа на первом этапе воспользуемся аппроксимацией ВАХ нелинейного элемента полиномом второй степени:

(25)



#### После подстановки (22) в (23) получим



Выполнив тригонометрические преобразования по формулам



и сгруппировав члены, получим следующее спектральное представление тока

(26)



Анализ выражения (24) позволяет сделать вывод о значительном обогащении спектра тока по сравнению со спектром входного сигнала. В спектре выходного колебания, кроме слагаемых, имевшихся во входном сигнале – постоянной составляющей и гармоник на частотах *ω*1 и *ω*2, возникли гармонические составляющие суммарной и разностной частоты (*ω*1 + *ω*2) и (*ω*1 – *ω*2), а также компоненты с удвоенными частотами 2*ω*1, 2*ω*2.

При увеличении порядка аппроксимирующего полинома проблема вычисления амплитуд спектральных составляющих сводится к громоздким выкладкам, приводить которые в данной лекции нецелесообразно. В самом общем случае, когда ВАХ представлена полиномом *n*-й степени, спектр тока через НЭ (в случае бигармонического воздействия) будет включать составляющие с частотами

(27)



где *p* и *q* – целые числа, причем (*p* + *q*) ≤ *n*.

Сумма (*p* + *q*) называется порядком комбинационного колебания. Комбинационное колебание в общем случае можно записать

(28)



где *k* – коэффициент пропорциональности.

При построении различных радиотехнических устройств, являющихся элементами приемных и передающих трактов (модуляторы, детекторы, преобразователи частоты, дифференциальные усилители), приходится использовать нелинейные цепи с бигармоническим воздействием. При этом с помощью фильтрации выделяются нужные комбинационные составляющие (т. е. создающие полезный эффект в нагрузке в зависимости от реализуемой операции) и соответственно подавляются побочные продукты взаимодействия двух сигналов и . Теперь рассмотрим, как влияют амплитуды воздействующих сигналов и на соотношение амплитуд гармоник в спектре выходного тока.



*Параметрический режим работы нелинейного элемента*

При реализации некоторых устройств аппаратуры связи, работа которых основана на использовании нелинейных электрических цепей (элементов) и бигармоническом воздействии, часто возникает практическая ситуация, когда амплитуда одного из напряжений значительно больше другого. Например, в преобразователе частоты супергетеродинного радиоприемного устройства амплитуда преобразуемого сигнала значительно меньше амплитуды напряжения местного источника гармонического напряжения (гетеродином). В этих условиях НЭ для сигнала с малой амплитудой выступает в качестве параметрического элемента. Графическая иллюстрация такого режима представлена на рисунке 9.



Рис. 9. Графическая иллюстрация параметрического режима работы

К нелинейному элементу с вольт-амперной характеристикой приложены два напряжения: гармонический сигнал с большой амплитудой и малое напряжение , в общем случае не обязательно гармоническое.



Учитывая малую величину напряжения по сравнению c , можно считать участок характеристики, на которой в данный момент времени действует напряжение , практически линейным (фрагмент ВАХ на рисунке 9). При этом напряжение действует как изменяющееся во времени напряжение смещения, т. е. источник перемещает рабочую точку на характеристике по закону . Таким образом, можно считать, что для малого колебания нелинейный элемент является линейным, но с изменяющейся по закону крутизной . Такой элемент и называется параметрическим, причем в роли переменного параметра выступает крутизна вольт-амперной характеристики.



Выше уже говорилось о том, что очень важно обеспечить минимизацию побочных продуктов взаимодействия напряжений и , а также подчеркнуть, по возможности, полезную комбинационную составляющую. Рассмотрим условия, при которых может быть решена эта задача, для чего получим аналитическое выражение для тока через НЭ в общем виде.



Если на вход НЭ с характеристикой воздействуют два колебания: , причем выполняется неравенство



(29)



а амплитуда напряжения такова, что оно не выходит за пределы рабочей области ВАХ – < 1 В, то выражение для тока через НЭ можно представить в виде ряда Тейлора по степеням малого напряжения вблизи изменяющейся во времени (по закону ) рабочей точки.



. (30)



В этом выражении первое слагаемое – ток, величина которого определяется только источником , а все остальные слагаемые – добавка к току зa счет действия источника малого сигнала . Очевидно, что первая производная тока – крутизна характеристики – функция напряжения (закон ее изменения во времени показан на правой части графика на рисунке 9). С учетом введения выражение (28) можно переписать в виде



. (31)



В общем случае, когда – чётная периодическая функция, ток и все коэффициенты ряда (29) , , , ... будут четными периодическими функциями, следовательно, их можно представить рядами Фурье, содержащими только косинусные слагаемые:



(32)



Если подставить все выражения (30) в (29) и выполнять элементарные (но очень громоздкие) преобразования, можно убедиться, что в спектре тока через НЭ будет присутствовать множество комбинационных составляющих, число которых не меньше, чем в (25). При этом амплитуды тока нелинейно будут зависеть от и . Таким образом, неизбежно возникают нелинейные искажения в выходном сигнале. В то же время эти искажения существенно меньше, чем при соизмеримых амплитудах воздействующих сигналов. Чтобы в этом убедиться, достаточно принять во внимание, что << l B, следовательно, все слагаемые в (29), начиная с третьего, являются малостями более высоких порядков и ими можно пренебречь без большой (с точки зрения инженерной практики) погрешности. Таким образом, учитывая справедливость неравенства



(33)



можно записать:

(34)



Из последнего выражения видно, что для колебания с малой амплитудой нелинейный элемент является линейным (т. к. выражение (32) – линейная функция ), но с переменным параметром – крутизной, которая изменяется во времени под воздействием большого напряжения :



Очевидно, что чем меньше амплитуда напряжения , тем меньше погрешность от замены (29) на (32), меньше количество и ниже уровень побочных (нежелательных) комбинационных составляющих в спектре выходного тока.



Если работа нелинейной цепи в этом случае происходит без отсечки тока НЭ, то ток через НЭ вообще не содержит комбинационных составляющих, приводящих к искажению выходного колебания (выходным колебанием считается ток на частоте *ω*1 + *ω*2 или |*ω*1 - *ω*2|). В этом случае устройство на основе данной нелинейной цепи будет линейной параметрической системой.

Таким образом, для получения линейной параметрической цепи на основе НЭ необходимо выполнить ряд условий:

1. Обеспечить работу с малым уровнем входного сигнала.

2. Использовать фильтр на выходе цепи, выделяющий полезное колебание и эффективно подавляющий нежелательные продукты взаимодействия *u*1 и *u*2.

3. Обеспечить соответствующий режим работы НЭ, при котором уменьшается уровень ненужных комбинационных составляющих.

4. Подбирать НЭ с ВАХ, наиболее близкой по форме к квадратичной параболе.

**Библиографический список**

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы.– М.: Высш. шк., 1986.– С. 222-229.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.– М.: Наука, 1986.– С. 502-504.