Билеты по геометрии

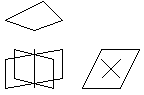
БИЛЕТ 1

А1 Какова бы ни была плоскость, существуют точки принадлежащие этой плоскости

и точки, не принадлежащие ей.

А2 Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

А3 Если две различные прямые имеют общую точку, то ч/з них можно провести плоскость, и притом только одну.



БИЛЕТ 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.*

ТЕОРЕМА. *Через точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.*



Док-во: проведем ч/з а и М плоскость α, а ч/з М в плоскости α прямую b| | a. Докажем, что b| | a единственна.

Допустим, что существует другая прямая b2| | a, и проходящая ч/з т.М. Через b2 и а можно провести плоскость α2, которая проходит ч/з М и а, след-но, по Т.14.1(ЧЕРЕЗ ПРЯМ. И ТОЧКУ НЕ ЛЕЖ. НА ЭТОЙ ПРЯМОЙ МОЖНО ПРОВЕСТИ ПЛОСКОСТЬ И ПРИТОМ ТОЛЬКО ОДНУ) она совпадает с α. По аксиоме о параллельных прямых b2 и а совпадают. Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.*

ТЕОРЕМА. *Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.*

Док-во: Пусть α-плоскость, а - не лежащая в ней прямая и а1 - прямая в плоскости α,параллельная прямой а.



Проведем плоскость α1 ч/з прямые а и а1.

Она отлична от α, т.к. прямая а не лежит в плоскости α. Плоскости α и α1 пересекаются по прямой а1. Если бы прямая а пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой а1. Но это невозможно, т.к. прямые а и а1 параллельны. Итак, прямая а не пересекает плоскость α, а значит, параллельна плоскости α. Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.*

ТЕОРЕМА. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*



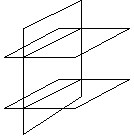
Док-во: Рассмотрим две плоскости α и β. В плоскости α лежат пересекающиеся в т.М прямые a и b, а в β - прямые а1 и b1, причем а| | а1 и b| | b1.

Докажем, что плоскоскоти α и β не параллельны. Тогда они перес. по прямой с. Мы получили, что плоскость α проходит ч/з прямую а, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой с. Отсюда следует, что а| | с.

Но плоскость α проходит также ч/з прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому b | | с. Таким обр. ч/з т.М проходят две прямые а и b, | | с. Но это невозможно, т.к. по теореме о параллельных прямых ч/з т. М проходит только

БИЛЕТ 5

*Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.*



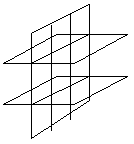
Для док-ва данного св-ва рассмотрим прямые а и b , по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью ϕ. Докажем, что а| | b.

Эти прямые лежат в одной плоскости (ϕ) и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые а и b пересекались, то пл. α и β имели бы общ. точку, что невозможно, т.к. α| | β. Итак, прямые а и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, а| | b.

2. Vпирамиды= 1/3\*Sосн.\*H

БИЛЕТ 6

*Отрезки параллельных прямых, заключенные м/у параллельными плоскостями, равны.*



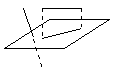
Для док-ва рассмотрим отрезки АВ и СD двух параллельных прямых, заключенные м/у параллельными плоскостями α и β. Докажем, АВ=СD. Плоскость ϕ, проходящая ч/з параллельные прямые АВ и СD, пересекается с плоскостями α и β по параллельным прямым АС и ВD. Таким образом, в четырехугольнике ABDC противолеж. стор. паралл., т.е. ABDC-параллел-м

Но в пар-ме прот. леж. стороны равны, значит AB=CD.

Sп.п.=2πR(H+R)

БИЛЕТ 7

Сформулируем основные св-ва параллельного проектирования при условии, что проектируемые отрезки и прямые не параллельны прямой L.



10 *Проекция прямой есть прямая.*

20 *Проекция отрезка есть отрезок.*

30  *Проекции параллельных отрезков - параллельные отрезки или отрезки, принадлеж.*

*одной прямой.*

40 *Проекции параллельных отрезков, а также проекцииотрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам.*

Из св-ва 40 следует, что *проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка.*

БИЛЕТ 8

Определение. *Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.*

ТЕОРЕМА: *Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

БИЛЕТ 9

ТЕОРЕМА: *Прямая, проведенная в плоскости ч/з основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной*

Док-во: AH - перпенд. к плоскости α, AM - наклонная, *а* – прямая проведенная в плоск. α ч/з точку M перпенд к проекцииHM наклонной.

Рассмотрим плоск. AMH. Прямая *а*⊥этой плоскости, т.к. она ⊥ к двум пересекающимся прямым AH и MH. Отсюда след. что прямая *а* перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности *а*⊥AM. Ч.Т.Д.



БИЛЕТ 10

ТЕОРЕМА: *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.*



Док-во: Рассмотрим две параллельные прямые а и а1 и плоскость α, такую, что а⊥α. Докажем, что и а1⊥α.

Проведем какую-нибудь прямую *х* в плоскости α.

Так как а⊥α, то а⊥*х*. Таким образом, прямая а1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т.е. а1⊥α. Ч.Т.Д.

Vпаралл-да=abc=Sосн.\*H

БИЛЕТ 12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол м/у ними равен 900.*

ТЕОРЕМА: *Если одна из двух плоскостей проходит ч/з прямую,перпендикулярную к др.*

*плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.*

Док-во: Рассмотрим плоскости α и β такие, что плоскость α проходит ч/з прямую АВ, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке А. Докажем, что α⊥β. Плоскости α и β пересекаются по прямой АС, причем АВ⊥АС, Т.к. по усл. АВ⊥β, и, значит, прямая АВ⊥ к любой прямой, лежащей в плоскости β.

Проведем в плоскости β прямую АD,⊥АС. Тогда ∠BAD - линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но ∠BAD=900 (т.к. AB⊥β). След-но, угол м/у плоскостями α и β равен 900, т.е. α⊥β. Ч.Т.Д.

Sбок=P\*a (а - бок. ребро, Р-периметр)

БИЛЕТ 11

ТЕОРЕМА: *Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.*

Док-во: Рассмотрим прямые *а* и *b*, перпендикулярные к плоскости α. Докажем, что *а*⏐⏐*b*.

Через какую-нибудь точку М прямой проведем прямую 1, параллельную прямой . Докажем, что прямая 1 совпадает с прямой . Тем самым будет доказано, что ⏐⏐ . Допустим, что прямые и 1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые и 1, ч/з точку М проходят две прямые, перпендикулярные к прямой , по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно, след-но, ⏐⏐ . Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:  *Расстояние м/у одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей ч/з другую прямую параллельно первой, называется расстоянием м/у скрещивающимися прямыми.*

Sполн=Sбок+2Sосн ; Sбок=P\*H(ребро)

БИЛЕТ 14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае наклонной.*

ТЕОРЕМА: *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.*

Док-во: Бок.грани прямой призмы - прямоугольники, основания которых - стороны основания призмы, а высоты равны высоте *h* призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т.е. равна сумме произведений сторон основания на высоту *h*. Вынося множитель *h* за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т.е. его периметр *Р.* Итак, Sбок=P\*h. Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 15

Рассмотрим два равных параллелограмма ABCD и A1B1C1D1, расположенных в плоскостях так, что отрезки AA1,BB1,CC1, и DD1 параллельны.

Поверхность составленная из двух равных параллелограммов ABCD и A1B1C1D1 и четырех параллелограммов называется *параллелепипедом* м обозначается ABCDA1..D1.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются *гранями*, их стороны - *ребрами*, а вершины параллелограммов - *вершинами параллелепипеда*.

ТЕОРЕМА: *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Док-во: Рассмотрим четырехугольник A1D1CB, диагонали которого являются диагоналями параллелепипеда ABCDA1..D1. Т.к. A1D1⏐⏐ BC и

A1D1=BC, то A1D1CB - параллелограмм. Поэтому диагонали A1C и D1B пересекаются в некоторой точке О и этой точкой делятся пополам.

БИЛЕТ 16

ТЕОРЕМА: *Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.*



Док-во: Докажем равенство граней ABB1A1 и DCC1D параллелепипеда ABCA1..D1. Т.к. ABCD и ADD1A1 - параллелограммы, то AB⏐⏐DC и AA1⏐⏐DD1. Таким обр., две пересекающиеся прямые AB и AA1 одной грани соответственно параллельны двум прямым CD и DD1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоск. следует, что грани ABB1A1 и DCC1D1 параллельны.

Докажем равенство этих граней. Т.к. все грани параллелепипеда - параллелограммы, то AB=DC и AA1=DD1. По той же причине стороны углов A1AB и D1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким обр., две смежные стороны и ∠ м/у ними паралл-ма ABB1A1 соотв. равны двум смежным сторонам у ∠ м/у ними пар-ма DCC1D1, поэтому эти параллелограммы равны

БИЛЕТ 17

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Параллелепипед называется прямоугольным , если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.*

ТЕОРЕМА:  *Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.*



Док-во: Докажем, что AC12=AB2+AD2+AA12  Так как ребро CC1 перпендикулярно к основанию ABCD, то ∠ACC1-прямой.

Из прямоугольного треугольника ACC1 по теореме Пифагора получаем AC12=AC2+CC12.

Но AC -диагональ прямоугольника ABCD, поэтому AC2=AB2+AD2. Кроме того, CC1=AA1.

След-но AC12=AB2+AD2+AA12  Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 18

Рассмотрим многоугольник A1A2..An и точку P не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим *n* треугольников: PA1A2,PA2A3,...,PAnA1.

Многогранник, составленный из *n*-угольника A1A2..An и *n* треугольников, называется *пирамидой*

Многоугольник A1A2..An называется *основанием*, а треугольники - *боковыми гранями* пирамиды. Точка P называется *вершиной* пирамиды, а отрезки PA1, PA2, ..., Pan - ее *боковыми ребрами.*

ТЕОРЕМА: *Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает подобную пирамиду.*

Док-во: S-вершина пирамид A - верш.основания и A1 - точка пересечения секущей плоскости с боковым ребр. SA. Подвергнем пирамиду преобразованию гомотетии относительно вершины S с коэф. гомотет. k=SA1/SA

При этом плоск-ть основания переходит в паралл. плоск-ть, проходящую ч/з точку A1, т.е. в секущую плоскость, а след-но, вся пирамида - в отсекаемую это плоскостью часть. Т.к. гомотет. есть преобразование подобия, то отсек. часть явл пирамид., подобной данной. Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 19

ТЕОРЕМА: *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.*

Док-во: Боковые грани правидьной пирамиды - равные равнобедренные треугольники, основания которых - стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель 1/2\*d за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т.е. его периметр. Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 20

ТЕОРЕМА: *Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.*

Док-во: 1) Рассмотрим прямую треуг. призму ABCA1B1C1 с объемом V и высотой h. Проведем такую высоту треугольника ABC отрез.BD, которая разделяет этот треуг. на два треуг.

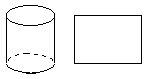
Плоскость BB1D разделяет данную призму на две приз., основаниями которых явл. прямоугольные треуг. ABD и BDC. Поэтому объемы V1 и V2 этих призм соответственно равны

Sabdh и Sbdch. V=V1+V2, т.е. V=Sabdh+Sbdch=(Sabd+Sbdc)h. Таким обр., V=Sabch

2) Докажем теорему для произвольной призмы с высотой h и площ. основания S. Такую призму можно разбить на прямые треуг. призмы с высотой h.

Выразим объем каждой приз. по формуле (1) и сложим эти объемы. Вынося за скобки множитель h, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т.е площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем призмы равен Sh. Ч.Т.Д.

БИЛЕТ 21



*За площадь боковой поверхности цилиндра принимают площадь ее развертки.*

Так как площадь прямоугольника ABB1A1 равна AA1\*AB=2πrh, то для вычислений площади боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула Sбок=2πrh

Итак, *площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.*

БИЛЕТ 22

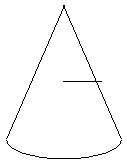
ТЕОРЕМА: *Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.*

Док-во: Рассмотрим конус с объемом V. Произвольн. сечение конуса плоскостью перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в т.M1 пересечения этой плоскости с осью Ox.

Обозначим радиус этого круга ч/з R1, а площадь сечения ч/з S(x), где x- абсцисса точки M1. Из подобия прямоугольных треугольников OM1A1 и OMA следует, что OM1/OM=R1/R, или x/h=R1/R, откуда R1=xR/h.

Так как S(x)=πR12, то S(x)=πR2x2/h2.

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел получаем:



Площадь S основания конуса равна πR2, поэтому

V=1/3Sh Ч.Т..Д.