**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

кафедра информационных технологий и автоматизированных систем

РЕФЕРАТ

на тему:

«Частотные характеристики линейных систем управления»

Минск, 2008

Математическим аппаратом исследования САУ являются дифференциальные уравнения, которые описывают движение системы и являются уравнениями динамики. Из уравнений динамики, положив все производные равными нулю, можно получить уравнения статики, которые описывают поведение системы в установившемся режиме.

Дифференциальные уравнения САУ и ее элементов, составленные в соответствии с физическими законами их функционирования и факторами, от которых зависят переменные уравнений, практически всегда являются нелинейными. Дифференциальные уравнения САУ, записанные в виде системы уравнений или одного дифференциального уравнения высокого порядка представляют собой математическую модель системы. Математическая модель является основой для анализа свойств системы и степени их соответствия поставленным требованиям. Итак, исходная математическая модель САУ является нелинейной. Отсутствие однозначных аналитических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не позволяет создать какие-либо общие эффективные методы анализа и синтеза САУ. Именно это и послужило причиной развития идеи линеаризации, т.е. замены исходной нелинейной модели линейной, близкой по решению к исходной модели в определенном диапазоне изменения начальных условий и параметров.

Линеаризация нелинейных функций в области малых отклонений (всех координат от установившихся значений) основана на разложении нелинейных функций в ряд Тейлора в окрестности установившихся значений (положения покоя, например) и ограничении линейными членами разложения.

Пусть система управления описывается дифференциальным уравнением *n-*го порядка, разрешенным относительно старшей производной

,

где *F* и *F*1 - некоторые нелинейные функции. Представим переменные, входящие в уравнение в следующем виде:

Здесь , - отклонение координат и от установившихся значений и соответственно. Разложим нелинейные функции в ряд Тейлора в окрестности установившегося значений и ограничимся линейными членами

,

.

Нулевой индекс при частных производных означает, что они определены при установившихся значениях всех переменных.

Допустим, что отклонения переменных от установившегося значений настолько малы, что остаточными членами можно пренебречь как бесконечно малыми высших порядков малости по сравнению с членами, содержащими отклонения в первой степени. В соответствии с этим предположениям будем полагать *R =* 0 *, R*1 *=* 0.

C учетом сделанных предположений и обозначений дифференциальные уравнения системы примут вид

,

где

.

Уравнение установившегося движения можно получить из последнего уравнения, положив все отклонения равными нулю:

. (1)

Установившееся движение в рассматриваемом случае не представляет предмета исследования. Вычтем из полученного уравнения движения в окрестности уравнение установившегося движения и получим уравнение в отклонениях, поведение которых нас и интересует. В дальнейшем, в целях сокращения записей, знак Δ будем опускать. Получим

. (2)

Напомним еще раз, что все переменные, фигурирующие в последнем уравнении, являются отклонениями от установившихся значений. Поэтому для того, чтобы получить решение исходного уравнения , к решению уравнения (2) необходимо добавить установившееся значение .

В приведенной выше цепочке формальных рассуждений относительно перехода от нелинейного уравнения к линеаризованному в отклонениях не хватает только конкретности, касающейся определения установившихся значений.

В самом простом и распространенном частном случае под установившимся значением понимается положение покоя. Оно характеризуется равенством нулю всех производных, начиная с первой, всех координат системы, т.е.

.

Таким образом, для определения установившихся значений всех координат необходимо определить только значения и . Они определяются в результате решения уравнения (2.1), которое в рассматриваемом случае имеет вид:

.

При решении данного равнения могут встретиться три исхода. В первом из них существует одно решение () этого уравнения, во втором – несколько и в третьем – ни одного. Первый случай означает существование одного состояния покоя, второй – нескольких и третий – отсутствия состояния покоя. В последнем случае ни о каком исследовании в окрестности состояния покоя не может быть и речи – его просто нет.

В случае нескольких решений выбирается одно из них и проводится линеаризация в окрестности выбранного состояния покоя. Проще всего обстоит дело, когда имеется только одно состояние покоя. Линеаризация проводится в его окрестности, и все результаты исследования линеаризованной системы относятся к этой окрестности. Не следует, правда, забывать, что в связи с использованием рядов Тейлора при линеаризации результат исследования линеаризованной системы тем ближе к истинным, чем меньше колебания отклоняются от состояния покоя. Отметим еще одну особенность линеаризованных систем: состояние покоя всегда находится в начале координат. Это тоже связано со способом линеаризации, дифференциальные уравнения являются уравнениями в отклонениях (от состояния покоя).

В рамках линейной теории эти вопросы не обсуждаются. В ней рассматриваются следствия предположения, что колебания систем описываются линейными дифференциальными уравнениями.

Уравнение в отклонениях (2) описывает *возмущенное движение*системы, являющееся результатом действия каких-либо возмущений, приводящих к появлению отклонений от установившегося режима. Уравнение установившегося режима описывает*невозмущенное движение*. Нахождение в состоянии покоя тоже движение, хотя и специфическое.

Сложность решения дифференциальных уравнений высокого порядка без применения вычислительной техники и невозможность на основании численных решений создания общих методов анализа и синтеза систем привели к широкому использованию методов, связанных с применением математического аппарата преобразований Лапласа и Фурье. Эти методы и составили сущность так называемой классической теории автоматического управления.

Необходимо отметить, что существуют нелинейные функции, которые невозможно линеаризовать посредством разложения ряд Тейлора. В этом случае используют специальные методы, разработанные для исследования нелинейных систем.

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

 (3)

является базовой математической моделью классической теории автоматического регулирования и управления. Напомним основные свойства решения данного уравнения, которые, кстати, должны быть хорошо известны из курса высшей математики.

Под решением дифференциального уравнения понимается выражение функции времени , которое ему удовлетворяет. Другими словами, если функция является решением уравнения (3), то подстановка данной функции в рассматриваемое уравнение приводит к тождеству. При этом функция считается заданной.

В курсе высшей математики выражение линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка приводится в несколько иной форме, а именно в виде

, (4)

где функция считается заданной.

Конечно, если считать функцию известной, то не трудно определить правую часть уравнения (3) и считать функцию в уравнении (4) заданной. Таким образом, более детальное, чем в уравнении (4) представление правой части (3) используется только при описании САУ. Полезность такой детализации видна только при совместном рассмотрении нескольких взаимосвязанных между собой систем или одной системы, состоящей из нескольких звеньев, каждое из которых описывается уравнением рассматриваемого вида.

Как известно, решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

,

где - решение однородного уравнения

, (5)

описывающего собственные колебания системы, а - частное решение неоднородного уравнения (4), описывающего вынужденные колебания системы.

Таким образом, колебания системы складывается из собственных колебаний, которые определяются при равенстве нулю внешнего воздействия только ненулевыми начальными условиями, и вынужденных колебаний, которые определяются только внешним воздействием при нулевых начальных условиях.

Таким образом, наряду терминологией теории дифференциальных уравнений относительно решений последних (общее и частное решения), иногда более выразительной является терминология теории колебаний (собственные и вынужденные колебания). Наряду с ними в теории управления используется собственная терминология: вместо частного решения, соответствующего определенной правой части уравнения или вынужденных колебаний, которые определяются внешней силой, говорят о выходном процессе , соответствующем, входному процессу или о преобразовании процесса в процесс , или о реакции системы на воздействие .

Методы определения частного решения линейного дифференциального уравнения при произвольной правой части рассматриваются в курсе математики. В данном курсе основной интерес представляет не формальная сторона дела, а содержательная. Она ярче всего проявляется в случае, когда внешнее воздействие представляется в виде суммы гармонических воздействий. То же самое можно сказать и о методах определения собственных колебаний. Существуют эффективные алгоритмы вычисления собственных колебаний линейных систем, но нас должна интересовать в первую очередь качественная сторона дела.

Общее решение однородного уравнения (5) имеет вид:

, (6)

где: *λi* - корни характеристического уравнения

, (7)

а *Ci* - произвольные постоянные.

Характеристическое уравнение получается формальной заменой выражения *i-*й производной в выражении однородного дифференциального уравнения на *i-*ю степень корня в выражении характеристического уравнения.

Нередко выражения однородного уравнения (5) и характеристического уравнения (7) записываются в несколько иной форме через произвольные параметры *ai*, а именно в виде:

, (8)

. (9)

Дело в том, что в соответствии с давно сложившейся традицией нумерация коэффициентов полинома начинается с нуля при переменной в старшей степени, а затем с понижением степени переменной индекс коэффициента при нем увеличивается. Другими словами, используются выражение (9) для характеристического уравнения системы, описываемой дифференциальным уравнением (8).

Нам кажется, более удобным нумеровать коэффициенты полиномов по убывающим степеням, как это показано в выражениях (7), (5). Конечно, это вопрос вкуса, но только до тех пор, пока не возникает необходимости воспользоваться известными результатами исследования линейного дифференциального уравнения, выраженных через коэффициенты дифференциального или характеристического уравнений. Как правило, они записаны через коэффициенты, индексы которых возрастают с убыванием степени переменной в выражении полинома или порядка производной в выражении дифференциального уравнения. В первую очередь это относится к алгебраическим критериям устойчивости и интегральным показателям качества, о которых речь пойдет ниже.

Конечно, можно переписать известные результаты в новых обозначениях, но это удобство не будет распространяться за пределы одного руководства. Вместо этого, будем пользоваться убывающей индексацией, т.е. обозначениями вида (7), (5), а в тех немногочисленных случаях, когда надо воспользоваться готовыми результатами, в которых использована возрастающая индексация, т.е. обозначения вида (8), (9), это будет специально отмечено.

Строго говоря, общее решение уравнения (5) имеет указанный вид только в случае *различных* корней характеристического уравнения, но для качественных рассуждений случаи совпадающих (кратных) корней можно и не рассматривать. Действительно, малые изменения параметров характеристического уравнения должны вызвать малое изменение значений корней характеристического уравнения и малые изменения в решении однородного уравнения. При обсуждении качественной картины собственных колебаний, таким образом, случаи кратных корней можно исключить: они ничего не добавят в качественную характеристику зависимости собственных колебаний расположения корней на плоскости комплексного переменного. Из сказанного не следует, что случай кратных корней не представляет никакого интереса. Особенности такого расположения корней оказывают существенное влияние на вычислительную сторону дела, когда надо определить не общее решение, а собственные колебания зависящие от начальных условий. Однако в отличие от прежних времен, когда все вычисления должны быть проделаны исследователем вручную и потому вычислительная сторона дела была столь же важной, что и качественная, ныне все вычисления, связанные с исследованием линейных систем, можно выполнить с помощью широко распространенного программного обеспечения.

Впрочем, все сказанное о кратных корнях имеет отношение и к простым корням. Существуют вполне достаточно эффективные способы вычисления коэффициентов при определении конкретного выражения собственных колебаний, но мы опустим их, изложив самые простые, которых достаточно для демонстрационных примеров.

Выражение (6) является общим решением уравнения (5), но собственные колебания соответствующей системы описываются выражением (6) при конкретных значениях коэффициентов *C*i. Они могут быть определены многими способами. Чаще всего эти постоянные определяются из начальных условий. Начальными условиями (для собственных колебаний) являются значения процесса *x(t*) его производных в нулевой момент времени. Дифференцируя выражение (6) в нулевой момент времени можно получить систему уравнений для определения постоянных *C*i.

 (10)

Данная система уравнений имеет специальный вид, который позволяет получить ее решение сравнительно простыми методами. Однако при первом знакомстве с обсуждаемой проблемой можно иметь в виду (применять) общие методы решения систем линейных уравнений.

Частное решение уравнения (3) при определенной правой части, а точнее при определенном выражении внешнего воздействия *y*(*t*), можно интерпретировать как результат преобразования этого воздействия системой, описываемой уравнением (3).

Нахождение частного решения нередко следует следующей схеме. Предполагается, что при заданном внешнем воздействии *y*(*t*), частное решение *x*(*t*) или, что то же самое, выходная координата системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, имеет определенный с точностью до (значений) параметров вид. Подставляя в дифференциальное уравнение (определенное) значение внешнего воздействия и предполагаемого частного решения, получим уравнение относительно параметров. Если из полученного уравнения параметры могут быть определены, то частное решение или, что то же самое, реакция системы на данное внешнее воздействие определено.

Приступая к решению этого вопроса, мы имеем в ввиду не столько определение самого частного решения по терминологии теории дифференциальных уравнений и даже не определении выходного процесса по заданному входному. Хотя это достаточно важный для теории автоматического управления вопрос, основной целью настоящего раздела является введение центрального для классической теории понятия частотной характеристики и, далее, передаточной функции. Затем, с использованием этих понятий можно обсудить вопросы определения выходного процесса по заданному входному спектральными методами.

Рассмотрим частный случай гармонического внешнего воздействия. Известно, что суммой гармоник можно представить сигнал практически произвольной формы. По основному свойству линейных систем – принципу суперпозиции – зная реакцию системы на произвольное гармоническое воздействие, нетрудно определить реакцию на произвольное воздействие. Действительно, реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности. Самой простой составляющей (слагаемым) произвольного входного воздействия является гармоническое воздействие в виде синусоидального или косинусоидального. Это справедливо, если иметь в виду функции действительного аргумента. Однако сами гармонические функции раскладываются на еще более простые, на экспоненциальные.

Итак, пусть на входе системы действует гармоническое воздействие

, (11)

которое является самой простой составляющей (слагаемым) произвольного входного воздействия. Представим его в виде суммы двух экспонент

,

где

, , (12)

и найдем реакцию на каждое слагаемое в отдельности.

Итак, пусть. Предположим, соответствующее решение имеет вид:

. (13)

Подставим и из выражений (12) и (13) в уравнение (3). Получим

.

Отсюда

. (14)

Таким образом, предположение о возможности представления нахождения выходного процесса в виде (13) оправдалось. Более того, дополнительно определен неизвестный множитель , фигурирующий в предполагаемом решении.

Если сравнить выражения входного и выходного процессов и , представленные выражениями (12) и (13) в рассматриваемом частном случае, то можно убедиться, полученное выражение , действительно, можно рассматривать как множитель, на который надо умножить входное воздействие, чтобы получить выходное.

Этот комплексный коэффициент усиления называется *частотной характеристикой системы*.

Частотная характеристика системы может рассматриваться и как комплексная функция частоты. Как и всякая функция комплексного аргумента, она может быть представлена действительной и мнимой частями, модулем и аргументом:

,

где:

 - действительная частотная характеристика;

 - мнимая частотная характеристика;

 - амплитудная частотная характеристика;

 - фазовая частотная характеристика.

Пусть теперь . Эта функция отличается от ранее рассмотренной функции только знаком частоты. Частотная характеристика является комплексным коэффициентом усиления для любой частоты, в том числе и отрицательной. Поэтому для определения соответствующего выходного воздействия достаточно сменить знак частоты в выражении (13)

. (15)

Если входной процесс равен сумме этих воздействий (11), то выходной процесс равен сумме соответствующих выходных процессов (13) и (15).

Проделав ряд элементарных преобразований

 (16)

получим, что при гармоническом входном воздействии выходной процесс также гармонический, амплитуда которого в раз больше амплитуды входного воздействия, а фаза больше фазы входного воздействия на .

Здесь использовано свойство четности амплитудной частотной характеристики, которое легко следует из выражений связи между различными ее составляющими

, ,

, (17)

Не трудно убедиться, что соотношения между различными частотными характеристиками системы такие же, как и между различными составляющими комплексного числа.

Из всего сказанного следует, что если входной процесс представлен рядом Фурье, то для определения ряда Фурье выходного процесса достаточно изменить описанным выше образом амплитуды и фазы входного процесса.

Еще проще определяется преобразование Фурье выходного процесса по преобразованию Фурье входного процесса . Как не трудно показать,

. (17)

Для этого только достаточно вспомнить формальное определение и содержательный смысл преобразования Фурье. С формальной точки зрения для любой абсолютно интегрируемой функции , т.е. функции для которой

,

существует прямое и обратное преобразования Фурье

, .

Последнее выражение и позволяет трактовать преобразование Фурье некоторой функции времени в виде суммы гармоник с комплексными «амплитудами» . Преобразование каждой такой гармоники сводится к умножению ее «амплитуды» на комплексный коэффициент усиления , как показывает выражение (17).

Преобразование Фурье обладает одним существенным с теоретической точки зрения недостатком – его нельзя применить к функциям, которые не являются абсолютно интегрируемыми. Таких функций достаточно много, чтобы в полной мере ощутить неудобство данного ограничения. Например, функция – константа, сохраняющая постоянное ненулевое значение сколь угодно долго, не является абсолютно интегрируемой. Вместе с тем, такая функция простейшим образом описывает постоянное воздействие.

Этого недостатка лишено преобразование Лапласа, которое широко используется в классической теории управления. Оно является обобщением преобразования Фурье, на его основе дается определение центрального понятия классической теории управления, понятия передаточной функции. Последняя является обобщением только что введенного понятия частотной характеристики в той же мере, в какой преобразование Лапласа является обобщением преобразования Фурье.

Эти понятия настолько тесно связаны между собой, что иногда их не различают. Например, не смотря на то, что центральным понятием классической теории автоматического управления является, как у же отмечалось, понятие передаточной функции, методы этой теории называются частотными. На наш взгляд, это происходит потому, что использование именно преобразования Лапласа связано с вычислительной стороной дела, но как только дело доходит до физической интерпретации результатов, полученных с помощью передаточных функций, переходят к частотным характеристикам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. - СПб.: Питер, 2005.
2. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления в 3-х т. Т.1: Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / Под ред. Н.Д. Егупова. – Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.