Муниципальное общеобразовательное учреждение

Средняя общеобразовательная школа № 4

Секция: математика

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

по теме

**Доказательства неравенств с помощью одномонотонных последовательностей**

Позолотина Наталья Андреевна, 9б класс,

МОУ СОШ №4 Центрального района.

224-49-85

Руководитель: Тропина Наталья Валерьяновна,

кандидат педагогических наук,

доцент кафедры математического анализа НГПУ.

(Работа выполнена в МОУ СОШ №4)

Новосибирск 2008

**Содержание**

Введение

1. Основные понятия и определения

2. Обоснование метода одномонотонных последовательностей для случая с произвольным числом переменных

2.1 Доказательство неравенств с минимальным числом переменных

2.2 Случай с двумя последовательностями из двух переменных

Упражнения

2.3 Случай с двумя последовательностями из трех переменных

Упражнения

2.4 Случай с двумя последовательностями из n переменных

Упражнения

2.5 Случай с n последовательностями из n переменных

Упражнения

Заключение

Список использованной литературы

**Введение**

В школьном курсе математике мы изучали доказательства неравенств в основном двумя способами:

* сведение к очевидному с помощью равносильных преобразований;
* графически (исследование свойств и построение графиков функции)

Не существует универсального способа доказательства всех неравенств, и более того, не существует конкретных указаний для выбора способа доказательства. Поэтому любой новый способ доказательства неравенств представляет особый интерес.

В данном работе мы рассмотрим один из таких способов: доказательство неравенств с помощью одномонотонных последовательностей.

Работа состоит из 2-х параграфов. В первом параграфе я объясняю основные определения, которые нам понадобятся для работы. Во втором параграфе находится основная работа с примерами и упражнениями.

**1. Основные понятия и определения**

В данном параграфе мы рассмотрим основные понятия и определения, которые нам понадобятся для дальнейшей работы.

Определение 1. Множество – это совокупность, собрание, набор некоторых объектов по какому – либо общему для них признаку.

Определение 2. Натуральные числа N – это целые положительные числа 1, 2, 3, 4, 5,…

Определение 3. Целые числа Z – это числа 0, +1, +2, +3, +4, +5…:

Z = N -N {0}



Определение 4. Рациональные числа Q – это числа представимые обычными дробями в виде , где m **є** Z , n **є** N (или конечными, или бесконечными периодичными дробными).



Определение 5. Иррациональные числа I – это числа, представимые бесконечными непериодическими десятичными дробями и непредставимые в виде .



Определение 6. Вещественные (действительные) числа R – объединение множества рациональных и иррациональных чисел.

R=Q I



Определения 7. Неравенство – соотношение между величинами, показывающее, что одна величина больше или меньше другой.

Например: ,



Известно, что все неравенства подчиняются определенным свойствам, таким как:

а) a<b, b<ca<c



b) ab, baa=b



c) ab a+cb+c



d) a0 -a0



Определения 8. Доказать неравенство – установить истинность неравенства.

Неравенства бывают разными: с одной, двумя и более переменными, со степенями. Ля каждого неравенства существует свой способ доказательств. Мы рассмотрим еще один способ: через одномонотонные последовательности.

Определение 9. Следствие – из двух неравенств одно является следствием другого, если область истинности второго неравенства содержит в себе область истинности первого неравенства.

Обозначение: f1(x)>f2(x)ц1(x)>ц2(x) – второе неравенство – следствие первого.



Определение 10. Два неравенства называются равносильными, если каждое из них является следствием другого. Иначе это можно сформулировать так: два неравенства считаются равносильными, если их множества значений переменных, для которых они истинны, совпадают.

Обозначаются равносильные неравенства: f1(x)>f2(x)ц1(x)>ц2(x)



Эти определения аналогичны соответствующим определениям для уравнений. Как и для уравнений, можно сформулировать утверждения о действиях, преобразующих данное неравенство в равносильное ему. Такими действиями могут быть:

– прибавление к обеим частям неравенства одного слагаемого;

– перенос слагаемого с противоположным знаком из одной части неравенства в другую;

– умножение обеих частей на положительное число или положительную функцию и т.д.

Следует, однако, производя эти действия, следить, чтобы не изменилась область допустимых значений, так как иначе будет нарушена равносильность этих неравенств.

Определение 11. Метода математической индукции – метод доказательства неравенств, путем схожести доказательств от самого легкого к самому сложному.

Например, Р(n) – некоторое утверждение, зависимое от n **є** N

1. Проверяем правдивость Р(1)
2. Предполагаем, что P(k) истинно
3. Доказываем истинность Р(k+1)

4) Заключаем, что Р(n) истинно для любых n.

Определение 12. Одномонотонные последовательности – это последовательности чисел вида **(**а1 а2 … аn**)(**b1 b2 … bn**)** записанных в виде таблицы, где наибольшее из чисел а1 а2 … аn находится над наибольшим числом из чисел b1 b2 … bn и второе по величине из чисел а1 а2 … аn над вторым по величине из чисел b1 b2 … bn и т.д., другими словами обе последовательности одновременно возрастающие или одновременно убывающие.

Определение 13. Произведение одномонотонных последовательностей (а1, а2, …аn), (b 1, b2,…bn), …( d 1, d 2,…, d n) это число вида

= а1b1…d1+а2b2…d2+ …+anbn…dn



**2. Обоснование метода одномонотонных последовательностей для случая с произвольным числом переменных**

Данный параграф разбит на пункты, в которых мы попробуем прийти к самому общему доказательству, для случая k последовательностей с n числом переменных, с помощью метода математической индукции.

**2.1 Доказательство неравенств с минимальным числом переменных**

а1\*b1 – неравенство с минимальным числом переменных. Тогда

= a1b1.



Так как это неравенство минимальное из всех существующих, то сравнивать с похожим неравенством его просто невозможно.

* 1. **Случай с двумя последовательностями из двух переменных**

Если = a1b1. то =а1b1+а2b2



**Теорема 1. Пусть (а1а2)**(**b1b2) – одномонотонные последовательности. Тогда**



**Доказательство**

Действительно,

– =a1b1+a2b2-a1b2-a2b1 = (a1-a2) (b1-b2)



Так как последовательности (а1а2)(b1b2) одномонотонны, то числа a1-a2 и b1-b2 имеют одинаковый знак. Поэтому

(a1-a2)(b1-b2) 0.



Теорема доказана.

**Упражнения**

**Данные ниже упражнения мы решим с помощью Теоремы 1**

**Упражнение №1**.

Пусть a и b – положительные вещественные числа.

Доказать неравенство

a3 +b3 a2b+b2a.



Доказательство.

Заметим, прежде всего, что

a3 +b3 =, a2b+b2a =



А так как последовательности (a2, b2), (a, b) одномонотонны, то



А это значит, что a3 +b3 a2b+b2a.



Что и требовалось доказать.

Докажем это же неравенство, но другим способом.



Значит a3 +b3 a2b+b2a.



Что и требовалось доказать.

Мы не можем сказать какой из методов доказательства решения легче, так как в данном случае оба метода решения неравенства примерно одинаковые по сложности.

**Упражнение №2**.

Пусть a и b – положительные вещественные числа.

Доказать неравенство.

а2+b2.



Доказательство.

Заметим, прежде всего, что

а2+b2 =, ,



А так как последовательности (), () одномонотонны, то



.



Что и требовалось доказать.

**2.3 Случай с двумя последовательностями из трех переменных**

Рассмотрим последовательность (а1,а2,а3) и (b 1, b2,b3), и запишем в виде таблицы



Если последовательность (а1,а2,а3)(b1, b2 ,b3) записанных в виде таблицы, где наибольшее из чисел а1,а2,а3 находиться над наибольшим из чисел b 1,b2,b3, а второе по величине а1,а2,а3 находиться над вторым по величине из чисел b 1,b2,b3 , и где наименьшее из чисел а1,а2,а3 находиться над наименьшим из чисел b 1,b2,b3 то последовательность одномонотонная.



Если =a1b1, и =а1b1+а2b2, то =а1b1+а2b2+a3b3



Для доказательства следующих теорем нам понадобится одно свойство одномонотонных последовательностей, которое оформим в виде леммы.

**Лемма. Если (а1, а2, …аn) и (b 1, b2,…bn) одномонотонные последовательности, то их произведение не изменится при перестановки местами столбцов.**

**Доказательство.**

Рассмотрим последовательность с двумя переменными из двух переменных.

=а1b1+а2b2.



Заметим, что а1b1+а2b2 = а2b2+ а1b1 по переместительному свойству сложения. Значит, в самой таблице мы тоже можем переставлять столбцы переменных, при этом сохраняется одномонотонность последовательности. То есть

=



Теперь рассмотрим последовательность с двумя последовательностями из трех переменных.

=а1b1+а2b2+a3b3.



Кроме того, что мы можем поменять переменные по переместительному свойству, а по сочетательному свойству мы можем объединять некоторые слагаемые, сохраняя одномонотонность последовательности. То есть

а1b1+а2b2+a3b3= (a3b3+а2b2)+ а1b1 =



**Лемма доказана**

**Теорема 2. Пусть (а1 а2 а3), (b1 b2 b3) – одномонотонные последовательности и ()(**здесь и в дальнейшем**) любая перестановка чисел b1 b2 b3. Тогда**



**.**



**Доказательство.**

Действительно, если последовательность отличается от (b1 b2 b3) то найдется пара чисел k, l (1k<l3) такая, что последовательности (ak, al) и (bk, bl) не одномонотонны. Значит, поменяв местами числа и , мы увеличим всю сумму, а значит и всю сумму . То есть



, так как .



Очевидно, что за конечное число попарных перестановок элементов 2-ой строки можно получить одномонотонную последовательность.

**Теорема доказана**

**Упражнения**

**Данные ниже упражнения мы решим с помощью Теоремы 2**

**Упражнение №1.**

Пусть a и b и c – положительные вещественныечисла.

Докажите неравенство.

a3+b3+c3a2b+b2c+c2a.



Доказательство.

Заметим, прежде всего, что

a3+b3+c3=, a2b+b2c+c2a =



А так как последовательности (a2, b2, c2), (a, b , c) одномонотонны, то

.



А это значит, что a3+b3+c3a2b+b2c+c2a.



Что и требовалось доказать.

**Упражнение №2.**

Пусть a и b и c – положительные вещественныечисла.

Докажите неравенство.

.



Доказательство.

Заметим, прежде всего, что



и (a, b, c) и () одномонотонные последовательности, то



,



.



Складывая эти неравенства, мы получаем

.



Отделим дроби с одинаковым знаменателем в правой части

.



Вычислив, получаем

.



А это значит, что



Что и требовалось доказать

**2.4 Случай с двумя последовательностями из n переменных**

Рассмотрим одномонотонные последовательность (а1, а2, …аn) и (b 1, b2,…bn)

Если =a1b1, и =а1b1+а2b2, то =а1b1+а2b2…anbn



**Теорема 3. Пусть (**а1 а2 … аn**), (**b1 b2 … bn**) – одномонотонные последовательности и ()перестановка чисел b1 b2 … bn. Тогда**



**.**



**Доказательство.**

Действительно, если последовательность () отличается от (b1 b2 … bn) то найдется пара чисел k, l (1k<ln) такая, что последовательности (ak, al) и (bk, bl) не одномонотонны. Значит, поменяв местами числа и и , мы увеличим всю сумму, а значит и всю сумму . То есть



,



так как .



Очевидно, что за конечное число попарных перестановок элементов 2-ой строки можно получить одномонотонную последовательность.

**Теорема доказана.**

**Следствие.**

Для любого nN верно



**.**



Доказательство.



Но последовательности (а1 а2 … аn) и () не являются одномонотонными, и поэтому мы не можем воспользоваться теоремой 3.



Однако эти последовательности противомонотонны: числа в последовательностях расположены в обратном порядке – самому большому по величине соответствует самое маленькое, а самому маленькому соответствует самое большое. А из противомонотонных последовательностей сделать одномонотонные очень просто – достаточно все числа второй линии взять со знаком минус. В данном случае одномонотонными являются последовательности

(а1 а2 … аn) и ()



Поэтому



**Отсюда и следует искомое неравенство**

**Следствие**

Для любого nN верно



(Неравенство Чебышева).

Доказательство.

В силу теоремы 3 справедливы следующие n неравенства



Значит



В этих неравенствах левая часть не изменяется, а в правой части элементы второй строки меняются циклически.

Складываем все и получаем



Что и требовалось доказать

**Упражнение №1.**

Пусть a и b и c – положительные вещественныечисла.

Докажите неравенство.

a3+b3+c3+d3a2b+b2c+c2d+d2a.



Доказательство.

Заметим, прежде всего, что

a3+b3+c3+d3=, a2b+b2c+c2d+d2a =.



А так как последовательности

(a2, b2, c 2, d3), (a, b , c, d)

одномонотонны, то

.



А это значит, что a3+b3+c3+d3a2b+b2c+c2d+d2a.



Что и требовалось доказать.

Доказательство этого неравенства с помощью одномонотонных последовательностей я не могу сравнить с другим доказательством, так как доказать другим способом это неравенство я не смогла.

**2.5 Случай с n последовательностями из n переменных**

Рассмотрим одномонотонные последовательность (а1, а2, …аn), (b1, b2,…bn), …(d 1, d 2,…, d n).

Если =a1b1, и =а1b1+а2b2, и =а1b1+а2b2…anbn,



то = а1b1…d1+а2b2…d2+ …+anbn…dn



**Теорема 4. Рассмотрим одномонотонные последовательности** (а1, а2, …аn), (b 1, b2,…bn), …, (d1, d2,…,dn). Тогда

.



**Доказательство.**

Действительно, если последовательность (a1, а2, …аn), (b'1, b'2,…b'n), …, (d'1, d'2,…,d'n) отличается от (а1, а2, …аn), (b 1, b2,…bn), …, (d1, d2,…,dn), то найдутся переменные k, l (1k<ln) такие, что последовательности (ak, al) и (bk, bl) …(dk, dl) не одномонотонны. Значит, поменяв местами числа ,, ak, al … dk, dl мы увеличим всю сумму, а значит и всю сумму . То



есть

,



так как .



Очевидно, что за конечное число попарных перестановок элементов n-ой строки можно получить одномонотонную последовательность.

**Теорема доказана.**

**Пример**



**Упражнение 1**

Пусть а1, а2, …аn - положительные вещественные числа.

Докажите, что



Это неравенство называется неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Докажем его двумя способами

Доказательство.

Перепишем его в виде:

, введя новые переменные



**Имеем**



Если сравнить эти два доказательства неравенства, можно заметить, что доказательство с помощью одномонотонных последовательностей гораздо легче в сравнении с доказательством Коши.

неравенство одномонотонный последовательность коши

**Заключение**

Работая по данной теме, я узнала новый способ доказательства неравенств, вспомнила уже изученные способы доказательства неравенств. Все упражнения в работе я решала сама.

**Список использованной литературы**

* 1. Большой справочник школьника. 5 – 11 кл. М. Дрофа, 2001 г.
  2. В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави. Элементарная математика (повторительный курс). М., Наука. 1976 г.
  3. Р.Б. Алексеев, Л.Д. Курлядчик. Нетрадиционные способы доказательства традиционных неравенств. /Математика в школе. 1991 г. №4
  4. Л. Пинтер, Й. Хегедыш. Упорядоченные наборы чисел и неравенства. /Квант. 1985 г. №12.