Кафедра общей и прикладной геофизики

**Курсовая работа на тему:**

**Энергетические характеристики гравитационных и магнитных аномалий.**

Дубна, 2005

**Содержание**

1. Введение
2. Теоретическая часть
3. Расчётная часть
4. Список литературы

**Введение**

В данной работе рассматриваются элементы теории случайных функций и их применение для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Аппарат теории случайных функций и основанный на нём статистический подход можно применять в различных ситуациях. Во-первых, когда мало известно о параметрах аномалий или геологических объектах, которыми они вызваны. Во-вторых, когда поставленную задачу гравиразведки и магниторазведки можно решить только с применением аппарата теории случайных функций и ,наконец, в-третьих, при решении задач различными детерминированными методами.

Получаемые данные, корреляционные функции и связанные с ними энергетические спектры аномалий имеют следующие свойства: малая чувствительность к погрешностям наблюдений; взаимозаменяемость; чётность получаемых выражений.

В работе также приведены примеры применения теоретического материала к практике. Представлены расчёты для бесконечной горизонтальной материальной линии, бесконечной вертикальной материальной полосы и бесконечной горизонтальной полосы.. Для исследуемых функций построены графики при различных исходных данных.

**Теоретическая часть**

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ**

Энергия процесса f(t), соответствующая изменению времени от t = -t1, до t = t1 определяется интегралом



Среднее значение энергии за время 2t1 (или средняя мощность) определяется выражением



Через эти интегралы прямо можно выразить основные статистические характеристики сигналов — автокорреляционную функцию и энергетический спектр. Поэтому эти характеристики называют еще и энергетическими характеристиками сигналов.

Аналогичные интегралы можно написать и для отрезка профиля при изменении расстояния x от –T до +T, а именно:

, 

Эти интегралы выражают площадь между кривой квадрата функции f2(x) и осью x при изменении x от –T до +T и среднюю величину этой площади, т.е. сумму значений квадратов функции и средний квадрат функции.

По аналогии с величинами E и Eср гравиразведке и магниторазведке значения F и Fср также называют энергией функции f(x) (энергия и средняя величина энергии). При этом величину f2(x) называют мгновенной энергией, а значение интеграла  полной энергией функции f(x) (если, конечно, он существует). Автокорреляционная функция В(τ) и энергетический спектр сигнала Q(ω) однозначно можно выразить через указанные интегралы, определяющие энергии. Поэтому функции B(τ) и Q(ω) также называют энергетическими характеристиками функции f(x), в нашем случае гравитационной или магнитной аномалии.

В следующих разделах рассматриваются энергетические характеристики и детерминированных, и случайных аномалий. Причем первые являются аномалиями f(x) определенной формы из класса  (по В. Н. Страхову), для которых существует интеграл .

§ 1. Определение энергетических спектров и корреляционных функций аномалий

Аномалии известной формы (детерминированные сигналы)

Пусть f(x) — некоторая ограниченная вдоль профиля функция строго определенной формы, а S(ω) — ее трансформанта Фурье (предполагаем, что она существует) и пусть далее существует интеграл .

Автокорреляционной функцией такого сигнала f(x) (по определению В.Н. Страхова, если функция f(x) принадлежит классу , h > 0) называется функция

 (1.1)

Определив преобразование Фурье такой функции B(τ), получим энергетический спектр (спектральная плотность) сигнала f(х):

 (1.2)

Тогда

 (1.3)

Между автокорреляционной функцией В(τ) аномалии f(х) и ее энергетическим спектром Q(ω) существует связь, определяемая этой парой преобразований Фурье. Если определим функцию Q(ω) через значения простого спектра S(ω) аномалии f(x), то получим выражение

 (1.4)

(это в симметричной форме записи. В несимметричной форме записи коэффициент  будет отсутствовать).

Перейдем к выражению взаимной корреляционной функции и взаимного энергетического спектра аномалий. Пусть fp(х) и fл(х) — два сигнала известной формы, а Sр(ω) и Sл(ω) их трансформанты Фурье или спектры (предполагаем, что они существуют) и, кроме того, пусть существует интеграл



Для таких функций взаимной корреляционной функций называется выражением вида

 (1.5)

Преобразование Фурье функции Врл(τ) называется взаимным энергетическим спектром (взаимной спектральной плотностью) сигналов fр(х) и fл(х):

 (1.6)

В этом случае

 (1.7)

Примем, что fр(х) и fл(х) непрерывны при -∞ < x: < ∞ и Врл(τ) определена при -∞ < τ < ∞. Тогда взаимный энергетический спектр также можно выразить через спектры составляющих функций Sр(ω) и Sл(ω). Легко убедиться, что в этом случае вместо формулы (1.4) получим соотношение

 (1.8)

(Здесь, так же, как и в формуле (1.4), функции S(ω) и S(-ω) являются взаимно сопряженными, т.е. S(-ω) = S\*(ω)).

Нормированную автокорреляционную функцию можно определить из равенства

 (1.9)

Аналогичные выражения можно написать и для трехмерных аномалий. Пусть существует спектр S(u, v) функции известной формы f(х, y). И пусть существует интеграл



Тогда автокорреляционная функция

 (1.10)

Энергетический спектр

 (1.11)

Кроме того,

 (1.12)

Пусть спектры функций fр(х, у), fя(х, у) будут равны соответственно Sp(u, v) и Sл(u,v). Тогда при условии существования интеграла



для определения взаимных корреляционных функций и энергетического спектра получим равенства

 (1.13)

 (1.14)

. (1.15)

Пусть f(x, y), fp(x, y), fл(x, y) непрерывны в прямоугольнике -∞ < х < ∞, -∞ < у < ∞, В и Врл определены в прямоугольнике -∞ < ξ < ∞, -∞ < η < ∞, тогда верны равенства

 (1.16)

 (1.17)

Нормированная автокорреляционная функция

 (1.18)

Для осесимметричных аномалий, т.е. когда функция f(x, y) зависит только от переменной , из формул (1.11), (1.12) и (1.16) соответственно получим

 (1.19)

 (1.20)

 (1.21)

**§ 2. Некоторые свойства и особенности применения энергетических спектров и корреляционных функций**

Рассмотрим некоторые свойства и особенности применения энергетических спектров и корреляционных функции аномалий, которые будут широко использованы в последующих разделах.

1. Теорема Парсеваля

Пусть функция f(х) имеет спектр S(ω). Интегрируя по ω в бесконечных пределах обе части равенства (1.4), найдем



На основании равенства (1.3) получим



С учетом формулы (1.1) окончательно найдем



где учтено, что функция |S(ω)| — четная. Эту формулу обычно называют теоремой Парсеваля или теоремой Релея.

Аналогично для трехмерных аномалий на основании равенств (1.16), (1.12) и (1.10) для теоремы Парсеваля получим



Для трехмерных аномалий, симметричных относительно вертикальной оси, переходя к полярным координатам, отсюда найдем



Эту формулу можно получить и из равенства (1.21) (умножая обе его части на ρ и интегрируя по ρ в пределах от 0 до ∞) с учетом выражений (1.10) и (1.20).

Теорема Парсеваля, учитывающая величину полной энергии аномалий, имеет важное значение в гравиразведке и магниторазведке. Она использовалась в работах многих исследователей (К.В. Гладкий и др.). С ее применением В.Н. Страховым были получены ряд фундаментальных формул спектрального анализа гравитационных и магнитных аномалий.

2. Выражение энергетических спектров и корреляционных функций одних аномалий через другие

Пусть fx(x, y), fy(x, y), fz(x, y) — производные по осям координат x, y и z от некоторой гравитационной или магнитной аномалии f(х, y) (от гравитационного или магнитного потенциала, от ускорения силы тяжести и т.д.). Тогда пользуясь теоремами о спектрах производной функции, после небольших преобразований получим:

 (1.22)

Практически наиболее важными являются случаи f = U и f = Vz, где U — магнитный потенциал, Vz — ускорение свободного падения. Для этих случаев последнее равенство можно переписать в виде:

 (1.23)

 (1.24)

Из этих равенств можно определить (заменить) энергетический спектр одной из аномалий: X, Y, Z или Vxz, Vyz, Vzz через известные значения энергетических спектров других аномалий. Этот вывод можно перенести и на случай автокорреляционных функций:

 (1.25)

. (1.26)

В двухмерном случае (при ) из равенств (1.23)-(1.26) получим

 (1.26а)

Из этих равенств видно, что в двухмерной задаче энергетические спектры и автокорреляционные функции аномалий H, Z или гравитационных Vxz, Vхх, Vzz полностью взаимозаменяемы. Некоторые из них показаны на рис. 6. Это же положение верно в двухмерном случае и для аномалий Vх, Vz, т.е. для горизонтальной и вертикальной производных от любой исходной одной и той же аномалии. Оно же верно и для аномалий H, Z в случае косого и вертикального намагничивания и для нормированных функций Q и B аномалий H, Z и ΔT.

Это важное свойство автокорреляционных функций и энергетических спектров. Им не обладают исходные гравитационные и магнитные аномалии, за исключением функций Vxz, Vхх, Vzz в трехмерном случае и Vхх и Vzz — в двухмерном, для которых указанное свойство следует из уравнения Лапласа.

Легко показать, что энергетический спектр аномалии является всегда вещественной и четной функцией. Тогда и автокорреляционная функция аномалии будет вещественной и четной функцией. Рассмотрим взаимные энергетические спектры Q12(ω) и Q21(ω) двух функций f1(x) и f2(x). Для них верны соотношения

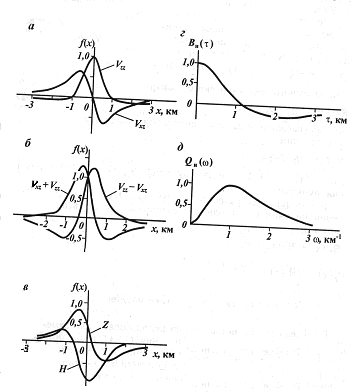


Рис. 1. Примеры разных аномалий, которым соответствуют одни и те же автокорреляционная функция B(τ) и энергетический спектр Q(ω)

, (1.27)

 (1.28)

 (1.29)

Кроме того, легко показать, что произведение Q12Q21 и сумма Q12 + Q21 являются всегда четными функциями, а разность Q21 – Q12 — всегда мнимой. При этом, если одна аномалия четная, а вторая нечетная, то

 (1.30)

Здесь, если первая функция — это , а вторая , где f — некоторая исходная аномалия (в двухмерном случае, например, для функций Vx, Vz; Vxz, Vzz для магнитных аномалий H и Z, если одна из них четная, а вторая - нечетная), то учитывая доказанное выше равенство Qp = Qq получим для суммы аномалий F = p + q:

 (1.31)

для взаимного энергетического спектра:

 (1.32)

Что же касается взаимных корреляционных функций, то для них получим



где В12(τ) + В21(τ) — четная функция; В21(τ) – В12(τ) — нечетная функция.

Кроме того, из равенств (1.30), (1.31) и (1.32) соответственно получим (если одна из аномалий четная, вторая — нечетная)

, (1.33)

 (1.34)

 (1.35)

Полученные равенства можно использовать для замены выражений Q12, Q21 и B12 через значения Q1, Q2 и B21 при решении различных задач, в частности, при определении радиуса корреляции суммарного поля, состоящего из нескольких компонент — региональной, локальной составляющих и ошибок наблюдений; при определении возможности наличия корреляции между двумя сигналами и т.д. Из изложенного материала видно, что корреляционные функции и энергетические спектры аномалий обладают рядом других важных свойств, которые при решении многих задач гравиразведки и магниторазведки делают их применение предпочтительнее, чем применение самих аномалий. Прежде всего это то, что корреляционные функции и энергетические спектры аномалий являются некоторыми интегральными характеристиками, т.е. при определении их значений (хотя бы одного) используются все точки исходной аномалии — вся кривая, что приводит к значительному уменьшению случайных погрешностей инструментального и геологического характера. Влиянию ошибок наблюдений подвергается только центральная часть кривых корреляционных функций, что делает возможным исправление их значений в этой центральной части.

Для случая автокорреляции ближайшая к поверхности особая точка получаемых функций залегает в 2 раза глубже. Этот факт расширяет области применения различных трансформаций к значениям автокорреляционной функции.

Автокорреляционные функции и энергетические спектры аномалий для производных одного порядка взаимозаменяемы (в двухмерном случае равны), что позволяет по данным В или Q для аномалии одной производной определить значения рассматриваемых функций для аномалий другой производной или, если известны значения аномалий двух производных, например, Z и H повышать точность вычисления функции B и Q Взаимозаменяемость находит, например, широкое применение при совместной интерпретации данных гравитационного и магнитного полей.

Функции B и Q являются всегда четными, и этот факт облегчает возможность получения различных соотношений, упрощает кривые и делает их более пригодными для определения формы, размеров и глубины залегания аномальных тел.

В то же время следует отметить, что из-за четности автокорреляционных функций и энергетических спектров аномалий в них пропадают полезные эффекты, связанные с асимметричностью кривых аномалий и косым намагничиванием магнитных масс. Это вызвано тем, что указанные функции формируются только значениями амплитудного спектра, влияние же фазового спектра в них отсутствует. Как раз этим и объясняется то, что аномалии с равными амплитудными и разными фазовыми спектрами имеют одни и те же энергетические характеристики — функции B и Q. Поэтому полезное свойство

четности их кривых в некоторых случаях является их недостатком. Но применение энергетических характеристик аномалий основано на использовании их полезных свойств. Полезные же эффекты асимметричности косого намагничивания аномалий четко отражаются на значениях взаимных энергетических спектров и взаимных корреляционных функций, и при необходимости их можно определить из значений этих функций.

**3. Интегрирование корреляционных функций знакопеременных аномалий**

Другое свойство автокорреляционных функций для случая знакопеременных аномалий заключается в следующем. Пусть f(x) — гравитационная или магнитная аномалия, автокорреляционная функция которой B(τ) имеет нуль в одной точке τ0 (вторая точка нуля находится в бесконечности). Для таких аномалий

 (1.36)

Переходя под интегралом от автокорреляционной функции к энергетическому спектру и меняя пределы интегрирования, для первого интеграла правой части получаем

 (1.37)

С другой стороны, для знакопеременных аномалий на основании теорем о спектре производных получим



где S1(ω) — спектр аномалии f(x) (например, гравитационной аномалии Vxz или Vzz ), а S(ω) — спектр исходной незнакопеременной аномалии (например, аномалии Vz), который обращается в нуль только при . При ω = 0 с учетом формула (1.2) из последнего равенства получим.

 (1.38)

или



Тогда должно выполняться равенство

, (1.39)

т.е. положительная часть площади под функцией B(τ) и осью τ должна равняться отрицательной. Поэтому из равенства (1.36) получим

 (1.40)

Это равенство определяет важное свойство автокорреляционных функций знакопеременных аномалий и позволяет заменить бесконечные пределы интегрирования модуля автокорреляционных функций конечными — только от 0 до τ0.

На основании формулы (3.37) запишем аномалии

 (1.41)

Это равенство позволяет перейти от интегрирования автокорреляционных функций к интегрированию энергетических спектров.

Для трехмерных знакопеременных по осям x и y аномалий получим равенство, аналогичное (1.40) (соответственно для произвольных и осесимметричных аномалий):

 (1.42)

 (1.43)

где ξ0 и η0 — горизонтальные координаты точек перехода автокорреляционной функции через нуль. Тогда аналогично равенству (1.40) сможем написать:

 (1.44)

 (1.45)

Аналогично формуле (1.41) в трехмерном случае соответственно для произвольных f(x, y) осесимметричных f(r) знакопеременных аномалий с учетом равенств (1.42), (1.43) мож­но получить следующие выражения:

 (1.46)

 (1.47)

Полученные соотношения имеют важное практическое применение, в частности они будут использованы в дальнейшем при определении значений радиуса корреляции знакопеременных гравитационных и магнитных аномалий.

**Расчётная часть**

Возьмём нормированную автокорреляционную функцию для случаев вертикальной производной порядка n = 0. Рассмотрим ёе поведение для бесконечной материальной горизонтальной линии, бесконечной горизонтальной полосы и для бесконечной вертикальной материальной полосы.

1. Бесконечная горизонтальная материальная линия.



Рассматриваем для значений h = 0,5; 2; 3.

График изменения автокорреляционной функции при различных h



2. Бесконечная горизонтальная полоса шириной 2l.



где b = τ/2h, a = l/h, A = b + a, c = b – a;

Примем l = 3h, тогда получим график изменения автокорреляционной функции



3. Бесконечная вертикальная материальная полоса, высотой Δh = h2 – h1.



где b = τ/h1, a + 1 = k, a + 2 = E.

Получим графики изменения функции для данных тел.



**Список литературы**

1. Серкеров С. А. Спектральный анализ гравитационных и магнитных аномалий. — М.: Недра, 2002.