Эволюция концепции доказательства

Путник, поторопись: за поворотом дороги исполнятся все твои желания!

Плакат на дороге к замку людоеда

**Общеизвестное**

Доказательство - рассуждение с целью обоснования истинности некоторого утверждения. Доказательство ассоциируется с математикой, а школьники связывают его прежде всего с геометрией.

Истинно ли доказанное утверждение? - Конечно, что за вопрос…

Арифметика без доказательств

Счет и запись результатов

Нам все, что больше трех, требуется сосчитать: предметы или звуки. Непосредственное, без тренировки, пространственное и временное распознавание числа объектов простирается не далее 4 или 5. Это врожденное свойство: "нейронное" изображение чисел от 1 до 3 в "единичной" системе счисления (вертикальными или горизонтальными черточками) совпадает практически во всех культурах, различия в изображении чисел начинаются с числа 4.

Нейронного запаса человеку оказалось мало, и он пополнил его. Сначала появился счет с применением стандартных счетных предметов: пальцев, камешков или раковин. Затем стали употреблять знаки: узелки, черточки, зарубки. Для уже привычных групп счетных знаков возникли знаки языка - числительные. Сохранился рудимент этой эпохи в китайском языке в виде различных счетных слов, обязательных при счете объектов определенной природы - круглых, плоских, войн и революций и т.п.

Римляне надели камешки (calculus - отсюда калькулятор) на стержни - получились счеты. Счеты неявно ввели позиционную систему счисления. Нуль в этой системе не требовал изображения и не мог его иметь. Для записи результатов счета потребовались средства письменности - иероглифы и буквы алфавита. В Древнем Египте иероглифами записывали числа до десяти миллионов.

Греки использовали для записи результатов астрономических вычислений смешанную систему: для целой части - собственную десятичную алфавитную непозиционную, для дробной части - 60-ричную вавилонскую позиционную. Письменные операции над такими числами были нелегким делом.

Десятичную систему с нулем изобрели в Индии (VI век); ее заимствовали арабы, а у арабов - европейцы, которые до того пользовались римскими цифрами. Арабские цифры и десятичные дроби были открыты европейцами уже после того, как они открыли Америку. Операции над цифровыми символами на бумаге стали проще, но и до сих пор трудны, а с появлением калькуляторов стали разве лишь непопулярным интеллектуальным спортом.

Кто может сегодня извлечь квадратный корень без калькулятора?

Откуда взялась 60-ричная система счисления?

Изображения чисел и средства выполнения операций над числами дают работающую языковую модель - теорию. Разумеется, шесть тысяч лет тому назад наши предки были "заняты делом", а не "теориями". Тем не менее, они создали арифметику - теорию, оказавшуюся более эффективным инструментом, нежели врожденная нейронная модель счета. Арифметика - квант надбиологической эволюции, элемент культуры.

**Формула**

Теория может работать не только прямо, она может обеспечивать и "обратный ход". Например, исследование уравнения a + x = b. Разность b - a становится решением уравнения.

Важнейшим вкладом в математическую науку и практику стала формула - точное формальное предписание, определяющее преобразование одного языкового объекта в другой.

Формулу объявляли и иногда поясняли; о доказательстве не было и речи. Для геометрических формул приводили поясняющий чертеж (иногда с надписью "Смотри!").

Формула может быть словесной, геометрической, знаковой. Типовой пример - тоже формула. Формула до сих пор господствует в школе и в жизни и для многих является вершиной абстракции.

Переход к формулам - квант эволюции. Формулы превратили проблемы в задачи, а задачи в упражнения (для знающих людей). Количество решаемых и решенных арифметических задач - объектов предыдущего уровня - стало стремительно увеличиваться, а деятельность на этом уровне стала рутинной. Социальный престиж решателей задач снизился, но зато их количество возросло. Умельцы, решавшие задачи "доформульными" средствами, быстро "вымирали". Изобретатели формул оставались в меньшинстве, но в выигрыше.

Таковы свойства любого квантового перехода.

Формула, конечно, существует не сама по себе, а только в некотором теоретическом и практическом контексте и далее вплоть до культурного контекста. Не всегда новая формула, особенно опирающаяся на новые понятия, сразу и успешно вытесняет старые подходы и навыки и их владельцев.

Бухгалтерский учет с его концепциями дебета и кредита, с проводками и с двойной записью - живучий плод изобретательности тех, кто так и не смог освоить понятие отрицательного числа (красное сальдо).

**Доказательство**

Греки перенесли способы убеждения из полисной, гражданской практики в науку. Доказательство на городской площади было для греков реальностью жизни, одним из привычных и эффективных применений интеллекта.

Фалес Милетский (611-549) продемонстрировал новое применение интеллекта: доказательство теорем. Фалес доказал, что диаметр делит круг на две равные части; что противоположные углы при пересечении двух прямых равны; что углы при основании равнобедренного треугольника равны; доказал признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам. Он же построил окружность вокруг прямоугольного треугольника, указал способ определения высоты сооружения по его тени и способ определения расстояния до недоступного предмета (корабля в море).

Зачем Фалес среди прочих доказывал очевидные утверждения? - Не для того, чтобы убедить кого-либо в их справедливости, а для того, чтобы разработать и продемонстрировать новую технологию мышления.

Изобретение доказательства - квант эволюции. Фалес открыл новый горизонт, золотую жилу. Доказательство - это способ производства формул. Количество формул - объектов предыдущего уровня - стало быстро расти, а затраты на рождение формулы уменьшились. Как всегда, вместе с новым полем деятельности возникла новая каста - каста людей, умеющих формулировать и доказывать теоремы.

В доказательствах геометрических теорем появились аксиомы. Аксиомы геометрии опираются на фундаментальные понятия порядка, движения, тождества, непрерывности. Применение аксиом предполагает использование процедур логического вывода. Логический вывод представляет собой последовательность утверждений, которые выведены из аксиом и/или из ранее выведенных утверждений. Аксиомы и только они принимаются без вывода, т.е. без доказательства.

Малограмотная формулировка: "Аксиома не требует доказательства".

Логический вывод доставил возможность получения из достоверных знаний новых достоверных знаний.

Аксиомы (первоначально) - это модели, инвариантные относительно ассоциаций (игры воображения); конструкции, имеющие опору в нейронных понятиях ниже того горизонта, который подвержен работе воображения с доступными ему конструктивами. Аксиома - не результат, а форма познания действительности, - модель, выработанная в процессе эволюции.

Возникновение концепции доказательства преобразовало всю жизнь западного человечества, дав его мыслящей части инструмент для защиты от апелляции к очевидности. Концепция доказательства была и будет барьером, отделяющим Homo profanus от Homo argumentorum. Этот барьер не могут преодолеть обе стороны. И это хорошо, иногда для обеих сторон.

Доказательство заняло место формулы на вершине эволюционного древа мыслительной деятельности. Дедуктивный метод стал укором и мечтой для гуманитариев, недаром Спиноза построил свою "Этику" по образцу "Начал" Евклида. Дух Евклида - это дух школы Платона, его теории идей.

**Греческая математика**

Греки действовали в жестких идеологических рамках: они искали в мире воплощение совершенных идей, строили мир из правильных многоугольников и многогранников, правильных отношений музыкальной гаммы, закономерностей чисел. Пифагорейская мистика совершенных чисел и фигур оказала и оказывает мощное влияние на науку. Пифагореизм настолько пронизывает нашу (западную) культуру в целом, что мы его не замечаем и не знаем, что "говорим прозой" по Пифагору.

Греки полагали, что утверждения математики абсолютно точны и достоверны, тогда как данные опытного знания приблизительны, обманчивы и недостоверны: даже равенство двух отрезков может быть доказано не измерением, а рассуждением. "Приближенными вычислениями стыдно заниматься свободному человеку, они - удел раба".

"При помощи математики очищается и получает новую жизненную силу орган души, в то время как другие занятия уничтожают его и лишают способности видеть, тогда как он значительно более ценен, чем тысяча глаз, ибо только им одним может быть обнаружена истина". Платон

Греки использовали в доказательствах только геометрически наглядные средства, а не буквенные символы. Поразительно, что в рамках столь трудной геометрической алгебры им удалось получить так много результатов. В Новое время Ньютон следовал греческой традиции, а Лейбниц - нет.

**Математический язык**

Величины в геометрии отличали от чисел в арифметике: величины именовали длинами, квадратами и кубами и использовали как именованные. Алгебраическая буквенная символика возникла в арифметической алгебре из стандартных (и сокращенных) словесных обозначений. Языки геометрии и арифметической алгебры существовали параллельно.

Декарт (1596 - 1650) построил над языками геометрической и арифметической алгебры новый язык - алгебраический. Синтаксис нового языка похож на синтаксис языка арифметической алгебры, семантика - на семантику языка геометрической алгебры.

Декарт превратил процесс в объект: отношение величин (процесс) стало рациональным или иррациональным числом (объектом). Тем самым Декарт совершил квантовый эволюционный переход к абстрактному понятию числа, переход, оказавшийся не под силу грекам. Введенное Декартом понятие числа было языковым конструктом, а не пространственным образом. Декарт принципиально изменил содержание доказательства: отныне геометрическим образам осталась роль иллюстраций, они перестали быть средствами доказательства.

Буквенная символика открыла вход в математику поверх барьеров геометрической алгебры и словесных обозначений. Книгопечатание окончательно сделало математику доступной всей массе образованных людей. Стали обычным делом публичные состязания в доказательствах.

Через полвека благодаря Декарту Лейбниц и Ньютон совершили следующий квантовый переход.

**Математическое доказательство в Новое время**

Ньютон вывел законы Кеплера из закона всемирного тяготения и трех законов движения. Математическое доказательство привело к открытию закона природы. Ньютон пользовался геометрическим языком, и обозначения его "Начал" не повлияли на математическую технологию. Предложенные Лейбницем эффективные обозначения открыли поле деятельности, на котором за триста лет было доказано невероятное количество теорем в созданных на основе новых понятий производной и интеграла многочисленных новых отраслях математики.

Ни отцы-основатели, ни их последователи не могли обосновать свои результаты, оправдывали их только приносимой ими удачей. Вакханалия использования нечетких понятий и методов приводила к неверным результатам, спорам и сомнениям. Выдающимся источником неприятностей была теория пределов с ее свободным обращением с бесконечностью. Блестяще выразился о новой математике Вольтер: "Искусство считать и точно измерять то, существование чего непостижимо для разума". Все попытки выйти из положения, даже предпринятые Эйлером и Лагранжем, потерпели полную неудачу. Внутренняя дисциплина в математике к середине XIX века упала настолько, что Кэли, приведя формулировку теоремы для квадратных матриц и проверив ее для матриц 2х2, не счел "необходимым обременять себя формальным доказательством теоремы в общем случае матрицы любого порядка" и призвал просто поверить ему.

Трудности коренились в том, что новые понятия находились на более высоком уровне абстракции. Грекам было легче, их понятия были ближе к (презираемому!) опыту, а те понятия, которые доставили столько волнений в Новое время, хитроумные греки обходили. Новые понятия были уже не обобщением опыта, а созданием разума, лишенным привычной опоры в наглядности. Язык формул обладал не только притягательной, но и производительной силой.

Героическая эпоха! Не до строгости, когда друзья и недруги рвутся вперед.

Только к концу XIX века в математическом анализе и в алгебре был наведен формальный логический порядок, иными словами, положение было исправлено настолько, что стала возможной дальнейшая критика.

**Аксиоматический метод**

Формализация математики привела к уточнению определений и аксиом, к логической инвентаризации орудий математического мастерства. Одной из задач в наведении порядка была задача минимизации списка аксиом, исключения из него тех утверждений, которые могли быть выведены из остальных как теоремы.

Попытка этим путем исключить из аксиом геометрии Евклида аксиому о параллельных не удалась. Тогда попытались доказать, что замена этой аксиомы ее отрицанием приведет к тому, что в такой "неевклидовой" геометрии будут получены противоречия, что и "докажет" аксиому Евклида. Противоречия получить не удалось, более того, семейство неевклидовых геометрий стало пополняться. Неевклидовы геометрии противоречили только обыденной интуиции и привычным наглядным представлениям, но были логически безупречны. Попутно выяснилось, наконец, что аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом Евклида.

Гильберт предложил ставший общепринятым вариант аксиоматического построения евклидовой, а заодно и всех остальных геометрий. Этот успех еще раз напомнил о проблеме истинности теории в целом: если существуют разные геометрии и они непротиворечивы, то какая же из них "истинна"? Какая из них имеет место в реальной действительности и как это доказать? И что значит "истинная геометрия"? "Что есть истина?"

Уверенность в том, что математика содержит только абсолютные истины, абсолютно доказанные на основе абсолютных аксиом, была подорвана навсегда. В обстановке замешательства, вызванного появлением неевклидовых геометрий, концепции доказательства удалось остаться вне подозрений.

**Новые проблемы**

Теория бесконечных множеств к началу ХХ века стала источником беспокойства: в ней обнаружились трудности и противоречия. На этот раз под ударом оказались не изъяны в определениях и доказательствах, а логика доказательств. Как следует понимать утверждение о существовании какого-либо математического объекта? В конструктивных доказательствах существования приводится процесс построения объекта, но есть утверждения "должен существовать", "ложно, что не существует", - как с ними быть?

Можно ли применять логику доказательств, выработанную на конечных объектах, к бесконечным?

Относительно аксиоматической теории остались нерешенными вопросы:

можно ли доказать некоторое утверждение А и доказать его отрицание?

и как доказать, что этого не случится, то есть как доказать, что теория непротиворечива?

всякое ли истинное утверждение можно вывести из аксиом?

и как доказать, что это всегда возможно, то есть что теория полна?

можно ли в рамках аксиоматической теории считать доказанное истинным?

В ходе исследований оснований математики в рамках математической логики возник раздел, изучающий формализованные математические теории. Произошел еще один квантовый переход: появилась метаматематика. Этот термин синонимичен термину "теория доказательств". Логика и математика стали предметом изучения для метаматематики.

**Линия Евклид - Лейбниц - Гильберт - Гедель**

Современный формализованный (мета)математический язык оформлен в "Principia Mathematica" Расселом и Уайтхедом уже в начале XX века. Они уточнили понятие доказательства как вывода в некотором исчислении, однако предложенный подход к проблеме непротиворечивости не удовлетворил даже авторов.

Гильберт (1862-1943) выдвинул грандиозную программу аксиоматизации математики и физики и приступил к ее реализации. Гильберт полагал, что любое точно сформулированное утверждение можно доказать или опровергнуть средствами аксиоматической теории при условии, что теория непротиворечива. Иными словами, Гильберт сформулировал тезис полноты аксиоматической теории. Что касается непротиворечивости, то эту проблему тоже, казалось, можно будет решить. Линия Евклид - Лейбниц - Гильберт обещала триумфальный успех:

аксиомы дадут коллективное определение употребляемым в их формулировках неопределяемым понятиям;

системы объектов, удовлетворяющие одной и той же системе аксиом (интерпретации), изоморфны, так что теорема, доказанная в одной интерпретации, будет автоматически справедлива для другой.

"С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо можно именовать теорией доказательства, я преследую важную цель: именно, я хотел бы окончательно разделаться с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание в поддающуюся конкретному показу и строго выводимую формулу и тем самым приведя образование понятий и выводы, которыми пользуется математика, к такому изложению, при котором они были бы неопровержимы и все же давали бы картину всей науки".

**Давид Гильберт**

Гильберт доказал, что евклидова геометрия непротиворечива, если непротиворечива система вещественных чисел. Осталось совсем немного: доказать непротиворечивость арифметики.

**Теорема Геделя**

Курт Гедель (1906 - 1978) в 1931 году в работе "О формально неразрешимых проблемах "Principia Mathematica" и родственных систем" доказал теорему о том, что любая непротиворечивая аксиоматическая система, включающая аксиомы арифметики натуральных чисел, обладает свойством неполноты: для нее можно указать конкретное утверждение А, для которого в этой системе нельзя доказать ни А, ни его отрицание. Это утверждение находится за пределами системы! И для неполноты любой математической теории достаточно включения в нее простейшего объекта математики - натурального числа.

Гедель доказал полноту исчисления предикатов первой ступени.

В другой теореме Гедель доказывает, что в качестве А можно взять утверждение о непротиворечивости арифметики. Непротиворечивость теории не может быть доказана средствами самой теории.

Теоремы инженера Геделя развеяли мечты математика Гильберта.

"Роль пресловутых "оснований" сравнима с той функцией, которую в физических теориях выполняют поясняющие что-либо гипотезы… Так называемые логические или теоретико-множественные основания теории чисел или любой другой вполне сформировавшейся математической теории по существу объясняют, а не обосновывают их, так же, как в физике, где истинное предназначение аксиом состоит в объяснении явлений, описываемых физическими теоремами, а не в обосновании этих теорем."

**Эпистемологические следствия**

Одна непротиворечивая теория не может полностью описать реальность; всегда остаются факты или аспекты, которые требуют обращения к другой теории, возможно, несовместимой с первой. Концепция "истинность совпадает с доказательностью" потерпела крах.

"Автоматизация" знания невозможна. Нельзя обойтись без человеческого разума и интуиции, обречена на неудачу. Логика неотделима от человека.

Непротиворечивость математики не может быть доказана.

Математика стала экспериментальной наукой.

**Конструктивизм**

Пауки, обитавшие в замке, затянули подвал паутиной. Когда однажды ветер

сорвал ее, они бросились ее восстанавливать: ведь замок держится на паутине!

В рамках метаматематики имеются различные течения. Одним из них является конструктивная математика, работающая с конструктивными объектами и конструктивными процессами и отвергающая в этих построениях закон исключенного третьего из-за его неконструктивности.

Конструктивный анализ существенно отличается от классического анализа, составляющего содержание курса высшей математики. Многие теоремы классического анализа не входят в конструктивный анализ. Особое внимание конструктивизм уделяет изучению алгоритмически неразрешимых проблем.

**Нашествие теорий**

Теорема Геделя предоставила возможность построения бесконечного дерева теорий за счет пополнения списков аксиом невыводимыми истинными утверждениями.

Теорема Левенгейма - Сколема обнаружила, что для порождения неэквивалентных теорий не требуется расширения списка аксиом: существуют неизоморфные интерпретации одной и той же системы аксиом, в том числе аксиом арифметики.

Если в XIX веке мы столкнулись с несколькими геометриями, то в ХХ веке мы оказались уже перед несколькими математиками.

**Доказательство сегодня**

Теорема о возможности раскраски вершин плоского графа четырьмя красками доказана в 1977 году программой, исчислявшей доказательство в течение многих сотен часов. Позднейшие программы на новейших компьютерах "доказывают" быстрее.

**Проблема понимания**

Формализованный язык в отличие от обыденного языка выполняет не коммуникативную, а модельную функцию. Именно поэтому обречены на неуспех любые попытки "понять" текст на формализованном научном языке путем "перевода" на обыденный - конкретный - язык. Источником таких неудач является не "переводимый" текст, а невежество "переводчика".

Языковая модель становится частью мира человека и тем самым - объектом изучения, изучения с помощью нового языка, выступающего по отношению к изучаемому языку как метаязык. Так возникает лестница языков, иерархическая система формализованных языков.

Лейбниц всю жизнь разрабатывал универсальную характеристику - исчисление, которое позволило бы точно выразить любую ясную мысль и заменить спор об истинности утверждения вычислением функции истинности, свести логику к вычислению.

**Резюме**

В атмосфере культа силы и насилия древние греки изобрели Олимпийские игры, логику, риторику, философию. Греки оставили нам:

самую лицемерную форму политического насилия - демократию,

самые изощренные формы эмоционального насилия - поэзию, музыку и театр,

высшую форму интеллектуального насилия - математику.

Современное образование - во власти аксиоматической диктатуры Евклида и компьютерного шаманизма. Математика - самое эффективное оружие массового поражения интеллекта и дедуктивного террора. По иронии судьбы на древе познания именно на математической ветви созрело ядовитое геделево яблоко неполноты. Греки сделали свое дело, а мы не можем уйти.

Крушение человеческого стремления достичь всеобъемлющего совершенства в доказательстве - одно из многих крушений человеческих надежд. Достаточно напомнить о надеждах на справедливость, равноправие, на гармонию личности и общества, человека и природы.