## Финансовые ренты. Коэффициенты наращения финансовой ренты

Финансовые операции часто носят продолжительный характер и состоят не из разового платежа, а из их последовательности, т.е. из потока платежей.

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют финансовой рентой или аннуитетом [5, с.46].

Основные правила процентных вычислений, рассмотренные нами ранее, остаются неизменными и для совокупности платежей, однако возникает необходимость ввести несколько дополнительных понятий. В финансовом анализе для обозначения денежных потоков в наиболее общем смысле используется термин рента.

Частным случаем ренты является финансовая рента или аннуитет - такой поток платежей, все члены которого равны друг другу, так же как и интервалы времени между ними.

Часто аннуитетом называют финансовый актив, приносящий фиксированный доход ежегодно в течение ряда лет [7, с.28].

В буквальном переводе "аннуитет" подразумевает, что платежи происходят с интервалом в один год, однако встречаются потоки с иной периодичностью выплат.

Очевидно, что рента - это более широкое понятие, чем аннуитет, так как существует множество денежных потоков, члены которых не равны друг другу или распределены неравномерно [7, с.28].

Форму аннуитетов имеют многие финансовые потоки, например выплата доходов по облигациям или платежи по кредиту, страховые взносы. Можно сказать, что финансы тяготеют к упорядочению денежных потоков.

Принцип временной ценности денег делает невозможным прямое суммирование членов ренты. Для учета влияния фактора времени к каждому члену ренты применяются рассмотренные выше правила наращения и дисконтирования только сложных процентов, то есть предполагается, что получатель потока имеет возможность реинвестировать получаемые им суммы.

Если бы размеры рент всегда ограничивались двумя-тремя членами, то необходимость создания специальных способов расчета денежных потоков, возможно, и не возникла.

Ни в теории, ни на практике таких ограничений нет, наоборот, существуют большие, очень большие и даже бесконечные денежные потоки (вечные ренты), поэтому были разработаны специальные методы, позволяющие анализировать ренту не по каждому ее члену в отдельности, а как единую совокупность - рассчитывать ее будущую и приведенную величины, а также определять размеры других важных параметров ренты.

Финансовая рента имеет следующие параметры:

член ренты - величина каждого отдельного платежа;

период ренты - временной интервал между двумя соседними платежами, срок ренты - время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

процентная ставка - ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту, число платежей в году, число начислений процентов в году, моменты платежа внутри периода ренты [3, с.62].

Классификация рент может быть произведена по различным признаками.

В зависимости от продолжительности периода, ренты делят на годовые и p-срочные, где p - число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением один в году, m раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей [5, с.47].

По величине членов различают постоянные (с равными членами) и переменные ренты.

Если размеры платежей изменяются по какому - либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают ренты верные и условные.

Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов или ограниченные и бесконечные или вечные. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на немедленные и отложенные или отсроченные. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей.

Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются обычными или постнумерандо. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются пренумерандо. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

Рассмотрим расчет современной стоимости и наращенной суммы постоянной обычной (постнумерандо) *p -* срочной ренты [4, с.84].

Ежегодно сумма *R* вносится равными долями *p* раз в году на банковский счет в течение *n* лет. Тогда имеем поток из *np* платежей величиной каждый в моменты .



Примем за единицу измерения времени 1 год.

Пусть *i* - годовая эффективная процентная ставка начисления сложных процентов на поступающие платежи.

Согласно определению современной стоимости потока платежей, получаем

(1)



Вычисляя сумму *np* членов геометрической прогрессии, знаменатель которой , получим:



(2)



современная стоимость постоянной обычной *p -* срочной ренты при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году в течение *n* лет.

Отсюда современная стоимость годовой обычной ренты (*p =* 1) при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году:

. (3)



Используя соотношения эквивалентности для эффективной процентной ставки

и ,



получим современную стоимость обычной *p -* срочной ренты при начислении на члены ренты сложных процентов *m* раз в году по номинальной процентной ставке *i* (*m*) и непрерывном начислении процентов при постоянной интенсивности процентов δ в год:

(4)



. (5)



Формулы для наращенной суммы ренты можно получить непосредственно по определению согласно формуле (3).

Например, для постоянной обычной *p -* срочной ренты при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году в течение *n* лет получаем:

. (6)



Наращенную сумму ренты можно рассчитать, используя формулу связи современной стоимости и наращенной суммы потока платежей.

Например, для годовой ренты при начислении процентов 1 раз в год:

*S* = *A F* (*T)* = *A* (1 + *i*) *n* = (7)



Для других видов обычной ренты из (4) и (5), используя множители наращения и соответственно, получим:



(8)



(9)



В частности, при *m* = *p* (период начисления процентов равен периоду ренты) из (4) и (8) получаем

(10)



(11)



Если единицей измерения времени является 1 год, а *R* - это выплата за год (единицу времени), то множитель в формулах современной стоимости ренты, равный , называется коэффициентом дисконтирования ренты.



Множитель в формулах наращенной суммы ренты, равный , называется коэффициентом наращения ренты.



Из (1) - (11) можно получить коэффициенты наращения и дисконтирования всех рассмотренных видов обычной ренты.

Согласно (1) и (5), коэффициенты дисконтирования и наращения обычной *p -* срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году в течение *n* лет равны соответственно:

(12)



(13)



и - это соответственно современная стоимость и наращенная сумма постоянной обычной *p -* срочной ренты с ежегодной выплатой 1 д. е. равными долями *p* раз в году в размере в моменты времени с начислением на члены ренты процентов 1 раз в году.



Следовательно, и связаны соотношением (14):



= (1 + *i*) *n* (14)



Аналогичный смысл имеют коэффициенты дисконтирования и наращения других рассмотренных видов обычной ренты.

Для этих рент имеем соотношения:

- годовая рента с начислением процентов 1 раз в год;



- *p -* срочная рента с начислением процентов *m* раз в год;



- *p -* срочная рента с непрерывным начислением процентов.



Коэффициенты дисконтирования и наращения годовой ренты при начислении процентов 1 раз в год:

и (15)



Если применяется *p -* срочная рента с начислением процентов *p* раз в год (*m = p*) по годовой номинальной ставке *i* (*p*), то за единицу измерения времени можно принять часть года. Тогда - выплата за единицу времени (постнумерандо), - процентная ставка за 1 единицу времени,



срок ренты - *np* единиц времени.

Коэффициенты дисконтирования и наращения такой ренты равны соответственно

и .



Из формул (10), (11) имеем

, (16),



что позволяет для этой ренты использовать те же таблицы коэффициентов. Заметим, что если единицей измерения времени является 1 год, то коэффициенты дисконтирования и наращения этой ренты определяются как = и = и рассчитываются по формулам, полученным из (10), (11):



, (17). Тогда



= и = (18)



Рассмотрим ренту пренумерандо.

Связь между коэффициентами дисконтирования и наращения рент пренумерандо и постнумерандо следует из их определения. Срок дисконтирования каждого платежа ренты пренумерандо уменьшается, а срок наращения увеличивается на один период ренты по сравнению с обычной рентой. По - прежнему единицей измерения времени считаем 1 год. Если и - коэффициенты дисконтирования и наращения *p -* срочной ренты пренумерандо (платежи поступают в начале каждого периода длиной ) при начислении на члены ренты процентов 1 раз в год, то справедливы соотношения:



=



=



= (1 + *i*) *n* .



Отсюда при *p =* 1 получаем соотношения для годовых рент:

=



=



= (1 + *i*) *n* .



При непрерывном начислении процентов для *p -* срочной ренты имеем соотношения:

=



.



Рассмотрим непрерывную ренту.

Коэффициенты дисконтирования и наращения постоянной непрерывной ренты можно получить из формул для *p -* срочной ренты при или по определению для непрерывного равномерно выплачиваемого потока платежей с постоянной годовой интенсивностью *f* (*t*) = 1*.*



Например, для постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов по постоянной силе роста получаем:



,



где - коэффициент дисконтирования обычной *p -* срочной ренты при непрерывном начислении процентов.



Заметим, что так как

,



где - коэффициент дисконтирования *p -* срочной ренты пренумерандо при непрерывном начислении процентов, то



.



Действительно, при непрерывно поступающих платежах различие между рентами пренумерандо и постнумерандо исчезает.

Коэффициент дисконтирования постоянной непрерывной ренты при начислении процентов 1 раз в год получим по определению:

.



Коэффициенты наращения непрерывных рент можно найти из равенств вида:

= ,



= .



Соотношения между коэффициентами дисконтирования рассмотренных трех видов рент - обычной, пренумерандо и непрерывной - можно установить из следующих соображений.

Так как

,



где *i* (*p*) - эквивалентная годовая номинальная процентная ставка, то

.



С другой стороны,

.



Следовательно

, (19)



где , - коэффициенты дисконтирования обычной годовой ренты с начислением процентов 1 раз в год и постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов.



Равенства (19) можно продолжить для ренты пренумерандо, если учесть соотношения коэффициентов дисконтирования обеих рент:

и .



Тогда

= = . (20)



где - эквивалентная учетная ставка.



Из (19), (20) получаем

, (21)



где - эквивалентная номинальная учетная ставка.



Каждое выражение в этом равенстве - современная стоимость процентов, выплачиваемых по займу 1 д. е. на протяжении *n* лет в соответствии с различными способами выплаты процентов.

Аналогичные соотношения можно получить и для коэффициентов наращения рент.

Если полагают, что срок ренты *n* = ∞, то ренту называют вечной. Наращенная сумма вечной ренты бесконечна. Однако современную величину такой ренты можно найти.

Для обычной вечной *p -* срочной ренты с начислением процентов 1 раз в год получаем при *n* → ∞:

.



Для такой же ренты пренумерандо:

.



Кроме того, .



Таким образом, , , . (21)



Если вечная рента является годовой (*p =* 1), то имеем:

, , . (22)



Если начало ренты, т.е. начало ее первого периода, переносится в будущее на *t* единиц времени относительно текущего момента *t* = 0, то такую ренту называют отсроченной. Современная стоимость отсроченной ренты *At* определяется следующим образом. Согласно определению современной стоимости потока платежей,

,



где , , - дисконтные множители *k* - го платежа на временных отрезках [0, *tk*], [*t*, *tk*], [0, *t*] соответственно. Так как , то *A* - стоимость ренты, рассчитанная на момент начала ее первого периода, т.е. на момент начала неотсроченной ренты.



Следовательно, *A* - это современная стоимость неотсроченной ренты.

Таким образом, современная стоимость отсроченной ренты определяется путем дисконтирования по процентной ставке ренты в течение времени *t* современной стоимости *A* неотсроченной ренты:

, (23)



Рассмотрим зависимость коэффициентов наращения ренты от срока ренты и процентной ставки.

Поскольку характер зависимости не должен зависеть от числа платежей в году, рассмотрим годовую обычную ренту с начислением процентов 1 раз в год.

Имеем , .



Ситуацию можно рассматривать как беспроцентный долг, выданный в сумме *n* и возвращаемый равными долями в течение *n* лет.

Установим зависимость от *i* коэффициента наращения ренты .



.



Очевидно, - возрастающая функция *i*, что следует из свойств наращенной суммы разового платежа. Действительно, так как и , то - возрастающая выпуклая функция аргумента *i (*рис.1).



Рис.1.

sn,i

*n*

0

*i*

3) Установим зависимость от *i* коэффициента дисконтирования ренты .



.



Очевидно, - убывающая функция *i*, что следует из свойств современной стоимости разового платежа. Действительно, так как и , то - убывающая выпуклая функция аргумента *i (*рис.2).



an,i

*n*

0

*i*

Рис. 2

Установим зависимость от *n* коэффициента наращения ренты .



, где .



Так как и , то - возрастающая выпуклая функция аргумента *n (*рис.3).



sn,i

0

*n*

Рис. 3

Установим зависимость от *n* коэффициента дисконтирования ренты .



,



где .



Так как и (вечная рента), то - возрастающая вогнутая функция аргумента *n (*рис.4).



*an,i*

1/*i*

0

*n*

Рис.4

Эти свойства используются в задачах на определение параметров ренты.

Задача.

*Раскрой материала.*

На раскрой (распил) поступает материал нескольких видов в определенном количестве. Из этого материала необходимо изготовить различные изделия. Материал может быть раскроен разными способами. Каждый способ имеет свою себестоимость и позволяет получить разное количество изделий каждого вида. Определить способ раскроя, при котором суммарная себестоимость минимальна (построить математическую модель в общем виде).

Решение:

Пусть поступает в раскрой m различных материалов.

Требуется изготовить из них k разных комплектующих изделий (комплектов) в количествах, пропорциональных величинам b1, b2,., bk (условия комплектности).

Пусть каждую единицу j-го материала j=1,., m можно раскроить n различными способами, так что при использовании i-го способа раскроя, i=1,., n получим аij единиц k-го изделия.

Нужно определить такой план раскроя материалов, обеспечивающий максимальное количество комплектов, если имеющийся запас j-го материала составляет аj единиц.

Обозначим через xij количество единиц j-го материала, раскраиваемых i-м способом, а через x-общее количество изготавливаемых комплектов.

Математическая модель этой задачи имеет такой вид:

максимизировать x (1)

при условиях



Условие 2 означает ограничение на запас j-го материала, а условие 3 - условие комплектности.

## Список используемой литературы

1. Багриновский К. Матюшок В. Экономико-математические метода и модели: Учебник / К. Багриновский, В. Матюшок. - М.: Экономистъ, 1999. - 185с.
2. Бочаров П.П., Касимов Ю.Ф. Финансовая математика: Учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. - М.: Гардарики, 2002. - 624с.
3. Кузнецов Б.Т. Финансовая математика: Учебное пособие / Б.Т. Кузнецов. - М.: Экзамен, 2005. - 128с.
4. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики: Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. - М.: Дело, 1998. - 304с.
5. Лукашин Ю.П. Финансовая математика: Учебное пособие / Ю.П. Лукашин. - М.: МФПА, 2004. - 81с.
6. Малыхин В.И. Финансовая математика / В.И. Малыхин. - М.: Юнити - Дана, 2003. - 237с.
7. Меньшиков С. Рентабельность и рента / С. Меньшиков // Экономическое стратегии. - 2004. - №1. - с.28-31.
8. Четыркин Е.М. Финансовая математика / Е.М. Четыркин. - 4-е изд. - М.: Дело, 2004. - 400с.