# 1. Физическое описание явления фильтрации жидкости

# 1.1. Закон фильтрации однородной жидкости

Фильтрация представляет собой движение жидкости в пористой среде под действием перепада давления. Основной характеристикой фильтрационного движения является вектор скорости фильтрации *u* определяемый следующим образом. Выберем точку *М* пористой среды и проведем через нее элементарную площадку *S*. Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости *Q*. Тогда проекция вектора *u* на нормаль к выделенной площадке равна *lim Δ Q/( S),* где *p* – плотность жидкости. Подчеркнем, что масса жидкости делится на полную площадь *S*, а не на ее часть, занятую порами.

Основное соотношение теории фильтрации - закон фильтрации - устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное движение. Некоторые сведения о законе фильтрации можно получить, исходя из самых общих представлений.

Окружим точку пористой среды некоторой малой окрестностью; поле скоростей фильтрации в этой окрестности можно считать непрерывным, а все параметры пористой среды и насыщающей ее жидкости - постоянным. Нельзя пренебречь лишь изменением давления, как бы мало оно не было, поскольку при постоянном по пространству давлении движение полностью отсутствует (по существу это утверждение является основной гипотезой). Поскольку изменение давления в окрестности данной точки определяется градиентом давления, основное предположение при установлении вида закона фильтрации состоит в том, что *вектор скорости фильтрации в данной точке пористой среды определяется свойствами жидкости и пористой среды и градиентом давления grad p*. Пористая среда характеризуется геометрическими параметрами - характерным размером *d* и некоторыми безразмерными характеристиками: пористостью *m*, безразмерными параметрами кривой распределения и др. Закон фильтрации должен являться следствием уравнений количества движения жидкости в поровом пространстве, поэтому в систему определяющих величин следует включить также те характеристики жидкости, которые входят в эти уравнения, т.е. плотность *p* и вязкостьμ. Таким образом, предполагается, что существует зависимость градиента давления *grad p* от вектора скорости фильтрации *u*, геометрических характеристик пористой среды *m, d* и т.д. и характеристик жидкости ρ и μ. Среди величин, от которых зависит *grad p*, только скорость фильтрации *u* является вектором. В силу изотропии среды (т.е. независимости ее свойств от вращений и отражений системы отсчета) зависимость *grad p* от *u* должна быть инвариантной относительно вращения вокруг направления вектора *u*.

Поэтому вектор *grad p* должен быть направлен по одной прямой с вектором *u*. В самом деле, предположим обратное, т.е. пусть вектор *grad p* составляет некоторый угол с направлением вектора *u*. Если повернуть выбранную произвольную систему координат относительно направления вектора *u* на некоторый угол, то ни вектор *u* , ни какой-либо другой из определяющих параметров не изменится. Следовательно, не должен измениться и вектор *grad p*, зависящий только от этих параметров. Но если *grad p* составляет некоторый угол с направлением вектора *u*, то при повороте его направление относительно координатных осей обязательно изменится. Отсюда вытекает, что вектор *grad p* может обращен только по направлению вектора *u*, так что

*grad p= - си*, (1)

где *с* - некоторая скалярная величина, зависящая от модуля вектора скорости *u*, а также величин *d, m, p, μ.*

Рассмотрим сначала такие фильтрационные движения, для которых несущественны силы инерции. К числу подобных безынерционных движений принадлежит, в силу их крайней медленности, большинство фильтрационных движений, встречающихся на практике. При этом плотность *р*, характеризующая инерционные свойства жидкости, несущественна и исключается из числа определяющих параметров. Таким образом, при безынерционных движениях величина c зависит только от u, d, m и μ. Выпишем размерности интересующих нас величин:



(2)

Из пяти величин (2) можно выбрать три с независимыми размерностями (например, u, m, и d). Тогда, согласно π - теореме, анализа размерностей искомая зависимость будет связывать две безразмерные комбинации указанных величин. В качестве одной из безразмерных величин удобно взять пористость m, в качестве другой выберем cd2/μ. Таким образом, имеем

cd2/μ= f (m), c=μd-2f(m). (3)

После этого уравнение (1) может быть представлено в виде:



(4)

Это соотношение называется законом фильтрации Дарси (по имени французского ученого, установившего его экспериментально в 1856г.). Величина k=d2/f(m), вводимая уравнением (4), носит название проницаемости. Проницаемость имеет разномерность площади; она не зависит от свойств жидкости и является чисто геометрической характеристикой пористой среды.

В физической системе единиц проницаемость измеряется в см2. Однако проницаемость большинства горных пород выражается при этом весьма малыми числами. Так, проницаемость крупнозернистых песчаников составляет 10-8-10-9см2; проницаемость плотных песчаников - около 10-10 см2. Ввиду этого в нефтепромысловой практике получила распространение единица проницаемости 1Д (дарси)= 1,02⋅ 10-8 см2.

В практике гидротехнических расчетов вместо давления обычно используется напор H = p/ρg, и закон Дарси записывается в виде:

(5)



Величина C, имеющая размерность скорости, называется коэффициентом фильтрации.

Функция *f* в выражении (3) зависит не только от пористости, но и от других безразмерных характеристик геометрии порового пространства. Были сделаны многочисленные попытки представить в качестве функции пористости и характерного размера для типичных пористых сред как путем рассмотрения простейших моделей, так и путем обработки опытных данных. Все полученные результаты носят частный характер и имеют узкую область применимости. Наибольшей известностью из формул этого рода пользуется уравнение Козени - Кармана, полученное на основе аналогии между пористой средой и системой параллельных трубок, выражающее проницаемость через удельную поверхность ∑ и пористость m:



(6)

Постоянная К определяется из опыта и оказывается разной для пористых сред различной структуры. Формула (6) используется главным образом при расчетах фильтрационных сопротивлений искусственных пористых сред, применяемых в химических аппаратах; ею пользуются также при определении удельной поверхности порошков.

Закон Дарси является следствием предположения о безинерционности движения жидкости. Фильтрационное течение, следующее закону Дарси, является частным случаем ползущего течения (широко известным примером ползущего течения является стоксовское обтекание сферы). Течения такого типа характеризуются преобладанием вязких сил над инерционными, т. е. очень малыми числами Рейнольдса (Re << 1). Поэтому представляются нецелесообразными многочисленные попытки получить закон Дарси путем осреднения уравнений Навье - Стокса. Ясно, что любой такой вывод будет сводиться в конечном счете к попытке вычислить проницаемость по известной геометрической структуре пористой среды.

Закон Дарси имеет весьма широкую область приложения и на его основе получены основные результаты теории фильтрации. Существуют, однако, случаи, когда линейный закон фильтрации Дарси не применим. Эти случаи, необходимые обобщения закона Дарси и возникающие при этом нелинейные задачи теории фильтрации будут рассмотрены ниже. Пока же будем считать все рассматриваемые движения подчиняющимися закону Дарси.

До сих пор предполагалось, что пористая среда изотропна. Если пористая среда не является изотропной, то из общих соображений можно утверждать, что в произвольной ортогональной декартовой системе координат х1, х2, х3 компоненты вектора grad p выражаются через компоненты ui вектора  следующим образом:

(7)

где cij - некоторый тензор. В случае безинерционных движений компоненты тензора cij могут зависеть только от вязкости жидкости μ, тех или иных геометрических характеристик пористой среды и модуля вектора скорости фильтрации .

Аналогично выводу формулы (7) можно показать, что cij=μrij, где тензор rij зависит только от геометрических характеристик пористой среды и вызывает тензором удельных фильтрационных сопротивлений; компоненты тензора rij имеют размерность обратной площади. Выражая, наоборот, компоненты вектора скорости через компоненты вектора градиента давления, получаем





(8)

где тензор kij является обратным тензору rij, также зависит от геометрических характеристик пористой среды, имеет размерность площади называется тензором проницаемости. Эта зависимость представляет собой закон Дарси для анизотропной пористой среды.

Покажем теперь, что тензор сопротивлений rij и тензор kij являются симметричными, т.е. rij = rij, kij = kij. В самом деле, на пористую среду со стороны фильтрующейся жидкости действует объемная сила, пропорциональная градиенту давления; безразмерный множитель пропорциональности зависит только от геометрических характеристик пористой среды. Удельная работа этой силы, т.е. работа за единицу времени на единицу объема системы жидкость - пористая среда, равная удельной диссипации энергии жидкостью в пористой среде, равна скалярному произведению



(9)

Очевидно, что удельная работа сил взаимодействия жидкости с пористой средой не должна зависеть от выбора осей координат х1, х2, х3. Но для того чтобы квадратичная форма *r*βα  , пропорциональная этой удельной работе, не зависела от выбора системы координат, необходимо и достаточно, чтобы *r*αβ = *r*βα Аналогично можно показать, что *k*αβ = *k*βα

В приложениях особую роль играет анизотропия естественных пористых сред, связанная с осадконакоплением. В этом случае проницаемости вдоль слоев имеют одно значение, а в перпендикулярном направлении - другое, обычно значительно меньшее. Поэтому одна из главных осей тензора проницаемости - х3 перпендикулярна плоскости напластования, а две другие - х1 и х2 можно выбрать произвольно в плоскости напластования. Система х1, х2, х3 будет главной системой в каждой точке пористой среды; в этой системе имеем

k11=k22=k; k33=k0; k12=k21=k32=k23=k31= k 13=0. (10)

Закон Дарси в выбранной системе координат записывается в силу соотношений (10) следующим образом:



(11)

**1.2. Зависимость параметров жидкости и пористой среды**

**от давления**

Поскольку движение жидкости в пористой среде вызывается перепадом давления, окончательная формулировка большинства задач теории фильтрации заключается в составлении дифференциальных уравнений для распределения давления и в установлении соответствующих начальных и граничных условий. Как при составлении этих уравнений, так и при решении их необходимо знать, как зависят от давления характеристики пористой среды и насыщающей ее жидкости.

1. Рассмотрим прежде всего влияние давления на свойства жидкости - плотность ρ и вязкость μ.

Для капельных жидкостей - воды и нефти - изменения плотности обычно невелики. Встречающиеся в фильтрационных движениях перепады давления (десятки кгс/см2) весьма малы по сравнению с модулями объемного сжатия Кρ капельных жидкостей (5⋅103- 2⋅104 кгс/см2). Поэтому для приложений достаточно ограничиться линейной зависимостью



(12)

Следует, однако, иметь в виду, что хотя сжимаемость капельных жидкостей и мала, она играет значительную роль в тех случаях, когда возмущения давления захватывают обширные области (здесь существенно то, что нефтяные залежи обычно граничат с пластовой водой, суммарный объем которой значительно больше объема нефти в залежи; в результате этого расширение воды при снижении давления может полностью компенсировать извлекаемый объем нефти). Зависимостью вязкости капельных жидкостей от давления при изменении давления в тех же пределах можно обычно пренебречь.

Фильтрационные движения газа характеризуются тем, что при их исследовании, с одной стороны, почти всегда можно пренебречь изменениями температуры, считая их малыми, а с другой, - тем, что ввиду больших абсолютных значений давления и перепадов считать газ идеальным можно лишь с большой натяжкой. Уравнение состояния газа обычно записывают в виде:



(13)

Преимущества такой записи связаны с тем, что для функции z (p,T), называемой коэффициентом сверхсжимаемости, составлены таблицы и графики, охватывающие ряд практически важных случаев, и имеются простые способы приближенного вычисления ее для газовых смесей. Температура в этом уравнении обычно можно считать постоянной и рассматривать как параметр. Отклонение z от единицы (газа от идеальности) значительнее для более тяжелых углеводородных газов.

Согласно элементарной кинетической теории газов, вязкость газа не должна зависеть от давления. Это утверждение также не применимо к условиям, характерным для газового пласта. При фиксированной температуре вязкость газа может изменяться на десятки процентов при изменении давления на десятки атмосфер.

2. Рассмотрим теперь вопрос, как зависят от давления жидкости свойства пористой среды - ее пористость m и проницаемость k. Обе эти величины характеризуют структуру порового пространства, и их изменение в любой точке определяется давлением жидкости и тензором напряжений, действующих в скелете пористой среды. При этом следует отметить, что в опытах определяется их зависимость не от истинных напряжений, действующих в скелете, а от некоторой их части, которую мы назовем фиктивными напряжениями. Для выяснения этого обстоятельства разберем следующую элементарную схему опыта. Пусть в цилиндрическом сосуде с площадью поперечного сечения, равной единице, находится некоторый объем пористой среды, в котором содержится жидкость под давлением p. На верхней грани этого объема лежит непроницаемый поршень, по другую сторону которого находится жидкость под тем же давлением p. В силу известного принципа гидростатики - принципа отвердевания - эта система находится в состоянии равновесия. Для выяснения зависимости пористости от нагрузки приложим к поршню дополнительную нагрузку q. Вычислим сжимающее нормальное напряжение, действующее в сечении объема пористой среды плоскостью, параллельной поршню; для этого составим уравнение равновесия части рассматриваемого объёма, ограниченной поршнем и плоскостью сечения. Пренебрегая силами трения о стенки вмещающего сосуда и собственным весом среды и жидкости, получаем

σ+*mp*=*q*+*p*; σ = *q*+*p*(1-*m*), (14)

где σ - истинное напряжение, действующее в пористой среде (в расчете на единицу площади общего сечения) и, очевидно, не равное приложенной нагрузке q. Изменение пористости в зависимости от давления при фиксированной нагрузке в целом мало существенное, учитывается отдельно (это изменение обусловливается сжимаемостью материала зерен, составляющих пористую среду, которая мала сравнительно со сжимаемостью пористой среды в целом, так как изменение пористости происходит в основном за счет более плотной упаковки зерен и лишь в очень небольшой мере - за счет их сжатия; если вообще не учитывать сжимаемость материала зерен, составляющих пористую среду, то пористость при фиксированной нагрузке не будет зависеть от давления жидкости). Можно показать также, что при фиксированных напряжениях σ изменение давления жидкости вообще не будет приводить к изменению объема скелета, независимо от того, какова сжимаемость его материала. Таким образом, рассматриваемый опыт дает нам зависимость пористости от нагрузки q, составляющей лишь часть истинных напряжений, действующих в скелете пористой среды:

*q*=σf = σ-*p*(1-*m*). (15)

 Величину σf будем в дальнейшем называть фиктивным напряжением.

Важная особенность пористой среды, отмеченная выше, заключается в том, что изменения занятого ею объема могут происходить при весьма малых изменениях собственного объема твердого скелета, почти исключительно за счет его перестройки. Простейшей моделью подобной системы может служить пружина, погруженная в воду. Объем цилиндрического тела, ограниченного пружиной, практически не изменяется при изменении давления жидкости и может сильно измениться, если приложить по концам противоположно направленные силы. В формулу для вычисления осадки пружины следует подставлять величину истинных напряжений за вычетом слагаемого, обусловленного давлением жидкости.

Аналогичные соображения применимы и в более общих случаях. Таким образом, опыт, поставленный в условиях произвольного нагружения, даст нам зависимость пористости не от тензора истинных напряжений, действующих в скелете пористой среды, а от тензора фиктивных напряжений. Ввиду того что при действии на пористую среду одного гидростатического касательные напряжения в пористой среде не возникают, касательные компоненты тензора истинных напряжений и тензора фиктивных напряжений и тензора совпадают, а нормальные компоненты отличаются на величину р(1-m), имеем

(*i*, *j*=1, 2, 3,…) (16)



где компоненты тензора фиктивных напряжений; компоненты тензора истинных напряжений; δij=1 при *j*=*i*, δij=0 при *i*?*j*,





Будучи величинами скалярными, пористость и проницаемость могут зависеть только от инвариантов тензора фиктивных напряжений. Зависимостью их от второго и третьего инвариантов тензорафиктивных напряжений пренебрегают, откуда



(17)

где ==- главные нормальные фиктивные напряжения, аθ среднее напряжение.

Величину θ можно связать с давлением р, если рассматривать напряженные состояние в пласте. Пусть Н - глубина залегания пласта, h-его мощность, а ρ0 - средняя плотность горных пород. Обыкновенно нефтяные пласты располагаются на значительной глубине под дневной поверхностью и их мощность мала сравнительно с глубиной залегания, т. е. h<<H. В этом случае удается связать изменение величины θ с изменением давления р. В самом деле, лежащие над пластом горные породы поддерживаются скелетом пласта и насыщающей пласт жидкостью, так что вес вышележащих горных пород уравновешивается системой напряжений в пористой среде и гидродинамическим давлением жидкости. Составляющую пласт системы жидкость - пористая среда можно представить себе как некоторую деформированную систему, касательные напряжения в которой совпадают с касательными напряжениями в пористой среде, а нормальные напряжения равны сумме истинных нормальных напряжений, действующих в пористой среде, и доли нормальных напряжений, воспринимаемых жидкостью (эта доля равняется, очевидно, произведению пористости на давление жидкости). Имеем, таким образом, выражение для компонента суммарного напряжения δij:

(18)



Пусть р- суммарная плотность системы жидкость - пористая среда, а gi - компонента вектора ускорения силы тяжести по оси хi. Тогда уравнение равновесия системы жидкость - пористая среда имеет вид:



(19)

Считая жидкость слабосжимаемой, можно положить в уравнении (19) р=р\*, где р\* - постоянное исходное значение суммарной плотности. Таким образом, суммарное уравнение равновесия системы жидкость - пористая среда окончательно записывается в виде:



(20)

и, как видно, это уравнение не зависит от времени. Покажем теперь, что и суммарные напряжения на кровле и подошве пласта (т. е. на верхней и нижней ограничивающих пласт поверхностях) можно с большой степени точности считать постоянными. Физически объяснения этого факта сводится к следующему: упругое смещение, обусловливаемое изменением давления жидкости, насыщающей породу пласта, пропорциональное, очевидно, мощности пласта, распределяется на всю огромную толщину Н вышележащего массива горных пород, так что соответствующие относительные деформации в этом массиве малы и, следовательно, малы возникающие в нем дополнительные напряжения, в частности дополнительные напряжения на кровле и подошве пласта.

Поясним это несколько подробнее. Предположим, что давление жидкости, насыщающей пласт, изменилось по сравнению с исходным моментом на величину δр. Обозначим величину изменения давления жидкости в том месте, где оно максимально, через δр макс. Для поддержания вышележащих горных пород необходимо, чтобы напряжение в скелете пористой среды внутри пласта изменилось также на величину порядка δр. Соответствующая относительная деформация в пласте составило величину порядка δр/Е, где Е- некоторый эффективный модуль Юнга системы, а полное вертикальное смещение точки, например кровли пласта, - величину порядка v = hδр/Е, где h- мощность пласта. Заметим теперь, что, закрепив точки свободной поверхности, т. е. обеспечив на свободной поверхности равенство нулю упругих смещений, а также заменив во всех точках пласта δр на δрмакс, мы можем лишь увеличить возникающее дополнительные напряжения. Таким образом, если на свободной поверхности вышележащего массива смещение равно нулю, а на глубине Н оно имеет величину порядка vмакс=h δрмакс /Е, то, очевидно, соответствующее напряжение σмакс имеет величину порядка σмакс =vмакс Е/H. отношение этого дополнительного напряжения к действующему на глубине Н вертикальному напряжению сжатия, имеющему порядок ρ0gH(ρ0 - cредняя плотность горных пород - величина, примерно равная 2,5 г/см3), равно по порядку величины



 (21)

Значение δрмакс/ρ0gH обычно не превышает одной-двух десятых; величина h/Н исчезающе мала, так что изменение напряжения во всем вышележащем массиве и, в частности, на его границах мало сравнительно с исходным напряжением. Поэтому можно считать, что при изменении давления жидкости в пласте напряжения, действующие на кровле и подошве пласта, остаются постоянным.

Предыдущее рассуждение существенно основано на том, что модуль Юнга системы жидкость - пористая среда Е и модуль вышележащего массива горных пород Е1 имеют одинаковый порядок величины (что обычно имеет место в действительности). Если бы эти модули Юнга сильно отличались между собой, то выражение (21) содержало бы дополнительный множитель Е1/Е и при Е1>> Е отношение напряжений могло бы и не быть малым. Физически это означает, что в случае, когда вышележащая толща сложена из очень жестких пород, могут образоваться своды, и при изменении давления жидкости напряжения на кровле и подошве пласта будут меняться.

Есть теперь пренебречь влиянием таких границ области фильтрации, как стенки скважин (эти границы имеют сравнительно очень малую протяжность; их влияние будет оценено ниже), то из независимости от времени уравнений равновесия системы жидкость - пористая среда (20) и напряжений на кровле и подошве пласта следует важный вывод о независимости суммарного напряженного состояния в системе жидкость - пористая среда от времени, так что



Откуда (22)



Свертывая уравнения (22) (т. е. полагая i, j=1, 2, 3 и суммируя получающие уравнения), имеем



(23)

откуда вытекает важное соотношение



===

**2. Основные задачи нестационарной фильтрации**

**2.1. Уравнение неразрывности**

Рассмотрим баланс массы жидкости в произвольном элементе объема пористой среды V, ограниченном поверхностью S. За бесконечно малое время dt приток жидкости внутрь элемента равен согласно определению скорости фильтрации



(24)

( единичный вектор нормали; за положительное направление нормали принято направление внешней нормали к поверхности; un - нормальная к поверхности составляющая скорости фильтрации). Приращение массы жидкости внутри этого элемента равняется





(25)

Приравнивая выражения (24) и (25) и используя формулу преобразования поверхностного интеграла в объёмный

находим





откуда в силу произвольности элемента V и вытекает уравнение неразрывности



(26)

2.2. **Упругий режим фильтрации**

1. Самым простым и наиболее изученным случаем нестационарной фильтрации является фильтрации слабосжимаемой жидкости в упругодеформируемом пласте (в технических приложениях эти задачи получили название задач упругого режима фильтрации). В основу исследования кладется система уравнений закона фильтрации и уравнения неразрывности:



(27)

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений, нужно воспользоваться тем, что свойства жидкости (плотность ρ и вязкость μ), так же как и пористость и проницаемость пористой среды, являются функциями давления (мы предполагаем движение изотермическим).

В силу (23) имеем



исходя из предположения о слабой сжимаемости жидкости и пористой среды, можно считать относительные изменения величин ρ и m малыми и коэффициенты при dp/dt в предыдущих формулах постоянными:



(28)

Опытные данные показывают, что в реальных случаях

(p-p0)/Кm <<1; (p-p0)/Кρ<<1 и т. д.

Подставляя второе уравнение (27) в первое и преобразуя получающее соотношение с учетом (28), находим, пренебрегая малыми величинами,



Если δp - характерное изменение давления, а L - характерная длина, то первый член в скобках имеет, очевидно, порядок δp/L2, а второй (δp)2/L2К. Отсюда следует, что вторым членом в принятом приближении также следует пренебречь. Таким образом, имеем



(29)

где коэффициент



(30)

носит название коэффициента пьезопроводности. Уравнение (29) обычно называется уравнением упругого режима или, по предложению В.Н.Щелкачева, уравнением пьезопроводности. Оно совпадает с хорошо известным классическим уравнением теплопроводности.

2. Рассмотрим постановку основных задач теории упругого режима. Определим распределение давления р в некоторой замкнутой области пространства D на протяжении промежутка времени 0 ≤ t≤ T. Из теории уравнения теплопроводности известно, что если задать на границе Г области D линейную комбинацию давления и его производной по нормали к границе области



(31)

и задать начальное распределение давления в области D

*p*(*x*,*y*,*z*,0)=φ(*x*,*y*,*z*) (32)

то существует распределение давления p(x, y, z, t), и при том единственное, удовлетворяющее уравнению (29), непрерывное в замкнутой области D, включая границу, и удовлетворяющее условия (31) и (32).

Сформулированная задача охватывает почти все основные задачи теории упругого режима фильтрации.

Рассмотрим подробнее физический смысл тех или иных дополнительных условий.

Область, в которой ищется распределение давления жидкости, обычно представляет собой пористый пласт, частично имеющий непроницаемые границы, а частично сообщающиеся с другими пластами и вскрывающими его скважинами. На непроницаемых границах должно удовлетворятся очевидное условие отсутствия потока - равенство нормальной компоненты скорости фильтрации нулю:

un=0,



откуда, используя закон Дарси, получаем (33)

На участках границы с областями, в которых перераспределения давления практически не происходит (“области питания”), давление можно считать постоянным и известным, так что

*р*|Г = *f*(*x*, *y* , *z*). (34)

Такое условие справедливо, если, например, рассматриваемый пласт граничит с высокопроницаемой областью,

запас жидкости в которой весьма велик. Давление на границе такой области близко к среднему давлению в ней и ввиду ее большого объема мало зависит от процессов, происходящих в исследуемой области. Характерным примером является нефтяная залежь, окруженная со все сторон обширной водоносной областью.

При рассмотрении нестационарных процессов в залежи давление в водоносной области можно считать постоянным. Следует, однако, отчетливо представлять себе, что понятие области постоянного давления не является абсолютным. Чем более длительный характер носят изменения давления, тем на большую область они распространяются.

Часть границы области фильтрации обычно образована стенками скважины или дренажных галерей. На этой части границы чаще всего задается либо давление жидкости, либо поток ее через стенки скважины. Выбор того или иного условия зависит от режима работы скважины или галереи. Могут быть и более сложные условия, когда задается связь с расходом жидкости. Задание потока жидкости согласно закону Дарси эквивалентно заданию нормальной производной от давления.

Условия этого типа выполняются на тех участках границы, через которые может происходить обмен жидкости с соседними пластами через сравнительно слабопроницаемые перемычки. Если толщина перемычки Δ мала, а давление р′ за ней можно считать постоянным, то расход вытекающей жидкости через участок перемычки площадью ds составит . Это количество жидкости должно быть равно





где un - нормальная проекция скорости фильтрации на рассматриваемом участке границы. Отсюда имеем



(35)

т.е. условия третьего рода.

Все три типа условий являются частными случаями общего условия (31). Таким образом, задавая начальное распределение давления указанные условия на границе, получаем однозначно разрешимую задачу.

**2.3. Уравнения безнапорной фильтрации**

**несжимаемой жидкости**

Под безнапорным фильтрационным движением понимают движение со свободной поверхностью, на которой давление жидкости постоянно и равно внешнему атмосферному давлению. Наиболее часто приходится встречаться с безнапорным движением подземных вод; безнапорное движение нефти встречается сравнительно редко, только при шахтной добыче.

Рассмотрим безнапорное движение в однородной и изотропной пористой среде, область течения будем предполагать ограниченной снизу непроницаемой и криволинейной поверхностью - водоупором.

Закон Дарси в рассматриваемом случае можно записать в виде:



(36)

Величина С, имеющая размерность скорости, называется коэффициентом фильтрации, =- напором, а функция Сh- фильтрационным потенциалом. Заметим, что для безнапорного движения изменения давления обычно настолько малы, что пористую среду можно считать недеформируемой, а жидкость несжимаемой, так что С =const, ρg = const.

В точной постановке исследование безнапорного фильтрационного движения представляет исключительные трудности математического характера; относящиеся сюда постановки задач и результаты можно найти в книге П. Я. Полубариновой-Кочиной [94]. Поэтому приходится обращаться к некоторым упрощенным постановкам.

Большое значение имеет приближенная постановка задачи о безнапорной фильтрации, соответствующая случаю движения, которое будем называть *пологим*. Под пологим фильтрационным движением понимается движение, происходящее в пластах с конечной глубиной водоупора, в котором вертикальная компонента скорости фильтрации uz мала сравнительно с горизонтальной компонентой. Так как характерной скоростью в безнапорном фильтрационном движении является скорость С, то горизонтальная компонента скорости фильтрации может быть либо порядка С, либо малой сравнительно с С. В обоих случаях ясно, что вертикальная компонента uz мала сравнительно с С, т. е.

(37)

Это неравенство можно переписать еще так:





(38)



Но представляет собой ту часть вертикальной компоненты градиента давления, которая обусловлена фильтрацией жидкости. Неравенство (38) показывает таким образом, что вертикальная компонента фильтрационного градиента давления мала сравнительно с гидростатическим градиентом давления. Поэтому распределение давления по вертикали можно в случае пологих движений считать гидростатическим.

 Выведем важное для дальнейших рассуждений соотношение. Рассмотрим объем V, ограниченный свободной поверхностью жидкости и некоторой цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими. Обозначим через h расстояние от свободной поверхности жидкости до водоупора, а через H- расстояние от свободной поверхности до горизонтальной плоскости z = 0; очевидно, dh/dt = dH/dt. Объем жидкости, заключенной в объеме V, равен



(39)

где площадка S представляет собой проекцию объема на горизонтальную плоскость. Изменение количества жидкости в объеме V за бесконечно малый промежуток времени dt равно поэтому



(40)

Вместе с тем это изменение равно притоку жидкости в объем V извне за время dt, равному



(41)

где γ - замкнутый контур, ограничивающий площадку S, а un - нормальная компонента вектора потока , определяемого соотношением





(42)

Приравнивая (40) и (41) и используя формулу преобразования контурного интеграла в интеграл по площади

получаем



(43)



откуда, пользуясь произвольностью площадки S, находим уравнение



(44)

Согласно закону Дарси, скорость фильтрации определяется соотношением (36)

Поскольку, по предыдущему, давление распределяется по вертикали с точностью до малых величин по гидростатическому закону, величина = вдоль каждой вертикали будет постоянна и равна Н:

(*x*, *y*, *z*, *t*) = *H* (*x*, *y*, *z*, *t*) + *O* (*u*z/*C*); =*C* grad *H* + *O*(uz).





Таким образом, скорость можно, пренебрегая малыми величинами, вынести из-под знака интегрирования по вертикали в соотношении (42), определяющем вектор Тогда получаем





= – *Сh* grad *H*. (45)



Представляя (45) в (44), имеем



(46)

В это уравнение следует подставить соотношение

*H*(*x*, *y*, *t*) = *h*(*x*, *y*, *t*) + *h*0 (*x*,*y*),

определяющее вертикальную координату свободной поверхности Н через ее расстояние h до водоупора и расстояние h0 от водоупора до плоскости отсчета *z* = 0; получим окончательное уравнение для определения *h*. В частности, если поверхность водоупора представляет собой горизонтальную плоскость, то ее можно принять за плоскость отсчета и, следовательно, *h*0 (*x*,*y*) можно считать равным нулю. Тогда *Н*= *h*, и уравнение (46) принимает вид:



(47)

Уравнения (46) и (47) были даны Буссинеском.

**2.4. Основные уравнения фильтрации газа**

При исследовании фильтрации газа основное значение имеет тот факт, что сжимаемость газа обычно на несколько порядков превышает сжимаемость пористой среды. С учетом этого обстоятельства в уравнении неразрывности



(48)

изменением пористости *m* во времени можно пренебречь, так что получим



(49)

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений, снова нужно использовать связь плотности газа ρ с его давлением р и температурой Т:

ρ = ρ(р,Т), (50)

поэтому в задаче появляется новая переменная Т, и для замыкания системы уравнений нужно добавить еще одно уравнение - уравнение энергии. Однако, если в среде отсутствуют источники выделения или поглощения энергии, то изменения температуры в процессе движения газа крайне малы, и при расчете поля давления газа ими можно пренебречь. Это обстоятельство легко понять, если учесть, во-первых, крайнюю малость скорости фильтрации и, во-вторых, наличие теплового балласта - скелета пористой среды, эффективно подавляющего изменения температуры. Будем поэтому считать, что

ρ = ρ(р,Т0)= ρ(р), (51)

где Т0 - постоянная температура.

Присоединяя к уравнениям (49) и (51) уравнение закона фильтрации (предполагаемого линейным)



(52)

получаем замкнутую систему уравнений. Исключая скорость фильтрации, имеем



(53)

В уравнении (53) ρ - известная функция давления. Аналогично и вязкость газа, зависящая в общем случае от давления и температуры, может быть представлена в виде:

μ = μ(р,Т0) =μ(р). (54)

Таким образом, и вязкость может считаться известной функцией одного лишь давления.

Введем теперь функции



(55)

Уравнение (53) принимает при этом вид:



(56)

Можно показать, что уравнение для давления сохранит форму (56) и в случае, если учитывается деформируемость пористой среды, т. е. зависимость от давления пористости и проницаемости (среда по-прежнему считается однородной).

В простейшем случае, когда газ можно считать термодинамически идеальным, с вязкостью, не зависящей от давления,



μ = const, (57)

(*р*0 и ρ0 - постоянные). При этом



(58)

и уравнение (56) преобразуется к виду:



(59)

или

(60)



Уравнения (59) и (60) выведены в предположении постоянства температуры газа Т0. Поэтому их обычно называют уравнениями изотермической фильтрации газа.

Уравнение (60) - основное для теории фильтрации газа - получено впервые Л. С. Лейбензоном, а затем, несколько позднее, в работе Маскета и Ботсета. Преобразования (55) также берет свое начало от работ Л. С. Лейбензона. Далее уравнение (60) совпадает с уравнением Буссинеска (47) для напора при пологих безнапорных фильтрационных движениях. Эта аналогия, впервые обнаруженная Л. С. Лейбензоном, позволяет рассматривать исследование изотермической фильтрации газа и пологих безнапорных движений несжимаемой жидкости как одну задачу.

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ЗАДАЧИ

**НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

**ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ**

**3.1. Общая характеристика инвариантных задач**

**теории нестационарной фильтрации.**

**Автомодельные пологие безнапорные движения**

**при нулевом начальном уровне жидкости**

**3.3.1. Общая характеристика инвариантных задач теории нестационарной фильтрации.** В разделе 2 было показано, что основные задачи гидродинамической теории нестационарной фильтрации приводят к краевым, смешанным или начальным задачам для нелинейных, как правило, дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Нелинейность вообще характерна для многих актуальных задач современной гидродинамики: газодинамики, теории волн, теории движений вязкой жидкости и т. д. В настоящее время существует сколько-нибудь общих эффективных аналитических методов решения достаточно широких классов нелинейных задач математической физики; это в полной мере относится и к теории фильтрации. Поэтому в теории фильтрации уже давно привлекли внимание своеобразные частные решения, которые выражаются через функции одной переменной. Вначале эти решения обратили на себя внимание только потому, что их получение сводилось к решению обыкновенных уравнений и представлялось (особенно в домашинную эру) более простым, чем решение уравнений в частных производных в общем случае. При построении различных приближенных методов решения, более общих, эти решения часто использовались как эталоны, позволяющие оценить точность метода. (Приближенные методы аналитического решения сохраняют, особенно в теории фильтрации, свое значение и сейчас, при широком внедрении машин, поскольку эти методы дают аналитические формулы, позволяющие наглядно проследить влияние различных параметров, а высокая точность в теории фильтрации не представляет особого интереса. В ряде случаев задачи, описываемые такими решениями, представляют и самостоятельный интерес.

Однако главная ценность таких решений была осознана позднее. Оказалось, что они представляют собой асимптотические представления решений весьма широких классов задач именно там, где детальная структура граничных и начальных условий перестает быть существенной, а эти области часто бывают наиболее интересными (например, спустя некоторое время после начала отбора из скважины, пока воронка депрессии не достигла области влияния соседней скважины и т. д.). Поэтому, зная такие решения, мы фактически получаем возможность судить, по крайней мере качественно, о поведении очень широкого класса фильтрационных движений.

Важным свойством рассматриваемых ниже решений является их инвариантность: для одних из этих решений - “автомодельных” - распределение давлений, напоров, плотностей и т. п. оказывается все время подобным самому себе, для других - перемещается как твердое тело с постоянной скоростью и т. д. Это свойство связано с особым характером задач, приводящих к таким решениям. Выполнение определенных преобразований зависимых и независимых переменных оставляет уравнения, граничные и начальные условия задачи неизменными. Как говорят в математике, эти задачи инвариантны относительно некоторой группы непрерывных преобразований. Такие задачи называются инвариантными, они рассматриваются ниже.

**3.1.2. Автомодельные пологие безнапорные движения при нулевом начальном уровне жидкости.** Ниже будут рассмотрены точные решения некоторых линейных задач нестационарной фильтрации, характеризующихся нулевым начальным условием. Исследование этого класса движений представляет, помимо непосредственного, также принципиальный интерес, поскольку в подобных задачах наиболее сильно проявляется существенно нелинейный характер рассматриваемой проблемы и обнаруживаются некоторые свойства нелинейных движений, резко отличающие их от соответствующих линейных задач и неизбежно утрачиваемые при линеаризации.

Будем рассматривать безнапорные пологие фильтрационные движения в первоначально сухом грунте, имея в виду, что в силу обнаруженной Л. С. Лейбензоном аналогии все результаты непосредственно переносятся на задачи изотермической фильтрации газа. Излагаемые ниже в этом параграфе решения были получены Г. И. Баренблаттом.

Рассмотрим полубесконечный пласт, имеющий снизу плоскую горизонтальную непроницаемую границу - водоупор, а со стороны канала - плоскую вертикальную границу, перпендикулярную оси *x* и проходящую через точку *x* =0.

Пусть начальный напор жидкости в пласте равен нулю, а напор на вертикальной границе пласта изменяется по степенному закону, начиная с исходного момента *t* =*t*0:

*h*(0, *t*) = σ (*t*-*t*0)α, (61)

где σ > 0, а α - некоторая константа, которую будем выбирать в пределах –Ѕ<α<8. В частности, константа α может равняться нулю; в этом случае напор на границе мгновенно принимает некоторое значение σ и остается постоянным.

В случае фильтрации газа сформулированная задача отвечает закачке газа в первоначально не заполненный однородный пласт постоянной мощности при изменении давления газа в начальном сечении пласта *х* = 0 по закону (61). Линиями равных напоров будут линии *х* = const, параллельные границе пласта. Таким образом, напор h(x, t) удовлетворяет уравнению



(62)

получающемуся из общего уравнения Буссинеска (47) для данных геометрических условий задачи, а также граничному условию (61), начальному условию и условию на бесконечности:

h(x, t0) = h(∞, t) = 0. (63)

 Напор в некоторой точке пласта h зависит от следующих аргументов: координаты *х*, времени, прошедшего от начало процесса t - t0 (в силу однородности уравнения (62) по времени напор будет зависеть только от разности t - t0, а не от значений t и t0 в отдельности), коэффициентов α и σ и константы α. Вводя для удобства независимую размерность напора (это возможно, так как для рассматриваемой задачи несущественно, что размерности длины и напора одинаковы), получим размерности этих аргументов в следующем виде:

[α] = [h]-1 L2 T-1; [t - t0] = T; [x] = L; [σ] = [h] T-α, (64)

где через [h], L и Т обозначены соответственно размерности напора, длины и времени; константа α безразмерна. Из аргументов, от которых зависит напор жидкости, можно составить только две независимые безразмерные комбинации:



(65)

В силу π- теоремы анализа размерностей выражение для напора можно представить в виде произведения комбинации определяющих параметров, имеющей размерность напора (в качестве нее можно взять σ (t - t0)α ), на безразмерную функцию от безразмерных комбинаций (65). Имеем таким образом

*h* = σ(t - t0)α *f*(ξ, λ); λ = α/(1+α), (66)

где f - безразмерная функция, а параметр λ введен вместо параметра α для удобства последующего изложения. Очевидно, что λ лежит в интервале -1 <λ<1. Имеем, далее, в силу (66)





Подставляя эти соотношения в уравнение (62) и упрощая, получаем для функции *f* обыкновенное дифференциальное уравнение:



(67)

После подстановки выражения (66) в граничное условие (61) и условие (63) получаем для функции *f* (ξ, λ) краевые условия:

*f*(0, λ) = 1; (68)

*f*(∞, λ) = 0. (69)

Напор и объемный поток (расход) грунтовых вод должны быть непрерывными функциями *x и t.* Используя закон Дарси, имеем для расхода, приходящего на единицу ширины пласта, выражение



(70)

Таким образом, из требования непрерывности расхода следует непрерывность функции df2/dξ.

При непрерывной функции f(ξ) и f ≠ 0 требование непрерывности функции df2/dξ = 2fdf/dξ совпадает с требованием непрерывности производной df/dξ. Однако при f = 0 из непрерывности df2/dξ непрерывность df/dξ не вытекает. Напротив, как увидим далее, искомая функция f(ξ, λ) имеет в точке, где f обращается в нуль, разрыв первой производной.

Условие (69) удобнее привести к другому виду. Умножим обе части основного уравнения (62) на *х* и проинтегрируем по *х* от нуля до бесконечности. В результате получим

t5555555555

Очевидно, что *dh*2/*dx* стремится к нулю при *х*→∞, быстрее, чем х-1, в противном случае *h* не стремилось бы к нулю при *х*→∞. Используя это обстоятельство и условие на бесконечности (63), получаем



Интегрируя это соотношение в пределах от *t* = *t*0 до *t* и используя граничное условие (61) и представление решения (66), имеем



(напомним, что считаем α удовлетворяющим неравенству -1/2<α< ∞), откуда получаем искомое условие в форме



(71)

В интересующей нас области изменения α и λ правая часть (71) конечна и положительна.

**3.2. ПОЛОГИЕ БЕЗНАПОРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ**

**С НУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ НАПОРОМ:**

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ,**

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ**

**3.2.1. Предельные автомодельные движения.** Рассмотрим теперь для того же полубесконечного пласта несколько иную задачу. Будем исследовать движение на полубесконечном интервале времени (-∞, *t*), поэтому начальное распределение напора по пласту несущественно.

Предположим, что на больших расстояниях от границы пласта, т.е. при *х*→ ∞, напор жидкости равен нулю; следовательно,

*h*(∞, *t*) = 0. (72)

Пусть, далее, напор жидкости на границе пласта возрастет со временем по экспоненциальному закону:

h(0, t) = h0eηt. (73)

Напор жидкости внутри пласта *h*(*x*, t) по-прежнему удовлетворяет уравнению



(74)

Составим полный список аргументов, от которых зависит это решение. Помимо координаты х и времени t, в этот список войдут также величины h0, == и α. Тогда размерности всех определяющих параметров решения представляются в виде:

[x]=L; [t]=T; [α]=[h]-1L2T-1; [h0]=[h]; [χ]=T-1, (75)

где по-прежнему символы L, T и [h] означают соответственно размерности длины, времени и напора. Из пяти аргументов (75) с тремя независимыми размерностями можно составить две независимые комбинации, которые удобно взять в виде:



отсюда на основе π- теоремы решение рассматриваемой задачи будет



(76)

где ϕ - безразмерная функция.

Положим теперь t = t′ + τ , где τ - произвольная константа. При этом условие (72) и уравнение (74), как нетрудно проверить, записываются через новую переменную t′, так же как и через прежнюю переменную, а условие (73) принимает вид:

(77)



Таким образом, сдвиг во времени влияет лишь на некоторое преобразование величины h0, и постановка задачи оказывается по отношению к группе преобразований переноса по времени; для определения h в переменных х, t′, α, χ, h′0 получается та же задача, что и для определения h в переменных (75). Стало быть, на основе соотношений (76) и (77) имеем



(78)

Отсюда следует, что при любом τ имеет место тождество



(79)

Положим теперь τ = t и получим

(80)



Итак, функция *h*, зависящая от пяти аргументов (75), представляется через функцию одного аргумента:



(81)

Подставляя (81) в основное уравнение (74), получаем для функции *f*(ξ) обыкновенное дифференциальное уравнение



(82)

Подставляя выражение (81) в условие на бесконечности (72) и граничное условие (73), имеем граничные условия для функции *f*(ξ):

f(0) = 1; f(∞) = 0. (83)

В силу непрерывности напора жидкости и потока жидкости функция f(ξ) по-прежнему должна быть непрерывной и иметь непрерывную производную от квадрата df2/dξ. Мы получили, таким образом, для определения функции f(ξ) граничную задачу того же типа, что и граничные задачи для автомодельных решений, рассмотренных в предыдущем параграфе, и соответствующую значению параметра α, равному бесконечности, т. е. λ = 1. Функция f(ξ) = f(ξ, 1) тождественно равна нулю при ξ ≥ ξ0 = 1,810; передний фронт х0 (t) перемещается, таким образом, по закону



(84)

а скорость его перемещения равна



(85)

Полученное решение является в некотором смысле предельным для автомодельных решений, рассмотренных выше. В самом деле, положим в формуле (66)

σ = h0 (ατ )-α, (86)

где h0 - константа размерности напора; τ - константа размерности времени, причем, очевидно, эти константы выбираются с точностью до некоторого постоянного множителя. Решение (66) принимает вид



(87)

Будем неограниченно увеличивать в этом решении α при начальном моменте t0 → − ∞ по закону

t0 = - ατ. (88)

Раскрывая неопределенность, получаем, что при α → ∞



(89)

Уравнение (67) в пределе при α → ∞ переходит в уравнение (82), а условия (68) и (69) совпадают с условиями (83); *f*(ξ, λ) → *f*(ξ, 1) = *f*(ξ).

Обозначая τ через 1/χ, получаем, что при α → ∞ решение (87) стремится к решению (81). Поэтому решение (81) было названо *предельным автомодельным решением.* Это решение было получено в работе Г. И. Баренблатта. предельные автомодельные решения представляют и принципиальный интерес в том отношении, что для доказательства автомодельности этих решений уже недостаточно соображений анализа размерности, т. е. недостаточно инвариантности постановки задачи относительно группы преобразования подобия величин с независимыми размерностями, как это было в ранее рассмотренных автомодельных задачах, а требуется дополнительно воспользоваться инвариантностью постановки задачи относительно еще одной группы - группы преобразований переноса по времени.

Приведенные при рассмотрении предельной автомодельной задачи рассуждения носят общий характер и могут применяться во многих других задачах. Очевидно, что предельные автомодельные движения существуют всегда, если система основных уравнений рассматриваемой задачи имеет автомодельные решения обычного степенного типа с *произвольным* показателем степени (который может принимать сколь угодно большие значения) и инвариантна относительно преобразования переноса соответствующей координаты. Как пример можно указать задачу пограничного слоя в несжимаемой жидкости, а также задачу одномерных неустановившихся движений газа. Полученные для этих задач автомодельные решения, содержащие степенные функции независимых переменных, при предельном переходе, аналогичном проделанному в рассматриваемой задаче теории фильтрации, дают предельные автомодельные решения, полученные Гольдштейном и Станюковичем путем формальной постановки.

**Задача.** На границе х=0 полубесконечного пласта с непроницаемым горизонтальным водоупором задается поток (расход) жидкости как степенная функция времени



(90)

Начальный напор во всем пласте равен нулю.

Решение задачи представляется в виде:



(91)

где м (λ) =-df2(0, λ)/dξ , а координата переднего фронта жидкости х0 (t) - в виде:



2. **Осесимметричные автомодельные движения.** При осесимметричных пологих безнапорных движениях жидкости напор жидкости h удовлетворяет уравнению



(93)

где r - расстояние рассматриваемой точки пласта от оси симметрии.

 Рассмотрим следующую задачу. Пусть в бесконечный пласт, ограниченный снизу непроницаемой горизонтальной поверхностью - водоупором, через скважину, радиус которой пренебрежимо мал, начинается закачка жидкости. Предположим, что начальный напор жидкости в пласте равен нулю, так что начальное условие на бесконечности имеют вид:

h(r, t0) = 0; h(∞, t) = 0. (94)

Предположим далее, что расход закачиваемой жидкости изменяется со временем по степенному закону. Выражение для полного расхода жидкости, закачиваемой через скважину радиусом R, имеет вид:



(95)

По предположению, радиус скважины пренебрежимо мал (ниже мы остановимся на причинах, по которым это допущение можно делать для большинства реальных движений), поэтому можно принять R = 0; так как расход жидкости, закачиваемой в скважину, меняется по степенному закону, граничное, условие на скважине принимает вид:



(96)

где τ > 0 и β > -1. В частности, случай β = 0 соответствует закачке жидкости в пласт с постоянным расходом. Таким образом, решение задачи удовлетворяет уравнению (93) и условиям (94) и (96). По-прежнему, используя π- теорему анализа размерности, можно показать, что это решение является автомодельным и представляется в виде:





(97)

Здесь

(98)

представляют собой две независимые безразмерные комбинации определяющих параметров решения; других независимых комбинаций этих параметров не существует. Постоянный множитель снова введен в формулу для ξ с целью удобства последующего изложения. Как и прежде, искомая функция должна быть непрерывной и иметь непрерывную производную от квадрата. Подставляя выражение (77) в уравнение (93) и условия (94) и (96), находим, что функция f1 (ξ, λ) удовлетворяет уравнению



(99)

при условиях



(100)

Исследование этой граничной задачи проводится аналогично предыдущему; также единственным образом строится функция f1 (ξ, λ), отличающаяся от нуля лишь при 0 ≤ ξ ≤ ξ1(λ), где ξ1 (λ) - некоторая функция ξ, а при ξ ≥ ξ1 (λ) тождественно равная нулю. Функция f1 (ξ, λ) при ξ→0 имеет особенность, как нетрудно видеть из первого условия (100):



(101)

Второе условие (100) может быть приведено к другой форме: умножая уравнение (99) на ξ и интегрируя в пределах от ξ = 0 до ξ = ∞, получаем, используя оба условия (100) и условия



(102)

следующее интегральное соотношение:



(103)

Первое условие (102) непосредственно следует из условия, которому функция f1 (ξ, λ) на бесконечности, так как если бы предел == при ξ → ∞ не был равен нулю, то функция f1 (ξ, λ) не стремилась бы к нулю при ξ → ∞. Второе условие (102) непосредственно следует из (101).

Эффективное вычисление функции f1 (ξ, λ) удобно проводить следующим образом. Строим решение задачи Коши Ф1(ξ, λ) для уравнения (99). обращающееся в нуль при ξ = 1 и имеющее в этой точке конечную первую производную. Исследование, в точности аналогичное приведенному в п. 3 ξ1, показывает, что эта производная равна -1/4. Строить решение задачи Коши удобно так: вблизи ξ = 1 можно представить решение в виде ряда, при помощи которого находится надлежащее число начальных значений, после чего применяется метод численного интегрирования Адамса - Штермера. Далее численно вычисляется величина



Величина N(λ) не равна единице, поэтому функция, равная Ф1 (ξ, λ) при ξ<1 и тождественно равная нулю при ξ ≥ 1, удовлетворяет всем условиям граничной задачи (99) - (100), кроме первого условия (100). Воспользуемся теперь тем, что, как нетрудно показать, уравнение (99) и второе граничное условие (100) инвариантны относительно группы преобразований:



(104)

поэтому при произвольном положительном μ функция Ф2(ξ, λ) удовлетворяет уравнению (99) и второму граничному условию (100). Но

(105)



Выбрав  так, что 

получим, что функция



(106)

удовлетворяет всем условиям граничной задачи (99) - (100).