Реферат на тему:

# Формули. Рiвносильнiсть формул. Тотожно iстиннi формули

Наведемо iндуктивне означення поняття ***формули*** логiки предикатiв (*предикатної формули* абопросто *формули* ) на предметнiй областi *M*.

1. Усi предикати *P*(*x*1,*x*2,...,*xn*) на множинi *M* є формулами. Такi формули називають ***елементарними***, або ***атомарними***.

2. Якщо *A* i *B* - формули, то (¬*A*), (¬*B*), (*A*∧*B*), (*A*∨*B*), (*A*→*B*), (*A*~*B*) теж є формулами.

3. Якщо *A* - формула, а *x* - вiльна змiнна в *A*, то (∀*x*(*A*)) i (∃*x*(*A*)) теж формули.

4. Iнших формул, крiм утворених за правилами 1-3, немає.

Це означення дозволяє твердити, що усi формули алгебри висловлень є формулами логiки предикатiв, оскiльки висловлення - це нульмiснi предикати.

За допомогою наведеного означення неважко також переконатись, що вирази (∀*x*(∃*y*(*A*(*x*,*y*))→(*B*(*x*)∨(∃*z*(*C*(*x*,*z*))))) i (∀*x*(∀*y*(*A*(*x*,*y*)∧*B*(*x*))→(∃*y*(*C*(*x*,*y*)))) є формулами логiки предикатiв, а вираз (∀*x*(*A*(*y*)→(∃*x*(*B*(*x*))))) не є формулою, оскiльки у виразi (*A*(*y*)→(∃*x*(*B*(*x*)))), який є правильною формулою, змiнна *x* є зв'язаною, тобто не є вiльною змiнною i квантор ∀*x* до неї застосувати не можна.

Для зручностi можна запровадити такi умови скорочення кiлькостi дужок у формулах. По-перше, залишимо всi умови скорочення числа дужок, якi було прийнято в алгебрi висловлень, виходячи з прiоритету логiчних операцiй. По-друге, опускатимемо всi зовнiшнi дужки. Вважатимемо, що квантори мають бiльший прiоритет, нiж логiчнi операцiї. Опускатимемо також дужки, що позначають область дiї квантора, якщо остання є елементарною формулою. Нарештi, не писатимемо дужки мiж кванторами, що слiдують один за одним. При цьому виконання таких кванторних операцiй вiдбувається в порядку, зворотньому до їх написання (справа налiво).

Нехай *F*(*x*1,*x*2,...,*xn*) - деяка формула логiки предикатiв на множинi *M*. При логiчнiй (iстинностнiй) iнтерпретацiї формули *F* можливi такi три основнi ситуації.

1. Iснує набiр значень змiнних, для якого формула *F* перетворюється на iстинне висловлення. У цьому разi формула *F* називається ***виконуваною в областi*** *M*.

Якщо для *F* iснує область *M*, в якiй *F* є виконуваною, то формула *F* називається просто ***виконуваною***.

2. Якщо формула *F* приймає значення 1 (тобто є виконуваною) для всiх наборiв значень з *M*, то вона називається ***тотожно iстинною в*** *M*. Формула, тотожно iстинна у будь-яких *M*, називається ***тотожно iстинною*** або ***логiчно загальнозначущою*** (скорочено - ***лзз***).

3. Якщо формула *F* є невиконуваною в *M*, то вона називається ***тотожно хибною в*** *M*. Формула, невиконувана в усiх *M*, називається ***тотожно хибною***, або ***суперечнiстю***.

*Приклад 5*.7. Формула ∃*xA*(*x*,*y*)→∀*xA*(*x*,*y*) є виконуваною i вона ж є тотожно iстинною в усiх одноелементних областях *M*. Формула *F*(*x*1,*x*2,...,*xn*)∨¬*F*(*x*1,*x*2,...,*xn*) тотожно iстинна, а формула *F*(*x*1,*x*2,...,*xn*)∧¬*F*(*x*1,*x*2,...,*xn*) тотожно хибна. Тотожно iстинними будуть формули ∀*xP*(*x*)→*P*(*y*) i *P*(*y*)→∃*xP*(*x*).

Формули *F*1 i *F*2 називаються ***рiвносильними*** (***еквiвалентними***), якщо при всiх можливих пiдстановках значень замiсть їх змiнних вони набувають однакових значень; позначається *F*1 = *F*2.

Наприклад, усi тотожно iстиннi (усi тотожно хибнi) формули рiвносильнi мiж собою. Очевидно також, що коли *F*1 i *F*2 рiвносильнi, то формула *F*1~*F*2 є тотожно iстинною, і навпаки.

Множина тотожно iстинних формул логiки предикатiв є складовою частиною усiх формальних математичних теорiй, тому її дослiдження i опис є важливою задачею математичної логiки. Значення цiєї множини пiдтверджує той факт, що їй, як було зазначено вище, належать усi рiвносильнi спiввiдношення (тотожностi) логiки предикатiв.

Як i в логiцi висловлень постають двi проблеми. Перша - опис або побудова множини всiх тотожно iстинних формул, друга - перевiрка тотожної iстинностi заданої формули логiки предикатiв.

Якщо iснує процедура розв’язання другої з цих проблем, то на її основi можна сформулювати такий тривiальний алгоритм, що породжує шукану множину *T* тотожно iстинних формул. Послiдовно будуємо всi формули, кожну з них за вiдомою процедурою перевiряємо на тотожну iстиннiсть i вносимо до множини *T* тi, для яких результат перевiрки є позитивним.

Однак на вiдмiну вiд логiки висловлень, де така процедура iснує i зводиться до обчислення значень даної формули на скiнченнiй множинi значень її параметрiв, у логiцi предикатiв областi визначення предметних i предикатних змiнних формул є, взагалi кажучи, нескiнченними (злiченними або навiть незлiченними).

Метод обчислення значення формули шляхом пiдстановки значень замiсть змiнних i послiдовного виконання вказаних дiй є зручним для встановлення виконуваності заданої формули або доведення нерiвносильностi певних формул. Для цього достатньо пiдiбрати одну вiдповiдну пiдстановку. Застосовувати цей метод можна також, коли предметна область *M* є скiнченною. Пов’язано це з тим, що для скiнченної множини *M* = {*a*1,*a*2,...,*an*} кванторнi формули можна перетворити у рiвносильнi їм звичайнi формули логiки висловлень:

∀*xP*(*x*)  =  *P*(*a*1)∧*P*(*a*2)∧ ... ∧*P*(*an*),

∃*xP*(*x*)  =  *P*(*a*1)∨*P*(*a*2)∨ ... ∨*P*(*an*).

Замiнивши усi квантори за допомогою наведених спiввiдношень, будь-яку формулу логiки предикатiв можна перетворити у рiвносильну пропозицiйну форму або формулу логiки висловлень. Iстиннiсть останньої на скiнченнiй множинi *M* перевiряється за скiнченну кiлькiсть пiдстановок i обчислень.

Для доведення ж рiвносильностi предикатних формул, що заданi на нескiнченних предметних областях, прямий перебiр виключається i доводиться використовувати рiзнi опосередкованi методи.

Наприклад, вище шляхом простих мiркувань було доведено рiвносильнiсть формул, що описує переставнiсть однойменних кванторiв у двомiсних предикатах, тобто доведено iстиннiсть формул

∀*x*∀*yA*(*x*,*y*)~∀*y*∀*xA*(*x*,*y*) i ∃*x* ∃*yA*(*x*,*y*)~∃*y*∃*xA*(*x*,*y*).

Аналогiчними мiркуваннями доведемо рiвносильнiсть, що описує дистрибутивнiсть квантора ∀*x* вiдносно кон’юнêцiї:

∀*x*(*A*(*x*)∧*B*(*x*)) = ∀*xA*(*x*)∧∀*xB*(*x*).

Нехай лiва частина цього співвiдношення є iстинною для деяких предикатiв *A* i *B*. Тодi для будь-якого *a*∈*M* iстинною буде кон’юнкцiя *A*(*a*)∧*B*(*a*), тому *A*(*a*) i *B*(*a*) одночасно iстиннi для довiльних *a*, отже, формула ∀*xA*(*x*)∧∀*xB*(*x*) є iстинною. Якщо ж лiва частина хибна, то це означає, що для деякого *a*∈*M* хибним є або *A*(*a*), або *B*(*a*). Тому хибним буде або ∀*xA*(*x*), або ∀*xB*(*x*), а отже, хибною буде i права частина.

Подiбним методом можна довести дистрибутивнiсть квантора ∃*x* вiдносно диз’юнкцiї:

∃*x*(*A*(*x*)∨*B*(*x*))  =  ∃*xA*(*x*)∨∃*xB*(*x*).

У той же час аналогiчнi простi мiркування дозволяють переконатись, що квантори ∀*x* i ∃*x* є, взагалi кажучи, недистрибутивними вiдносно диз’юнкцiї i кон’юнкцiї вiдповiдно. Насправдi, iстинними є лише такi iмплiкацiї:

∀*xA*(*x*)∨∀*xB*(*x*)→∀*x*(*A*(*x*)∨*B*(*x*)),

∃*x*(*A*(*x*)∧*B*(*x*))→∃*xA*(*x*)∧∃*xB*(*x*).

Якщо один з предикатiв *A*(*x*) чи *B*(*x*) є тотожно iстинним, то лiва i права частини першої iмплiкацiї одночасно будуть iстинними. Якщо ж iснуватимуть такi значення *a*,*b*∈*M*, що *A*(*a*) i *B*(*b*) є хибними, то лiва частина буде хибною, а права - може бути хибною або iстинною. Для її iстинностi достатньо, щоб для кожного *a*∈*M* iстинним був принаймнi один з предикатiв. Це означає, що знак iмплiкацiї → не можна замiнити на знак еквiвалентностi ~, отже, лiва i права частини першої iмплiкацiї не є рiвносильними.

Пропонуємо самостiйно проаналiзувати другу iмплiкацiю i довести її iстиннiсть.

Доведемо ще одне корисне i популярне в логiцi i математицi рiвносильне спiввiдношення: ¬(∃*xP*(*x*))  =  ∀*x*(¬*P*(*x*)).

Нехай для деякого предиката *P* i предметної областi *M* лiва частина iстинна. Тодi не iснує *a*∈*M*, для якого *P*(*a*) iстинно. Отже, для всiх *a*∈*M* *P*(*a*) хибне, тобто ¬*P*(*a*) iстинно. Таким чином, права частина є iстинною. Якщо ж лiва частина хибна, то iснує *b*∈*M*, для якого *P*(*b*) iстинно, тобто ¬*P*(*b*) - хибне. Отже, права частина буде також хибною.

Аналогiчно доводиться рiвносильнiсть

¬(∀*xP*(*x*))  =  ∃*x*(¬*P*(*x*)).

Наведемо без доведень ще декiлька важливих рiвносильних спiввiдношень. Нехай *B* предикатна формула, що не мiстить вiльних входжень змiнної *x*, тодi справедливi такi рiвносильностi:

∀*x*(*A*(*x*)∨*B*)  =  ∀*xA*(*x*)∨*B*, *B*→∀*xA*(*x*)  =  ∀*x*(*B*→*A*(*x*)),

∃*x*(*A*(*x*)∨*B*)  =  ∃*xA*(*x*)∨ *B*, *B*→∃*xA*(*x*)  =  ∃*x*(*B*→*A*(*x*)),

∀*x*(*A*(*x*)∧*B*)  =  ∀*xA*(*x*)∧*B*, ∀*xA*(*x*)→*B*  =  ∃*x*(*A*(*x*)→*B*),

∃*x*(*A*(*x*)∧*B*)  =  ∃*xA*(*x*)∧*B*, ∃*x* *A*(*x*)→*B*  =  ∀*x*(*A*(*x*)→*B*).

Цi спiввiдношення означають, що формулу, яка не мiстить вiльних входжень *x*, можна виносити за межi областi дiї квантора, що зв’язує *x*. З iншого боку цi ж рiвносильностi дозволяють включати або вносити вiдповiдну формулу *B* до областi дiї квантора за змiнною *x*, вiд якої *B* не залежить.

Можливiсть проведення зазначених рiвносильних перетворень для предикатних формул дозволяє означити в логiцi предикатiв поняття певної *канонiчної* або *нормальної* форми.

Формула, що має вигляд *Q*1*x*1*Q*2*x*2...*QnxnF*, де *Q*1,*Q*2,...,*Qn* - квантори, а *F* формула, яка не мiстить кванторiв i є областю дiї всiх *n* кванторiв, називається ***випередженою*** (***пренексною***) ***нормальною формулою***, або формулою у *випередженiй формi*.

Формула, яка знаходиться в пренекснiй формi i рiвносильна формулi *P*, називається ***випередженою*** (***пренексною***) ***формою*** *P*.

Використовуючи останнi вісім рiвносильних спiввiдношеннь та деякi iншi, iндукцiєю за числом логiчних операцiй можна довести, що для кожної формули *P* логiки предикатiв iснує випереджена нормальна форма *P*.